



UNIVERSITAS INDONESIA

**INTERAKSI NEUTRINO DENGAN ELEKTRON DI
ATMOSFER SUPERNOVA**

TESIS

LISTIANA SATIAWATI

0906576561

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MAGISTER FISIKA**

**DEPOK
APRIL 2011**



UNIVERSITAS INDONESIA

**INTERAKSI NEUTRINO DENGAN ELEKTRON DI
ATMOSFIR SUPERNOVA**

TESIS

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister
Sains**

LISTIANA SATIAWATI

0906576561

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MAGISTER FISIKA
KEKHUSUSAN FISIKA MURNI DAN TERAPAN
DEPOK
APRIL 2011**

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya saya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun yang dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Listiana Satiawati

NPM : 0906576561

Tanda Tangan



Tanggal : 25 April 2011

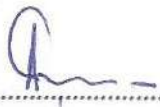
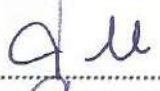
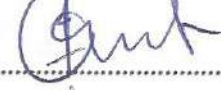
HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh :

Nama : Listiana Satiawati,
NPM : 0906576561,
Program Studi : Magister Fisika,
Judul Tesis : Interaksi Neutrino dengan Elektron di Atmos-
fir Supernova.

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Studi Magister Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	:	Dr. Drs. Anto Sulaksono M.Si.	()
Penguji	:	Dr. Drs. Terry Mart	()
Penguji	:	Dr. rer. nat. Agus Salam S.Si., M.Si.	()
Penguji	:	Dr. Imam Fachruddin	()

Ditetapkan di : Depok
Tanggal : 26 April 2011

Kata Pengantar

Alhamdulillahirobbil'alamin, puji syukur kehadiran Alloh swt atas semua rohmat dan hidayahnya, sehingga saya dapat menyelesaikan tesis yang berjudul "Interaksi Neutrino dengan Elektron di Atmosfir Supernova" ini. Sholawat dan salam saya panjatkan kepada nabi Muhammad saw beserta keluarga dan sahabatnya.

Dalam menyelesaikan tesis ini tentunya tidak lepas dari bantuan, bimbingan, dorongan dan do'a dari berbagai pihak. Oleh karena itu, saya mengucapkan terimakasih dan penghargaan kepada :

- Yang saya hormati dosen pembimbing tesis :
Bpk Dr. Drs. Anto Sulaksono M.Si.
- Dosen-dosen penguji tesis :
Bpk Dr. Drs. Terry Mart, Bpk Dr. rer. nat. Agus Salam S.Si., M.Si.
dan Bpk Dr. Imam Fachruddin.
- Dosen pembimbing akademik dan ketua sidang tesis :
Bpk Dr. Drs. Dedi Suyanto.
- Kakanda Ir. H. Prasetyo serta anak-anak, Ilmi Hayyu Dinna S.T.,
Ridho Abdillah dan Sulthon Abdurrosyid.
- Ayahanda Soejatno, ibunda Sri Patmah serta saudara-saudara :
mbak Yul, mbak Yanni, mas Agus dan dik Putra.
- Bapak Suparman, bapak Samidi, mbak Ratna cs dan bapak Samroni.
- Teman-teman seperjuangan: bu Sofie, bu Dina, pak Encu, pak Habib,
pak Asmi, pak Agus j., pak Mufti, sdr Azis dll.

Saya menyadari bahwa pengetahuan dan kemampuan saya masih sangat terbatas. Namun saya berharap tesis ini dapat bermanfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan. Untuk itu, saya mengharapkan saran dan koreksi dari pembaca.

Akhir kata, semoga Alloh swt berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan tesis ini.

Terimakasih

Depok, 27 April 2011

Penulis

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Listiana Satiawati
NPM : 0906576561
Program Studi : Magister Fisika
Departemen : Fisika
Fakultas : Ilmu Pasti Dan Ilmu Alam
Jenis Karya : Tesis

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif** (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Interaksi Neutrino dengan Elektron di Atmosfir Supernova

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta. Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 25 April 2011

Yang menyatakan



(Listiana Satiawati)

Abstrak

Nama : Listiana Satiawati
Program Studi : Magister Fisika
Judul : Interaksi Neutrino Dengan Elektron Di Atmosfir
Supernova

Telah dihitung polarisasi, penampang lintang diferensial dan jalan bebas rata-rata pada interaksi neutrino-gas elektron dengan mempertimbangkan faktor bentuk elektromagnetik neutrino, untuk temperatur berhingga. Faktor-faktor yang dipertimbangkan pada perhitungan adalah retardasi, detail balans dan Pauli bloking serta anti partikel.

Efek banyak benda masuk dalam perhitungan polarisasi melalui pendekatan korelasi fase random (random phase approximation) dan massa photon efektif. Hasil yang didapat digunakan untuk mempelajari interaksi neutrino dengan materi pada atmosfir supernova.

Hasil penelitian ini menunjukkan seberapa besar pengaruh faktor-faktor temperatur, kerapatan elektron, momen dipol neutrino, jari-jari muatan neutrino, korelasi random phase approximation, massa photon efektif dan koreksi relativitas umum pada jalan bebas rata-rata neutrino pada atmosfir supernova.

Kata kunci : neutrino, efek materi dan temperatur, atmosfir supernova.
xiv+125 halaman : 21 gambar; 3 tabel
Daftar Pustaka : 34 (1974-2011)

Abstract

Name : Listiana Satiawati
Program Study : Magister Fisika
Title : Neutrino Interaction With Electron In Supernova
Atmosphere

The polarizations, differential cross section and mean free path of neutrino-electron gas interaction have been calculated by taking into account the neutrino electromagnetic form factor, for finite temperature. The retarded, detailed balance, Pauli blocking and anti-particle factors have been also taken into account in the calculations.

Many-body effects enter into polarizations calculations through random phase approximation correlation and photon effective mass. The results are used to study the interaction of neutrino with matter in supernova atmosphere. It has also shown how large the influence of temperature, electron density, neutrino moment dipole, neutrino charge radius, random phase approximation correlation, photon effective mass and general relativity correction in mean free path at supernova atmosphere.

Keywords : neutrino, temperatur and matter effect, supernova atmosphere.
xiv+125 pages : 21 pictures; 3 tables
Bibliography : 34 (1974-2011)

Daftar Isi

Abstrak	vi
Daftar Isi	vii
Daftar Gambar	xi
Daftar Tabel	xiv
1 Pendahuluan	1
1.1 Latar Belakang	1
2 Teori	4
2.1 Supernova	4
2.2 Neutrino	7
2.2.1 Masalah Neutrino Matahari (<i>Solar Neutrino Problem</i>) .	8
2.3 Neutrino Supernova	9
2.4 Interaksi Neutrino dan Elektron	11
2.4.1 Hamburan Neutrino dan Elektron di Vakum	14
2.4.2 Hamburan Neutrino dan Elektron di Medium	19
2.4.3 Jalan Bebas Rata-rata	31
3 Hasil dan Pembahasan	32
3.1 Pendekatan Respon Linier (<i>linear response</i>)	32
3.2 <i>Random Phase Approximation</i> dan Massa Photon Efektif	43
3.3 Aplikasi pada Atmosfir Supernova	45
4 Kesimpulan	50
Lampiran	52

A	Hamburan Neutrino dengan Elektron di Vakum	53
A.1	Kontribusi Interaksi Lemah	53
A.1.1	Tensor Elektron Interaksi Lemah	53
A.1.2	Tensor Neutrino Interaksi Lemah	56
A.2	Kontribusi Interaksi Elektromagnetik	57
A.2.1	Tensor Elektron Interaksi Elektromagnetik	57
A.2.2	Tensor Neutrino Interaksi Elektromagnetik	58
A.3	Kontribusi Interferensi	58
A.3.1	Tensor Elektron Interferensi	59
A.3.2	Tensor Neutrino Interferensi	60
B	Polarisasi	61
B.1	Polarisasi Vektor (<i>Vector Polarization</i>)	67
B.1.1	Polarisasi Longitudinal (<i>Longitudinal Polarization</i>)	70
B.1.2	Polarisasi Transversal (<i>Tranverse Polarization</i>)	77
B.2	Polarisasi Aksial (<i>Axial Polarization</i>)	82
B.3	Polarisasi Vektor-Aksial (<i>Vector-Axial Polarization</i>)	84
C	Pembuktian $F_{\mu\nu}(p, p + q) = F_{\mu\nu}(p, p - q)$	90
D	Tensor Neutrino	92
D.1	Interaksi lemah	92
D.2	Interaksi Elektromagnetik	93
D.3	Interferensi	94
E	Kontraksi Bagian Vektor, Vektor-Aksial dan Aksial	96
E.1	Bagian Vektor	96
E.2	Bagian Vektor-Aksial	97
E.3	Bagian Aksial	99
F	Kontraksi Interaksi Lemah	101
F.1	Bagian Vektor	101
F.2	Bagian Vektor-Aksial	104
F.3	Bagian Aksial	105
F.4	Total Kontraksi Interaksi Lemah	106

G	Kontraksi Interaksi Elektromagnetik	107
H	Kontraksi Interferensi	111
H.1	Bagian Vektor	111
H.2	Bagian Vektor-Aksial	113
H.3	Total Kontraksi Interferensi	114
I	<i>Random Phase Approximation (RPA)</i>	115
I.1	Polarisasi Transversal	115
I.2	Polarisasi Vektor-Aksial	116
I.3	Polarisasi Aksial	117
I.4	Polarisasi Longitudinal	118
	Daftar Acuan	122

Daftar Gambar

2.1	Supernova dan bintang neutron (Nasa 2011).	4
2.2	Left handed neutrino dan right handed anti-neutrino.	9
2.3	data dari referensi (Keil & Janka 2003).	10
2.4	Diagram Feynman untuk interaksi neutrino dengan elektron melalui (a) arus netral dan (b) arus bermuatan.	16
2.5	Diagram Feynman untuk interaksi neutrino dengan elektron melalui interaksi elektromagnetik.	17
2.6	Distribusi partikel fermion untuk temperatur nol dan berhingga, dengan $f(\epsilon)$ adalah fungsi distribusi Fermi-Dirac, ϵ energi partikel, μ potensial kimia partikel dan T temperatur.	21
3.1	Perbandingan polarisasi longitudinal (Π_L), transversal (Π_T), aksial (Π_A), dan vektor-aksial (Π_{VA}) untuk kerapatan elektron tetap tetapi dengan temperatur bervariasi. ($T_1 = 0$ MeV, $\mu_1 = 50$ MeV, $T_2 = 20$ MeV, $\mu_2 = 26.79$ MeV, $T_3 = 40$ MeV, $\mu_3 = 7.88$ MeV, $T_4 = 60$ MeV, $\mu_4 = 3.52$ MeV, $E_\nu = 10$ MeV, $ \vec{q} = 5$ MeV).	33
3.2	Perbandingan penampang lintang diferensial interaksi lemah, elektromagnetik, interferensi dan total untuk $T = 0$ MeV. ($\mu = 50$ MeV, $ \vec{q} = 5$ MeV, $E_\nu = 10$ MeV, $R_\nu = 5.10^{-6}$ MeV $^{-1}$, $\mu_\nu = 10^{-10}\mu_B$).	34
3.3	Perbandingan penampang lintang diferensial interaksi lemah, elektromagnetik, interferensi dan total untuk $T = 40$ MeV. ($\mu = 7.88$ MeV, $ \vec{q} = 5$ MeV, $E_\nu = 10$ MeV, $R_\nu = 5.10^{-6}$ MeV $^{-1}$, $\mu_\nu = 10^{-10}\mu_B$). FDB : Faktor detailed balance, FPB : Faktor Pauli blocking.	35

- 3.4 Perbandingan penampang lintang diferensial ($T_0 = 0$ MeV, $\mu_0 = 50$ MeV, $T_1 = 20$ MeV, $\mu_1 = 26,79$ MeV, $T_2 = 40$ MeV, $\mu_2 = 7,88$ MeV, $T_3 = 60$ MeV, $\mu_3 = 3,52$ MeV, $|\vec{q}| = 5$ MeV, $E_v = 10$ MeV, $R_\nu = 5 \cdot 10^{-6}$ MeV $^{-1}$, $\mu_\nu = 10^{-10} \mu_B$). 37
- 3.5 Perbandingan penampang lintang diferensial ($T_1 = 20$ MeV, $\mu_1 = 26,79$ MeV, $T_2 = 40$ MeV, $\mu_2 = 7.88$ MeV, $|\vec{q}| = 5$ MeV, $E_v = 10$ MeV, $R_\nu = 5 \cdot 10^{-6}$ MeV $^{-1}$, $\mu_{\nu 1} = 10^{-10} \mu_B$, $\mu_{\nu 2} = 5 \cdot 10^{-10} \mu_B$, $\mu_{\nu 3} = 10^{-9} \mu_B$). 38
- 3.6 Perbandingan penampang lintang diferensial ($T = 20$ MeV, $\mu = 26,79$ MeV, $|\vec{q}| = 5$ MeV, $E_v = 10$ MeV, $\mu_\nu = 10^{-10} \mu_B$, $R_{\nu 1} = 10^{-9}$ MeV $^{-1}$, $R_{\nu 2} = 10^{-11}$ MeV $^{-1}$, $R_{\nu 3} = 10^{-12}$ MeV $^{-1}$). . 39
- 3.7 Perbandingan tampang lintang dengan variasi kerapatan elektron ($\rho_1 = 2112,713$ MeV 3 , $\rho_2 = 8450,852$ MeV 3 , $\rho_3 = 42254,26$ MeV 3 , $|\vec{q}| = 5$ MeV, $E_v = 10$ MeV, $R_\nu = 5 \cdot 10^{-6}$ MeV $^{-1}$, $\mu_\nu = 10^{-10} \mu_B$). 40
- 3.8 Jalan bebas rata-rata neutrino interaksi total terhadap kerapatan elektron dengan variasi temperatur dan energi neutrino datang ($T_1 = 10$ MeV, $T_2 = 15$ MeV, $T_3 = 20$ MeV, $E_{v1} = 5$ MeV, $E_{v2} = 7,5$ MeV, $E_{v3} = 10$ MeV, $\mu_\nu = 10^{-10} \mu_B$, $R_\nu = 5 \cdot 10^{-6}$ MeV $^{-1}$). 41
- 3.9 Jalan bebas rata-rata neutrino interaksi total, lemah (Weak), lemah + elektromagnetik (Weak + EM), terhadap kerapatan elektron ($T = 10$ MeV, $E_v = 5$ MeV, $\mu_\nu = 10^{-10} \mu_B$, $R_\nu = 5 \cdot 10^{-6}$ MeV $^{-1}$). 42
- 3.10 Perbandingan penampang lintang diferensial untuk respon linier, random phase approximation dan massa photon efektif pada $E_v = 10$ MeV, $R_\nu = 5 \cdot 10^{-6}$ MeV $^{-1}$ dan $\mu_\nu = 10^{-10} \mu_B$. 43
- 3.11 Perbandingan jalan bebas rata-rata untuk respon linier, random phase approximation dan massa photon efektif pada $E_v = 10$ MeV, $R_\nu = 5 \cdot 10^{-6}$ MeV $^{-1}$ dan $\mu_\nu = 10^{-10} \mu_B$ 44

-
- 3.12 Perbandingan jalan bebas rata-rata terhadap jari-jari atmosfer supernova untuk respon linier, random phase approximation dan massa photon efektif pada $E_\nu = 5 \text{ MeV}$, $R_\nu = 5 \cdot 10^{-6} \text{ MeV}^{-1}$ dan $\mu_\nu = 10^{-10} \mu_B$. Dengan data : RadiiNW dan RadiiGR. 47
- 3.13 Perbandingan jalan bebas rata-rata pada atmosfer supernova terhadap temperatur dan kerapatan elektron pada $E_\nu = 5 \text{ MeV}$, $R_\nu = 5 \cdot 10^{-6} \text{ MeV}^{-1}$ dan $\mu_\nu = 10^{-10} \mu_B$ 48
- 3.14 Perbandingan jalan bebas rata-rata terhadap jari-jari atmosfer supernova dengan variasi momen dipol neutrino pada $E_\nu = 5 \text{ MeV}$ dan $R_\nu = 0 \text{ MeV}^{-1}$ 48
- 3.15 Perbandingan jalan bebas rata-rata terhadap jari-jari atmosfer supernova dengan variasi jari-jari muatan neutrino pada $E_\nu = 5 \text{ MeV}$ dan $\mu_\nu = 10^{-10} \mu_B$ 49

Daftar Tabel

3.1	Tabel variasi kerapatan dan potensial kimia elektron.	40
3.2	Data : RadiiGR (Keil 2003).	46
3.3	Data : RadiiNW (Keil 2003).	46

Bab 1

Pendahuluan

1.1 Latar Belakang

Interaksi neutrino pada materi panas dan termampatkan (*hot and dense matter*) sangat relevan dalam penelitian tentang tingkah laku supernova dari bintang netron. Karena neutrino merupakan sumber informasi yang paling akurat untuk mempelajari mekanisme ledakan supernova (Reddy,S.,et al. 1999, Keil 2003).

Menurut *Standard Model*, neutrino adalah partikel yang tidak bermuatan dan tidak bermasa dan berinteraksi hanya melalui arus lemah netral. Tetapi pada kenyataannya, pengamatan eksperimen maupun sumber-sumber ruang angkasa menunjukkan bahwa neutrino mempunyai massa walaupun sangat kecil, yaitu lebih kecil dari 5.7 eV (Giunti & Kim 2007), mempunyai momen dipol (Daraktcvieva 2003), dan mempunyai jari-jari muatan (Nardi 2002). Sehingga hal ini mengindikasikan bahwa neutrino selain berinteraksi dengan arus netral juga dengan arus bermuatan. Sehingga kita dapat mengasumsikan bahwa neutrino dapat berinteraksi dengan interaksi lemah (*weak*), elektromagnetik (*electromagnetic*), dan interferensi (*interference*) keduanya.

Pada penelitian yang terdahulu (Caroline 2004, Parada 2004), sudah dihitung penampang lintang diferensial (*differential cross section*) dan jalan bebas rata-rata (*mean free path*) dengan koreksi faktor bentuk elektromagnetik (*electromagnetic form factor*) untuk berbagai variasi konstituen dari materi pada kasus temperatur nol.

Pada tulisan ini, hasil-hasil tersebut akan dikembangkan untuk kasus temperatur berhingga, korelasi antar partikel dan massa photon di medium juga diperhitungkan. Untuk kasus temperatur berhingga, faktor retardasi harus ditambahkan pada tensor polarisasi partikel target:

$$Im\Pi_{\alpha\beta}^R \rightarrow \Pi_{\alpha\beta}^R = \tanh \frac{q_0}{2T} \times \Pi_{\alpha\beta}. \quad (1.1)$$

Juga efek Pauli bloking yang mempengaruhi kemungkinan dari partikel keluar (*out going particle*) diperhitungkan. Efek ini secara signifikan menurunkan harga penampang lintang diferensial neutrino (Reddy, et al. 1999). Hal ini dapat dilihat juga pada gambar 3.3. Selain itu berdasarkan theorema fluktuasi-disipasi (*fluctuation-dissipation theorem*) yang menghendaki invariansi interaksi terhadap inversi ruang, faktor keseimbangan detail (*detailed balance factor*) juga perlu diperhitungkan (Reddy, Prakash, & Lattimer 1998, Horowitz & Wehrberger 1991). Jelas elektron adalah fermion maka pada perhitungan polarisasi elektron untuk temperatur berhingga pada kesetimbangan thermal, digunakan distribusi partikel Fermi-Dirac (Saito, Maruyama, & Soutome 1989, Reddy, Prakash, & Lattimer 1998). Kontribusi anti partikel penting untuk kasus elektron dan untuk kasus potensial kimia jauh lebih kecil dari pada temperatur ($\mu_e \ll T$), kondisi ini dipenuhi untuk elektron-elektron di supernova (Reddy, Prakash, & Lattimer 1998). Maka faktor ini juga diperhitungkan.

Efek banyak benda (*many-body*) diakomodasi melalui polarisasi-polarisasi dari elektron. Ada 4 macam polarisasi yaitu: longitudinal, transversal, aksial dan vektor-aksial. Korelasi antar partikel dalam medium (dalam hal ini elektron) dihitung dengan *random phase approximation* (RPA), juga efek dari massa efektif photon (pada interaksi elektromagnetik) juga akan dibahas disini. Faktor-faktor ini akan mempengaruhi ke empat polarisasi tersebut. Efek kedua koreksi diatas akan dibahas lebih detail pada bab Teori.

Sehingga pada tesis ini, kami akan mempelajari semua efek koreksi yang muncul pada penampang lintang hamburan neutrino dengan materi elektron dan jalan bebas rata-ratanya untuk $T \neq 0$. Baik berdasarkan asumsi elektron merupakan gas elektron (pendekatan respon linier), maupun jika efek korelasi elektron berdasarkan pendekatan fase random (RPA),

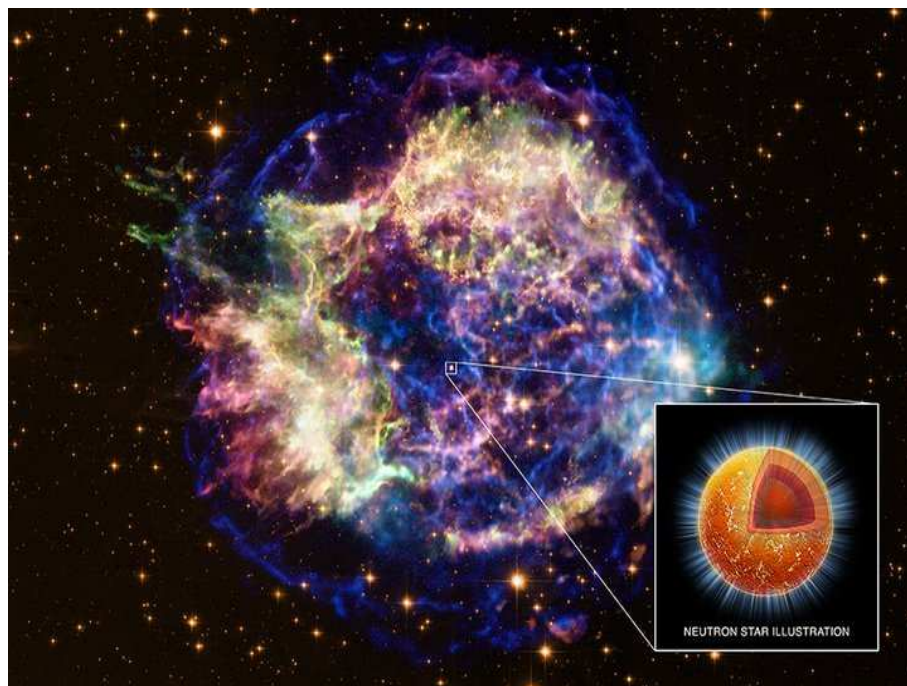
dan efek massa photon diperhitungkan. Kemudian kami mengaplikasikan perhitungan numerik yang telah kami kembangkan, pada kasus materi di atmosfer supernova.

Sistematika tesis ini adalah, pada bab 2 akan dibahas tentang atmosfer supernova, formulaampang lintang diferensial, lintasan bebas rata-rata untuk arus netral dan arus bermuatan pada interaksi neutrino dengan elektron dengan koreksi faktor bentuk elektromagnetik dengan penambahan faktor-faktor retardasi, keseimbangan, Pauli bloking dan anti partikel. Kemudian dilanjutkan dengan penurunan persamaan RPA dari persamaan Dyson. Kemudian disajikan persamaan massa photon efektif. Sedangkan yang terakhir persamaan-persamaan tersebut dimasukkan kedalam persamaan jalan bebas rata-rata. Bab 3 berisi diskusi yang mengacu pada gambar yang telah dihasilkan dari perhitungan numerik, bab 4 berisi kesimpulan dan pada lampiran diberikan penjabaran analitik dari formula-formula yang digunakan pada tesis secara detail.

Bab 2

Teori

2.1 Supernova

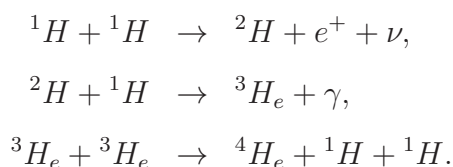


Gambar 2.1: Supernova dan bintang neutron (Nasa 2011).

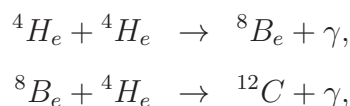
Supernova adalah ledakan yang bercahaya sangat terang memancar menyinari seluruh galaksi, selama beberapa minggu atau bulan sebelum akhirnya memudar. Selama interval waktu tersebut supernova dapat memancarkan energi sebanyak waktu hidup bintang. Ledakan itu memancarkan hampir semua material bintang dengan kecepatan hingga 30 000 km/s (10% dari

kecepatan cahaya), dengan perantara gelombang kejut (*shock wave*) menuju ke medium antar bintang sekitarnya. Gelombang kejut ini menyapu dan menyebarkan gas dan debu yang berupa besi dan elemen berat yang lain dan meninggalkan sisa supernova (*supernova remnant*).

Bintang-bintang dengan minimal $9 \times$ massa matahari berevolusi secara sempurna, yang nantinya disebut supernova tipe II. Pada inti bintang, hidrogen mengadakan fusi menjadi helium dan energi panas dilepaskan menciptakan tekanan luar yang menjaga inti dalam kesetimbangan hidrostatik dan mencegah kerutuhan. Adapun rantai reaksi pembentukan inti Hidrogen menjadi helium adalah (Parada 2004),



Ketika suplay hidrogen ke inti habis, tekanan keluar tidak ada lagi. Maka inti mulai runtuh, menyebabkan kenaikan temperatur dan tekanan yang menjadi cukup besar untuk memicu helium untuk memulai siklus fusi karbon, menciptakan tekanan luar yang cukup untuk menghentikan keruntuhan. Inti mengembang dan sedikit mendingin, dengan suatu lapisan luar fusi hidrogen, dengan suatu pusat inti helium yang lebih panas dan tekanan lebih besar, unsur-unsur lain seperti magnesium, belerang, dan kalsium juga terbentuk.



dan seterusnya, proses ini berlanjut beberapa kali, setiap kali inti runtuh, keruntuhan dihentikan oleh pengapian proses lebih lanjut yang menjadikan inti menjadi lebih besar dan tekanan dan suhu lebih tinggi. Setiap lapisan dicegah dari keruntuhan oleh panas dan tekanan keluar dari proses fusi pada lapisan berikutnya, setiap lapisan juga membakar lebih panas dan lebih cepat dari sebelumnya. Pembakaran terakhir adalah proses transformasi si-

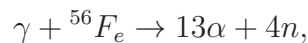
likon menjadi besi.

Bintang menjadi berlapis-lapis seperti bawang, dengan pembakaran lebih mudah melebur unsur yang terjadi pada kulit yang lebih besar.

Jika bintang cukup besar, maka inti besi nikel pada akhirnya akan melebihi batas Chandrasekhar (1.38 massa matahari), dimana pada titik ini mekanisme menjadi berubah.

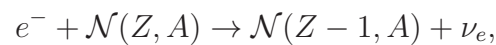
Inti runtuh kedalam dengan kecepatan mencapai 0,23 kecepatan cahaya, menghasilkan peningkatan tinggi pada suhu dan densitas. Inti runtuh (*collapse*) dan panas. Produknya disebut bintang proto-neutron.

Melalui fotodisintegrasi, sinar gamma merombak besi menjadi inti helium dan neutron bebas, menyerap energi (Giunti & Chung 2007),

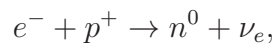


menurunkan energi kinetik dan tekanan dari elektron.

Sedangkan reaksi elektron *capture* dari inti adalah,



dan proton bebas,



menghasilkan neutron dan neutrino elektron yang keluar dari inti.

Neutrino pergi membawa energi panas, menyebabkan suatu bintang neutron terbentuk (neutron akan menguap jika pendinginan ini tidak terjadi).

Neutrino panas dari semua flavour dalam jumlah yang sangat besar keluar dan merupakan output utama dalam peristiwa ini.

Inti dalam akhirnya mencapai diameter sekitar 30 km, dan kepadatan sebanding dengan suatu inti atom dan keruntuhan lebih lanjut tiba-tiba dihentikan oleh interaksi gaya kuat dan degenerasi neutron.

Kejatuhan materi, tiba-tiba berhenti, menghasilkan gelombang kejut yang menyebar keluar membawa neutrino dan sebagian besar komponen bintang. Tetapi hasil-hasil simulasi komputer saat ini menunjukkan bahwa gelombang kejut ini tidak secara langsung menyebabkan ledakan supernova. Ketika memasuki phase ini ada beberapa tahapan yang belum dapat

dijelaskan, tentang bagaimana ledakan besar itu terjadi (Keil 2003).

Seperti sudah dijelaskan tadi, sesudah inti dari suatu bintang masif yang sudah tua berhenti menghasilkan energi dari fusi nuklir, akan mengalami keruntuhan gravitasi tidak hanya kedalam bentuk bintang neutron (*neutron star*) tetapi juga bisa kedalam bentuk lubang hitam (*black hole*) atau bintang kerdil putih (*white dwarf star*), bergantung seberapa besar ukuran bintang masif tersebut.

Selain dari proses yang diatas masih ada lagi beberapa mekanisme evolusi bintang yang lain. Hal ini mengakibatkan supernova dapat dikategorikan menjadi beberapa tipe seperti tipe Ib, Ic atau II. Semua ini masih dalam penelitian (Wikipedia 2010a).

2.2 Neutrino

Berdasarkan model standar, neutrino adalah partikel elementer (partikel dasar), melaju dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya, muatan netral (tidak bermuatan), interaksi yang melibatkan neutrino dimediasi oleh interaksi lemah, oleh sebab itu neutrino sukar dideteksi dan mampu melewati jarak yang sangat jauh hampir tanpa hambatan.

Mempunyai massa diam (*rest mass*) sangat kecil, tetapi tidak sama dengan nol, karena mempunyai massa, neutrino berinteraksi gravitasi dengan partikel masif yang lain, neutrino mempunyai spin setengah ($\frac{1}{2}\hbar$) dan karena itu termasuk fermion. Neutrino dihasilkan sebagai suatu hasil dari peluruhan radioaktif atau reaksi nuklir seperti yang terjadi pada matahari, reaktor nuklir atau ketika sinar kosmik menumbuk atom. Tetapi kebanyakan neutrino yang mengenai bumi berasal dari matahari, setiap detik 65 milyar (6.5×10^{10}) melewati tiap cm^2 tegak lurus terhadap arah matahari.

Ada 3 tipe atau flavour(rasa) dari neutrino, yakni neutrino elektron (ν_e), neutrino muon (ν_μ), dan neutrino tau (ν_τ), yang masing-masing berhubungan dengan anti partikel dan disebut antineutrino ($\bar{\nu}$). Neutrino (atau antineutrino) elektron, dihasilkan ketika proton berubah menjadi neutron, atau sebaliknya, 2 bentuk dari peluruhan beta (β decay). Neutrino pertama kali dipostulatkan pada tahun 1930 oleh Wolfgang Pauli untuk men-

jaga konservasi atau kekekalan energi, momentum dan momentum angular(sudut) dalam peluruhan beta, yaitu peluruhan inti atom (yang kemudian disebut neutron) menjadi sebuah proton, sebuah elektron dan sebuah antineutrino:

$$n^0 \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e.$$

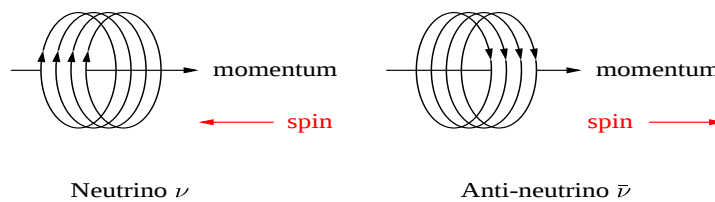
Deteksi neutrino yang pertama kali dilakukan adalah eksperimen neutrino Cowan Reines. Neutrino dihasilkan dalam reaktor nuklir dengan peluruhan beta, kemudian ditembakkan ke proton menghasilkan neutron dan positron:

$$\nu_e + p^+ \rightarrow n^0 + e^+,$$

positron dengan cepat menemukan elektron dan saling menghilangkan (*annihilation*) satu sama lain. Kemudian kedua sinar gamma (γ ray) yang dihasilkan dapat dideteksi (Wikipedia 2010b).

2.2.1 Masalah Neutrino Matahari (*Solar Neutrino Problem*)

Beberapa eksperimen menemukan bahwa jumlah neutrino elektron yang datang dari matahari adalah antara $\frac{1}{2}$ dan $\frac{1}{3}$ dari jumlah yang diprediksi oleh SSM (*Standard Solar Model*). *Standard Model* (SM) fisika partikel mengasumsikan bahwa neutrino tidak bermassa dan tidak dapat mengubah rasa atau flavour. Namun, jika neutrino memiliki massa mereka bisa mengubah flavour (atau berosilasi antara flavour). *Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein effect* (MSW effect) menyatakan bahwa osilasi flavour dapat dimodifikasi ketika neutrino merambat melalui materi. Ini penting karena neutrino yang dipancarkan oleh fusi matahari melewati materi padat (*dense matter*) di inti matahari sebelum pada akhirnya mencapai detektor di bumi. Neutrino elektron yang dihasilkan matahari sebagian telah berubah menjadi flavour lain yang pada waktu itu belum bisa dideteksi dengan percobaan yang ada. Jadi penemuan osilasi flavour neutrino menunjukkan bahwa neutrino memiliki massa. Penemuan massa neutrino menguatkan adanya momen magnetik neutrino, walaupun kecil, dengan orde 10^{-19} satuan magneton Bohr (μ_B). Hal ini memberi kemungkinan neutrino melakukan interaksi elektromagnetik.



Gambar 2.2: Left handed neutrino dan right handed anti-neutrino.

Eksperimen yang dilakukan oleh CS Wu dari Universitas Colombia menunjukkan bahwa neutrino selalu left handed. Sifat left-handed dan right-handed disebut *helicity*. Helicity dari suatu partikel didefinisikan sebagai m_s/s , atau komponen z dari spin dibagi besar (*magnitude*) spin tersebut. Menurut definisi, dalam kasus ini helicity $-\frac{1}{2}$ untuk neutrino left-handed, dan helicity $+\frac{1}{2}$ untuk anti neutrino right-handed.

Jadi hanya left handed neutrino dan right handed anti-neutrino seperti terlihat pada gambar 2.2 yang dapat berinteraksi dengan lepton bermuatan (Halzen & Martin 1976).

2.3 Neutrino Supernova

Neutrino dihasilkan dari mekanisme supernova tipe Ib, Ic dan II. Pada kasus ini density dari inti menjadi sangat tinggi (10^{17} kg/m^3). Sehingga degenerasi elektron tidak cukup untuk mencegah proton dan elektron berkombinasi membentuk suatu neutron dan elektron neutrino. Sebagian besar energi yang dihasilkan supernova terpecah dalam bentuk ledakan neutrino. Bukti eksperimen pertama dari fenomena ini datang pada tahun 1987, ketika neutrino dari supernova 1987A terdeteksi. Karena begitu sedikitnya neutrino bereaksi dengan materi, diperkirakan emisi neutrino supernova membawa informasi tentang daerah terdalam ledakan. Sebagian besar cahaya yang tampak, berasal dari peluruhan radioaktif yang dihasilkan oleh gelombang kejut supernova. Disisi lain, neutrino melewati gas-gas ini dan menyediakan informasi tentang inti supernova.

Pada tesis ini, kami meneliti sifat-sifat neutrino ketika berinteraksi dengan elektron. Partikel lain belum kami perhitungkan dalam tulisan ini, misalkan interaksi dengan proton atau neutron. Oleh sebab itu didalam aplikasinya kami memilih data hasil simulasi dari atmosfir supernova, karena didaerah tersebut elektron lebih dominan daripada partikel lain.

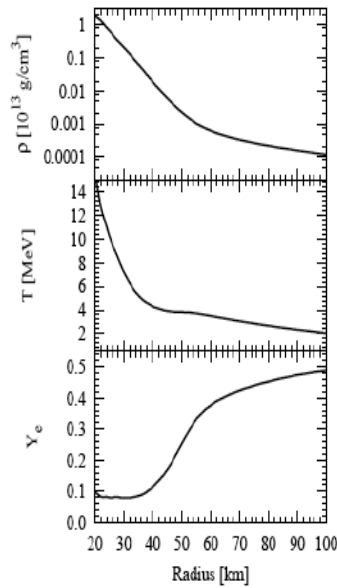


Fig. 1.— Accretion-Phase Model I, a SN model 324 ms after bounce from a Newtonian calculation (O.E.B. Messer, personal communication).

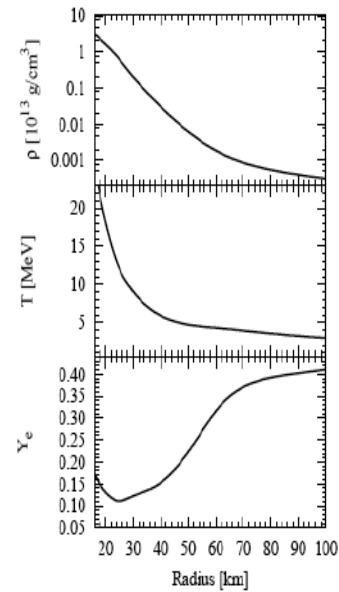


Fig. 2.— Accretion-Phase Model II, a SN core at 150 ms postbounce from a general-relativistic simulation. (M. Rampp, personal communication).

Gambar 2.3: data dari referensi (Keil & Janka 2003).

Atmosfir bintang proto-neutron dikarakteristikan dengan sifat radial dari temperatur [$T(r)$] dalam MeV, densitas massa nukleon [$\rho(r)$] dalam 10^{13} gram/cm³ dan jumlah (fraksi) elektron dalam nukleon [$Y_e(r)$], lihat gambar (2.3). Karena massa neutron $\approx$ proton, maka densitas massa nukleon dapat ditulis sebagai densitas dari jumlah neutron dan proton dikalikan massanya,

$$\rho(r) = n_n m_n + n_p m_p.$$

Fraksi elektron tiap nukleon

$$Y_e(r) = \frac{n_p}{n_n + n_p},$$

didapatkan dari kerapatan neutron dan proton, dengan mengasumsikan di atmosfer supernova netral.

Potensial kimia neutron dan proton (μ_n & μ_p) didapatkan dari persamaan,

$$\begin{aligned} n_{n,p}(r) &= \int d\epsilon f_{n,p}(\epsilon, \mu_{n,p}) \\ &= \int d\epsilon \frac{\epsilon^2}{1 + \exp(\frac{\epsilon - \mu_{n,p}}{T})}. \end{aligned}$$

Potensial kimia elektron didapatkan dari relasi

$$n_B Y_e = n_{e^-} - n_{e^+} = \int d\epsilon [f(\epsilon, \mu_e) - f(\epsilon, -\mu_e)].$$

Suku anti partikel muncul pada elektron tapi tidak pada nukleon karena $m_e \ll m_n$. Potensial kimia neutrino didapatkan dari

$$\mu_{\nu_e} = \mu_e + \mu_p - \mu_n.$$

Sehingga dari informasi ini dan gambar 2.3 dapat diekstrak data-data radius (r) dalam kilometer, temperatur (T) dalam MeV, potensial kimia elektron (μ_e) dalam MeV dan potensial kimia neutrino (μ_ν) dalam MeV, seperti terlihat pada tabel 3.2 dan 3.3.

Kemudian data-data dimasukkan dalam perhitungan numerik yang telah kami buat. Hasilnya disajikan pada bab 3.

Catatan : mulai dari sini, selanjutnya ada pergantian notasi dimana densitas jumlah partikel n_e diganti ρ_e .

2.4 Interaksi Neutrino dan Elektron

Untuk mempelajari interaksi antara neutrino dan elektron dipelajari tentang hamburan (*scattering*) antara kedua partikel ketika keduanya bertumbukan.

Matriks transisi ($\mathcal{M}$) memberikan semua informasi tentang hamburan. Dan $\mathcal{M}^2$ merupakan probabilitas mendapatkan keadaan akhir tertentu setelah proses interaksi. Probabilitas interaksi berbanding lurus dengan penam-

pang lintang diferensial. Penampang lintang hamburan diferensial adalah jumlah partikel yang terhambur kedalam suatu sudut ruang per satuan waktu dan persatuan flux partikel datang (*incident*).

Menurut model standar, neutrino tidak memiliki sifat elektromagnetik. Sifat elektromagnetik neutrino muncul melalui koreksi radiasi yang memberikan 'besaran-besaran elektromagnetik' yang merupakan fungsi massa neutrino. Jika besaran-besarn ini dibandingkan dengan beberapa prediksi dari astrophysics, kosmologi, dan model matahari tampak terlalu kecil. Oleh sebab itu pendekatan paling sederhana adalah dengan menambahkan suku-suku elektromagnetik fenomenologis pada formulasi hamburan neutrino-elektron.

Maka didalam penelitian ini dihitung penampang lintang diferensial pada interaksi neutrino dengan gas elektron termampatkan dengan mempertimbangkan faktor bentuk elektromagnetik dari neutrino.

Faktor bentuk suatu partikel adalah beberapa fungsi yang menggambarkan keadaan internal dari partikel tersebut. Sedangkan penampang lintang diferensial suatu partikel yang mempunyai faktor bentuk, dapat dinyatakan dengan penampang lintang titik partikel $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{titik}$ dengan koreksi faktor bentuk $f(q^2)$ dari partikel tersebut, dengan hubungan sebagai berikut:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{titik} |f(q^2)|^2. \quad (2.1)$$

Suatu partikel netral dapat dikarakteristikan sebagai suatu superposisi dari 2 distribusi muatan yang berbeda tanda. Sehingga faktor bentuk ($f(q^2)$) partikel netral, tidak sama dengan nol untuk $q \neq 0$ (Giunti & Studenikin 2009).

Oleh sebab itu, meskipun tidak bermuatan (netral), neutrino mempunyai faktor bentuk. Sifat elektromagnetik neutrino Dirac ini digambarkan dengan 4 faktor bentuk yaitu Dirac, anapol, magnet dan listrik.

Elemen matrik dari arus elektromagnetik antara keadaan awal v_i dengan momentum k_i dan keadaan akhir v_j dengan momentum k_j dari neutrino adalah,

$$\langle v_j^D(k_j) | J_\mu^{EM} | v_i^D(k_i) \rangle = i \bar{u}(k') \Gamma_\mu^D(q^2) u(k). \quad (2.2)$$

dimana,

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu^D(q^2) = & f_{1\nu}(q^2)\gamma^\alpha - \frac{i}{2m_e}f_{2\nu}(q^2)\sigma^{\alpha\beta}q_\beta \\ & + g_{1\nu}(q^2)\left(g^{\alpha\beta} - \frac{q^\alpha q^\beta}{q^2}\right)\gamma_\beta\gamma^5 - \frac{i}{2m_e}g_{2\nu}(q^2)\sigma^{\alpha\beta}q_\beta\gamma^5,\end{aligned}$$

dan selanjutnya persamaan 2.2 menjadi,

$$\begin{aligned}\langle v_j^D(k_j) | J_\mu^{EM} | v_i^D(k_i) \rangle = \\ \bar{u}(k') \left[f_{m\nu}\gamma^\mu + g_{1\nu}\gamma^\mu\gamma^5 - (f_{2\nu} + i g_{2\nu}\gamma^5) \frac{P^\mu}{2m_e} \right] u(k), \quad (2.3)\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}k' &= k + q, \\ f_{m\nu} &= f_{1\nu} + (m_\nu/m_e)f_{2\nu}, \\ P^\mu &= k^\mu + k'^\mu = 2k^\mu - q^\mu,\end{aligned}$$

dan $f_{1\nu}$, $g_{1\nu}$, $f_{2\nu}$ dan $g_{2\nu}$ masing-masing adalah faktor bentuk Dirac, anapol, magnet dan listrik (Kerimov & Safin 1988).

Radius muatan rata-rata neutrino dinyatakan dengan bentuk kedua dari ekspansi pada faktor bentuk neutrino $f(q^2)$ dengan deret power terhadap q^2 (Giunti & Studenikin 2009),

$$\begin{aligned}f(q^2) &= f(0) + q^2 \frac{df(q^2)}{dq^2} \Big|_{q^2=0} + \dots, \quad \text{untuk limit } q^2 \rightarrow 0 \\ &= 1 - q^2 \frac{\langle r^2 \rangle}{6} + \dots,\end{aligned}$$

maka radius muatan kuadrat neutrino adalah,

$$\langle r^2 \rangle = -6 \frac{df(q^2)}{dq^2} \Big|_{q^2=0}.$$

Untuk faktor bentuk Dirac, didapatkan radius muatan vektor kuadrat neutrino,

$$\langle r_V^2 \rangle = -6 f_{m\nu}(0).$$

Untuk faktor bentuk anapol, didapatkan radius muatan vektor-aksial kuadrat

neutrino,

$$\langle r_A^2 \rangle = -6 g_{1\nu}(0).$$

Atau bisa ditulis,

$$\begin{aligned} f_{m\nu} &= \frac{1}{6} a^2 q^2 \\ g_{1\nu} &= \frac{1}{6} b^2 q^2 \end{aligned}$$

maka,

$$f_{m\nu}^2 + g_{1\nu}^2 = \frac{1}{36} (a^4 + b^4) q^4 = \frac{1}{36} R^4 q^4$$

R adalah besaran yang bisa diamati.

Menurut referensi (Giunti & Studenikin 2009) besar jari-jari muatan neutrino $\langle R^2 \rangle = 10^{-34} \text{ cm}^2$. Jika dikonversikan untuk $1 \text{ cm} = 5,07 \times 10^{10} \text{ MeV}^{-1}$, maka diperoleh $R \approx 10^{-6} \text{ MeV}^{-1}$. Dalam kasus faktor bentuk magnetik dan listrik untuk $q^2 = 0$ memberikan besaran momen statik (diagonal) neutrino dalam satuan magneton Bohr ($\mu_B = e/2m_e$). Besar momen magnetik statik: $m_\nu = f_{2\nu}(0) \mu_B$, besar momen dipole listrik statik : $d_\nu = g_{2\nu}(0) \mu_B$,

$$\begin{aligned} f_{2\nu}^2(0) + g_{2\nu}^2(0) &= \left(\frac{m_\nu}{\mu_B} \right)^2 + \left(\frac{d_\nu}{\mu_B} \right)^2, \\ &\equiv \frac{\mu_\nu^2}{\mu_B^2}, \\ \mu_\nu &= [f_{2\nu}^2(0) + g_{2\nu}^2(0)]^{\frac{1}{2}} \mu_B. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Menurut referensi (Vogel & Engel 1988) besar momen dipole magnetik neutrino-elektron adalah $\mu_{\nu_e} \approx 10^{-10} \mu_B$.

2.4.1 Hamburan Neutrino dan Elektron di Vakum

Dengan mempergunakan suatu kopling empat-titik efektif (*an effective four-point coupling*) untuk interaksi Lagrangian yang relevan dari teory Weinberg-Salam dalam bentuk interaksi arus-arus. Dan diasumsikan nilai-nilai dari momentum transfer jauh lebih kecil daripada massa boson-boson tera lemah (*the weak gauge bosons*) (Niembro, et al. 2001, Sulaksono, et al. 2006).

Maka density Lagrangian untuk interaksi neutrino-elektron dari kontribusi

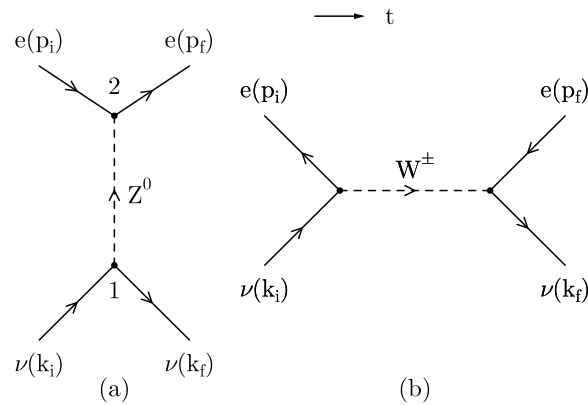
arus netral Z^0 dan arus bermuatan $W^\pm$ adalah,

$$\mathcal{L}_{int}^e = \underbrace{\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}(k') \Gamma_W^\mu u(k) \bar{u}(p') J_\mu^W u(p)}_{M_W} + \underbrace{\frac{4\pi\alpha}{q^2} \bar{u}(k') \Gamma_{EM}^\mu u(k) \bar{u}(p') J_\mu^{EM} u(p)}_{M_{EM}} \quad (2.5)$$

Keterangan:

- e : elektron sebagai partikel target,
- $u(k)$ & $\bar{u}(k')$: spinor neutrino sebelum dan sesudah interaksi,
- $u(p)$ & $\bar{u}(p')$: spinor elektron sebelum dan sesudah interaksi,
- Γ_W^μ : arus neutrino interaksi lemah
 $= \gamma_\mu (1 + \gamma^5),$
- J_μ^W : arus elektron interaksi lemah
 $= \gamma_\mu (C_V + C_A \gamma^5),$
- Γ_{EM}^μ : arus neutrino interaksi elektromagnetik
 $= f_{m\nu} \gamma^\mu + g_{1\nu} \gamma^\mu \gamma^5 - (f_{2\nu} + i g_{2\nu} \gamma^5) \frac{P^\mu}{2m_e},$
- J_μ^{EM} : arus elektron interaksi elektromagnetik
 $= \gamma_\mu,$
- C_V : konstanta kopling vektor
 $= 2 \sin^2 \theta_W + \frac{1}{2},$
- C_A : konstanta kopling aksial
 $= \frac{1}{2},$
- θ_W : sudut Weinberg
 $(\sin^2 \theta_W \equiv 0.223),$
- G_F : konstanta kopling interaksi lemah $= 1,66 \times 10^{-11} (\text{MeV})^{-2},$
- α : konstanta struktur halus elektromagnetik
 $= \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137.036}.$

Secara grafis pers (2.5) dapat disajikan dalam bentuk diagram Feynman seperti tampak pada gambar 2.4 dan 2.5.



Gambar 2.4: Diagram Feynman untuk interaksi neutrino dengan elektron melalui (a) arus netral dan (b) arus bermuatan.

Interaksi Lemah

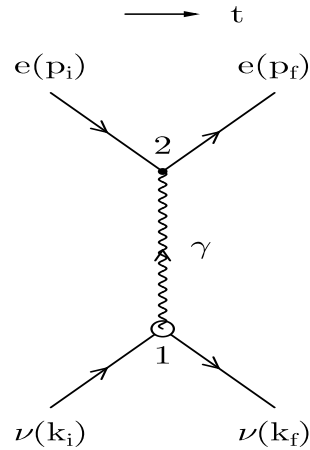
Pada gambar (2.4), arti dari simbol berikut adalah :

- e & ν : spinor elektron & neutrino,
- p_i & p_f : momentum elektron awal & akhir,
- k_i & k_f : momentum neutrino awal & akhir,
- Z^0 & $W^\pm$: mediator arus netral & arus bermuatan,
- t : waktu.

Matrik transisi untuk interaksi lemah,

$$\mathcal{M}_W = \underbrace{\frac{G_F}{\sqrt{2}}}_{\text{propagator}} \underbrace{\bar{u}(k')\gamma^\mu(1+\gamma^5)u(k)}_{\text{vertex 1}} \underbrace{\bar{u}(p')\gamma_\mu(C_V + C_A\gamma^5)u(p)}_{\text{vertex 2}}. \quad (2.6)$$

Bentuk verteks $\gamma^\mu(1+\gamma^5)$ menunjukkan pelanggaran kekekalan paritas (*parity consevation violation*) (Halzen & Martin 1984).



Gambar 2.5: Diagram Feynman untuk interaksi neutrino dengan elektron melalui interaksi elektromagnetik.

Interaksi Elektromagnetik

Pada gambar (2.5), arti dari simbol berikut adalah

- e & ν : spinor elektron & neutrino,
- p_i & p_f : momentum elektron awal & akhir,
- k_i & k_f : momentum neutrino awal & akhir,
- γ : photon,
- t : waktu.

Matrik transisi untuk interaksi elektromagnetik,

$$\mathcal{M}_{EM} = \underbrace{\frac{4\pi\alpha}{q^2}}_{\text{propagator}} \underbrace{\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)}_{\text{vertex 2}} \underbrace{\bar{u}(k')[f_{m\nu}\gamma^\mu + g_{1\nu}\gamma^\mu\gamma^5 - (f_{2\nu} + ig_{2\nu}\gamma^5)\frac{P^\mu}{2m_e}]u(k)}_{\text{vertex 1}}. \quad (2.7)$$

Penampang Lintang Diferensial

Untuk menurunkan persamaan penampang lintang harus dihitung terlebih dahulu matrik transisi ($\mathcal{M}$). Matrik transisi berisi informasi interaksi di dalam proses hamburan.

Kuadrat dari matrik transisi adalah probabilitas interaksi ($\mathcal{M}^2$), merupakan probabilitas untuk mendapatkan suatu keadaan akhir setelah berlalunya proses interaksi. Probabilitas interaksi berbanding lurus dengan penampang lintang diferensial ($d\sigma \propto \mathcal{M}^2$).

Matrik transisi total interaksi neutrino dan elektron adalah,

$$\mathcal{M}_{total} = \mathcal{M}_W + \mathcal{M}_{EM}.$$

Probabilitas interaksi ($\mathcal{M}_{total}^2$) adalah,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{total}^2 &= (\mathcal{M}_W + \mathcal{M}_{EM})^2, \\ &= (\mathcal{M}_W + \mathcal{M}_{EM})(\mathcal{M}_W + \mathcal{M}_{EM})^*, \\ &= \mathcal{M}_W \mathcal{M}_W^* + \mathcal{M}_{EM} \mathcal{M}_{EM}^* + \mathcal{M}_W \mathcal{M}_{EM}^* + \mathcal{M}_{EM} \mathcal{M}_W^*, \\ &= \underbrace{\mathcal{M}_W^2}_a + \underbrace{\mathcal{M}_{EM}^2}_b + \underbrace{\mathcal{M}_W \mathcal{M}_{EM}^* + \mathcal{M}_{EM} \mathcal{M}_W^*}_c, \end{aligned}$$

dengan a adalah kontribusi interaksi lemah, b kontribusi interaksi elektromagnetik dan c adalah kontribusi interferensi interaksi lemah dan elektromagnetik. Masing-masing kontribusi dijabarkan pada lampiran A.

Dan hasilnya adalah:

Dari persamaan (A.1), (A.3) dan (A.7) didapatkan kontribusi interaksi lemah,

$$\mathcal{M}_W^2 = \left(\frac{G_F}{\sqrt{2}} \right)^2 L_{\mu\nu}^{e(W)} L_{\nu}^{\mu\nu(W)},$$

dengan,

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}^{e(W)} &= C_V^2 \text{Tr}[(\not{p}' + m_e)\gamma_\mu(\not{p} + m_e)\gamma_\nu], \\ &+ 2C_V C_A \text{Tr}[(\not{p}' + m_e)\gamma_\mu(\not{p} + m_e)\gamma_\nu\gamma^5], \\ &+ 2C_A^2 \text{Tr}[(\not{p}' + m_e)\gamma_\mu\gamma^5(\not{p} + m_e)\gamma_\nu\gamma^5], \end{aligned}$$

dan,

$$L_{\nu}^{\mu\nu(W)} = \text{Tr}[(\not{k}' + m_\nu)\gamma^\mu(1 + \gamma^5)(\not{k} + m_\nu)\gamma^\nu(1 + \gamma^5)].$$

Dan dari persamaan (A.8), (A.9) dan (A.10) didapatkan kontribusi interaksi elektromagnetik,

$$\mathcal{M}_{EM}^2 = \left(\frac{4\pi\alpha}{q^2} \right)^2 L_{\mu\nu}^{e(EM)} L_{\nu}^{\mu\nu(EM)},$$

dengan

$$L_{\mu\nu}^{e(EM)} = Tr[(\not{k}' + m_e)\gamma_\mu(\not{k} + m_e)\gamma_\nu],$$

dan

$$\begin{aligned} L_{\nu}^{\mu\nu(EM)} &= Tr\left\{(\not{k}' + m_\nu)\left[f_{m\nu}\gamma^\mu + g_{1\nu}\gamma^\mu\gamma^5 - (f_{2\nu} + ig_{2\nu}\gamma^5)\frac{P^\mu}{2m_e}\right]\right. \\ &\quad \times (\not{k} + m_\nu)\left[f_{m\nu}\gamma^\nu + g_{1\nu}\gamma^\nu\gamma^5 - (f_{2\nu} + ig_{2\nu}\gamma^5)\frac{P^\nu}{2m_e}\right]\left.\right\}. \end{aligned}$$

Serta dari persamaan (A.11), (A.13) dan (A.14) didapatkan kontribusi interferensi,

$$\mathcal{M}_{EM}\mathcal{M}_W^* + \mathcal{M}_W\mathcal{M}_{EM}^* = \frac{8G_F\pi\alpha}{q^2\sqrt{2}}L_{\mu\nu}^{e(INT)}L_{\nu}^{\mu\nu(INT)},$$

dengan

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}^{e(INT)} &= C_V Tr[(\not{k}' + m_e)\gamma_\mu + (\not{k} + m_e)\gamma_\nu] \\ &\quad + C_A Tr[(\not{k}' + m_e)\gamma_\mu\gamma^5 + (\not{k} + m_e)\gamma_\nu], \end{aligned}$$

dan,

$$\begin{aligned} L_{\nu}^{\mu\nu(INT)} &= Tr[(\not{k}' + m_\nu)\gamma^\mu(1 + \gamma^5)(\not{k} + m_\nu) \\ &\quad \times \left[f_{m\nu}\gamma^\mu + g_{1\nu}\gamma^\mu\gamma^5 - (f_{2\nu} + ig_{2\nu}\gamma^5)\frac{P^\mu}{2m_e}\right]. \end{aligned}$$

Sehingga, penampang lintang diferensial dapat ditulis (Caroline 2004),

$$\begin{aligned} d\sigma &\propto \mathcal{M}^2 \\ &\propto \mathcal{M}_W^2 + \mathcal{M}_{EM}^2 + \mathcal{M}_W\mathcal{M}_{EM}^* + \mathcal{M}_{EM}\mathcal{M}_W^* \\ &\propto \left(\frac{G_F}{\sqrt{2}}\right)^2 L_{\mu\nu}^{e(W)}L_{\nu}^{\mu\nu(W)} + \left(\frac{4\pi\alpha}{q_\mu^2}\right)^2 L_{\mu\nu}^{e(EM)}L_{\nu}^{\mu\nu(EM)} \\ &\quad + \frac{8G_F\pi\alpha}{q_\mu^2\sqrt{2}}L_{\mu\nu}^{e(INT)}L_{\nu}^{\mu\nu(INT)}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

2.4.2 Hamburan Neutrino dan Elektron di Medium

Tensor elektron $L_{\mu\nu}^e$ pada sub-bab yang lalu adalah untuk satu elektron (di vakum), untuk kasus elektron banyak/gas elektron (di medium) digunakan tensor polarisasi elektron $\Pi_{\mu\nu}^e$ ($L_{\mu\nu}^e \rightarrow \Pi_{\mu\nu}^e$).

Hamburan yang terjadi antara neutrino dengan gas elektron harus mem-

pertimbangkan gas elektron sebagai suatu sistem banyak benda. Tumbukan neutrino dengan satu elektron target dari gas elektron, menimbulkan interaksi dengan elektron-elektron disekitar elektron target. Semua kemungkinan keadaan dari interaksi disebut polarisasi.

Dari persamaan (2.8) didapatkan persamaan penampang lintang diferensial hamburan neutrino-elektron di medium mampat pada temperatur berhingga, dengan penambahan beberapa faktor koreksi dan korelasi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \frac{d^3\sigma}{d^2\Omega dE'_v} = & -\frac{1}{16\pi^2} \frac{E'_v}{E_v} \left[\left(\frac{G_F}{\sqrt{2}} \right)^2 L_{\nu}^{\mu\nu (W)} \Pi_{\mu\nu}^{Im R(W)} \right. \\ & + \left(\frac{4\pi\alpha}{(q_\mu^2)'} \right)^2 L_{\nu}^{\mu\nu (EM)} \Pi_{\mu\nu}^{Im R(EM)} + \frac{8G_F\pi\alpha}{(q_\mu^2)'\sqrt{2}} L_{\nu}^{\mu\nu (INT)} \Pi_{\mu\nu}^{Im R(INT)} \left. \right] \\ & \times \left[1 - \exp\left(-\frac{q_0}{T}\right) \right]^{-1} \times \left\{ 1 - \left[1 + \exp\left(\frac{E_v + q_0 + \mu_\nu}{T}\right) \right]^{-1} \right\}. \quad (2.9) \end{aligned}$$

Keterangan:

- $L \& \Pi$: tensor neutrino & tensor polarisasi elektron,
- $W, EM \& INT$: interaksi lemah, elektromagnetik dan interferensi,
- $E_v \& E'_v$: energi neutrino sebelum dan sesudah hamburan dalam MeV,
- μ_ν : potesial kimia neutrino dalam MeV,
- T : temperatur satuan MeV,
- $q_0 \& q_\mu$: transfer energi & momentum-empat dalam MeV,

$$\Pi_{\alpha\beta}^{Im(R)} = \tanh \frac{q_0}{2T} \times \Pi_{\alpha\beta}^{Im} \quad : \text{faktor retardasi,}$$

$$\left[1 - \exp\left(-\frac{q_0}{T}\right) \right] \quad : \text{faktor detailed balans,}$$

$$\left\{ 1 - \left[1 + \exp\left(\frac{E_v + q_0 + \mu_\nu}{T}\right) \right]^{-1} \right\} \quad : \text{faktor Pauli blocking.}$$

Ketiga faktor diatas diperhitungkan karena penelitian ini memperhitungkan temperatur yang berhingga. Sedangkan untuk perhitungan benda banyak korelasi RPA dan massa photon efektif juga diperhitungkan.

Korelasi RPA ditunjukkan dengan penambahan tanda tilde pada notasi po-

larisasi

$$\Pi \rightarrow \tilde{\Pi},$$

dimana $\tilde{\Pi} = \Pi + \Delta\Pi$, dimana $\Delta\Pi$ adalah koreksi korelasi RPA.

sedangkan koreksi massa photon efektif adalah,

$$(q_\mu^2)' = q_\mu^2 + m_t^2(T, \rho_e), \quad (2.10)$$

dimana

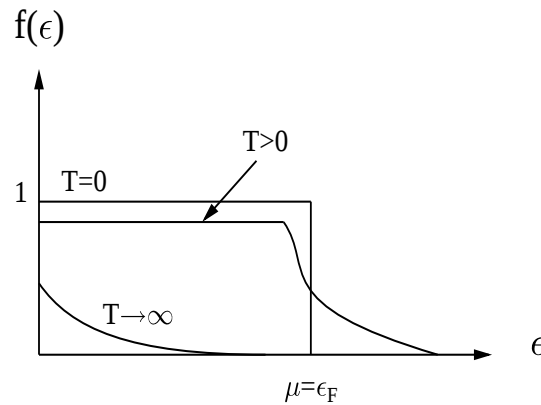
$$\lim_{T, \rho \rightarrow 0} m_t^2 = 0, \quad (\text{divakum})$$

dengan m_t^2 adalah massa photon efektif yaitu yang terdapat pada persamaan (2.21).

Selain yang tersebut diatas, faktor anti partikel pada persamaan polarisasi juga dipertimbangkan, terutama karena partikel target pada tulisan ini adalah elektron. Munculnya anti partikel terlihat pada persamaan (2.20).

Penjabaran masing-masing faktor akan kami sajikan pada bagian berikutnya.

Perbedaan distribusi partikel untuk temperatur berhingga dengan tempe-



Gambar 2.6: Distribusi partikel fermion untuk temperatur nol dan berhingga, dengan $f(\epsilon)$ adalah fungsi distribusi Fermi-Dirac, ϵ energi partikel, μ potensial kimia partikel dan T temperatur.

ratur nol bisa dilihat pada gambar (2.6). Ketika temperatur nol ($T = 0$), partikel dalam keadaan dasar (*ground-state*). Partikel mengisi penuh setiap

keadaan, dan grafik berbentuk fungsi step, dimana harga potensial kimia partikel sama dengan energi Fermi, karena

$$\lim_{T \rightarrow 0} \mu(T) = \epsilon_F.$$

Ketika temperatur naik ($T > 0$) maka partikel mulai tereksitasi. Dan ketika temperatur mendekati tidak terhingga ($T \rightarrow \infty$), partikel bergerak dan sebagian besar sudah lepas.

Retardasi

Ketika pada temperatur nol dan untuk energi transfer positif, maka polarisasi kausal (*causal polarization*) dan polarisasi retardasi adalah identik. Hal ini tidak berlaku dalam temperatur berhingga, karena (Reddy, Prakash & Lattimer 1998, Horowitz & Wehrberger 1991)

$$\begin{aligned} Im \Pi^R &= \tanh \left(\frac{q_0 + (\mu_2 - \mu_4)}{2T} \right) Im \Pi^C, \\ Re \Pi^R &= Re \Pi^C, \end{aligned}$$

R dan C adalah untuk retardasi dan kausal.

Label 2 dan 4 adalah keadaan awal dan akhir elektron, adalah keadaan kesetimbangan thermal pada temperatur T dan kesetimbangan kimia, dengan potensial kimia μ_2 dan μ_4 .

Karena diasumsikan merupakan elektron bebas yang tidak berinteraksi satu sama lain, sehingga potensial kimia awal dan akhir sama

$$\mu_2 = \mu_4, \quad (2.11)$$

maka tensor polarisasi elektron retardasi adalah (Horowitz & Wehrberger 1991),

$$\begin{aligned} Im \Pi^R &= \tanh \left(\frac{q_0}{2T} \right) Im \Pi^C, \\ Re \Pi^R &= Re \Pi^C. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Faktor Detailed Balance

Hamiltonian dari problem-problem pada teori hamburan adalah invarian terhadap suatu perubahan tanda dari waktu, yaitu ketika waktu yang akan datang dan waktu lampau bisa ditukar (*time reversal*).

Menggunakan sifat invarian dari Hamiltonian dengan suatu perubahan tanda dari waktu, didapatkan relasi umum yang berhubungan dengan probabilitas transisi dan penampang lintang untuk proses langsung (*direct*) maupun kebalikan (*inverse*). *Detailed balance* muncul pada sistem seperti ini, dan menunjukkan kesamaan probabilitas transisi (Davidov 1976).

Faktor *detailed balance* adalah (Reddy, Prakash & Lattimer 1998)

$$f_{db} = \left\{ 1 - \exp \left[\frac{-q_0 - (\mu_2 - \mu_4)}{T} \right] \right\}^{-1},$$

menurut persamaan (2.11), maka

$$f_{db} = \left[1 - \exp \left(- \frac{q_0}{T} \right) \right]^{-1}. \quad (2.13)$$

Faktor Pauli Blocking

Keadaan akhir dari partikel setelah proses hamburan (*out-going particle*) untuk fermion pada temperatur berhingga terbatas oleh faktor degenerasi target yang disebut Pauli blocking.

Faktor Pauli blocking didefinisikan (Reddy, Prakash & Lattimer 1998),

$$f_{Pb} = [1 - f_3(E_3)],$$

3 adalah indeks untuk neutrino datang.

Fungsi $f_i(E_i)$ merupakan fungsi distribusi partikel pada kesetimbangan thermal diberikan oleh fungsi Fermi-Dirac

$$f_i(E_i) = \left[1 - \exp \left(\frac{E_i - \mu_i}{kT} \right) \right]^{-1},$$

maka

$$f_{Pb} = 1 - \left[1 - \exp \left(\frac{E_i - \mu_i}{kT} \right) \right]^{-1}.$$

Karena untuk density dan temperatur yang diteliti disini, adalah penting untuk melibatkan faktor Pauli blocking dalam perhitungan, agar hasil yang didapat mendekati kenyataan.

Polarisasi

Bentuk umum tensor polarisasi gas elektron ($\Pi_{\mu\nu}^e$) dari persamaan (2.9) adalah,

$$\Pi_{\mu\nu}^{Im} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3p}{8E_p E_{p+q}} f(E_p)[1 - f(E_{p+q})] F_{\mu\nu}(p, p+q) \times \{\delta[q_0 - (E_{p+q} - E_p)] + \delta[q_0 - (E_p - E_{p+q})]\}. \quad (2.14)$$

Penurunannya terdapat pada lampiran (B).

Polarisasi dibagi menjadi 3 bagian yaitu, pertama bagian polarisasi vektor ($\sim F_{\mu\nu}^V$), yang kedua bagian polarisasi vektor-aksial ($\sim F_{\mu\nu}^{VA}$) dan yang ketiga bagian polarisasi aksial ($\sim F_{\mu\nu}^A$).

Polarisasi vektor terdiri dari dua komponen yang tidak saling bergantung, yaitu polarisasi longitudinal (Π_L) dan polarisasi transversal (Π_T) (Chin 1977). Sedangkan bagian vektor-aksial menghasilkan polarisasi vektor-aksial (Π_{VA}) dan bagian aksial menghasilkan polarisasi aksial (Π_A).

Selanjutnya dihitung keempat tensor polarisasi gas elektron diatas yang diturunkan dari persamaan (2.14).

1. Polarisasi Longitudinal

$$\Pi_L^{Im} = \frac{q_\mu^2}{2\pi|\vec{q}|^3} \int_{e_-}^{\infty} dE_p [(E_p + \frac{1}{2}q_0)^2 - \frac{1}{4}|\vec{q}|^2] [F(E_p, E_p + q_0) + F(E_p + q_0, E_p)]. \quad (2.15)$$

2. Polarisasi transversal

$$\Pi_T^{Im} = \frac{q_\mu^2}{4\pi|\vec{q}|^3} \int_{e_-}^{\infty} dE_p \left[(E_p + \frac{1}{2}q_0)^2 + \frac{1}{4}|\vec{q}|^2 + \frac{m_e^2|\vec{q}|^2}{q_\mu^2} \right] [F(E_p, E_p + q_0) + F(E_p + q_0, E_p)]. \quad (2.16)$$

3. Polarisasi aksial

$$\Pi_A^{Im} = \frac{m_e^2}{(2\pi)^2} \int_{e_-}^{\infty} dE [F(E_p, E_p + q_0) + F(E_p + q_0, E_p)]. \quad (2.17)$$

4. Polarisasi vektor-aksial

$$\begin{aligned} \Pi_{VA} = \frac{q_\mu^2}{8\pi|\vec{q}|^3} \int_{e_-}^{\infty} dE_p (2E_p + q_0) \\ \times [F(E_p, E_p + q_0) + F(E_p + q_0, E_p)]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

dengan

$$e_- = -\frac{1}{2}q_0 + \frac{1}{2}|\vec{q}| \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{q_\mu^2}},$$

penurunan persamaan-persamaan diatas bisa dilihat pada lampiran (B), yaitu persamaan (B.20), (B.25), (B.29) dan (B.35).

Batas bawah integrasi (e_-) muncul karena keterbatasan-keterbatasan kinematik (*kinematic restrictions*). Keterbatasan kinematik sistem elektron muncul karena elektron tidak sendiri, dan ketika ada neutrino datang/lewat maka elektron-elektron tersebut akan terpengaruh/bereaksi. Energi yang terkandung didalamnya disebut energi minimum elektron ($E_p^{min} = z = e_-$). Energi tersebut akan berharga nol untuk kasus satu elektron dan dengan kerangka sendiri.

Karena neutrino dan elektron termasuk fermion, maka dipakai distribusi partikel Fermi-Dirac, untuk memudahkan manipulasi lebih menyenangkan jika kita definisikan $F(E, E^*)$ pada persamaan (2.15) - (2.18) (Saito, Maruyama & Soutome 1989, Reddy & Prakash 1996):

$$F(E, E^*) \equiv f_+(E)(1 - f_+(E^*)) + sf_-(E)(1 - f_-(E^*)).$$

dengan

$$f_{\pm}(E) = \frac{1}{1 + e^{E\beta \mp \alpha}}$$

dan s bisa berharga 1 atau -1, tergantung jenis polarisasinya. Sehingga

$$\begin{aligned}
 F(E, E + q_0) + F(E + q_0, E) &= \\
 &= f_+(E, \beta)[1 - f_+(E + q_0, \beta)] + s f_-(E, \beta)[1 - f_-(E + q_0, \beta)] + \\
 &\quad f_+(E + q_0, \beta)[1 - f_+(E, \beta)] + s f_-(E + q_0, \beta)[1 - f_-(E, \beta)] \\
 &= f_+(E, \beta)[1 - f_+(E + q_0, \beta)] + f_+(E + q_0, \beta)[1 - f_+(E, \beta)] + \\
 &\quad s f_-(E, \beta)[1 - f_-(E + q_0, \beta)] + s f_-(E + q_0, \beta)[1 - f_-(E, \beta)] \\
 &= F_+(E, q_0) + s F_-(E + q_0, q_0)
 \end{aligned}$$

maka, jika

$$F_+(E, q_0) = \frac{e^{E\beta-\alpha}(1 + e^{\beta q_0})}{(1 + e^{E\beta-\alpha})(1 + e^{(E+q_0)\beta-\alpha})}, \quad (2.19)$$

$$F_-(E + q_0, q_0) = \frac{e^{E\beta+\alpha}(1 + e^{\beta q_0})}{(1 + e^{E\beta+\alpha})(1 + e^{(E+q_0)\beta+\alpha})}, \quad (2.20)$$

persamaan (2.19) adalah partikel dan persamaan (2.20) adalah anti partikel.

Untuk polarisasi longitudinal, transversal dan aksial $s = 1$

$$F(E, E + q_0) + F(E + q_0, E) = F_+(E, q_0) + F_-(E, q_0),$$

untuk polarisasi vektor aksial $s = -1$

$$F(E, E + q_0) + F(E + q_0, E) = F_+(E, q_0) - F_-(E, q_0).$$

Persamaan (2.15), (2.16), (2.17) dan (2.18) sesuai dengan hasil pada referensi (Saito, Maruyama & Soutome 1989, Horowitz & Wehrberger 1991, Reddy, Prakash & Lattimer 1998).

Tensor Neutrino $L_{\nu}^{\mu\nu}$

Kemudian kita akan melihat bentuk dari persamaan tensor neutrino, karena neutrino tidak mengalami polarisasi maka perhitungan tensor neutrino sama ketika berada di vakum dan di medium. Dan perhitungannya juga analog seperti pada kasus $T = 0$ MeV.

Perhitungan tensor neutrino untuk interaksi lemah didapatkan dari per-

samaan (A.7),

$$L_{\nu}^{\mu\nu(W)} = 8[2k^{\mu}k^{\nu} - (k^{\mu}q^{\nu} + k^{\nu}q^{\mu}) + g^{\mu\nu}(k.q) - i \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu}k_{\alpha}k'_{\beta}].$$

Penjabarannya bisa dilihat pada lampiran (D) dan persamaan (D.1).

Perhitungan tensor neutrino untuk interaksi elektromagnetik didapatkan dari persamaan (A.10),

$$\begin{aligned} L_{\nu}^{\mu\nu(EM)} = & 4(f_{m\nu}^2 + g_{1\nu}^2)[2k^{\mu}k^{\nu} - (k^{\mu}q^{\nu} + k^{\nu}q^{\mu}) \\ & + g^{\mu\nu}(k.q)] - i 8f_{m\nu}g_{1\nu}\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu}k_{\alpha}k'_{\beta} \\ & - \frac{f_{2\nu}^2 + g_{2\nu}^2}{m_e^2}(k.q)[4k^{\mu}k^{\nu} - 2(k^{\mu}q^{\nu} + k^{\nu}q^{\mu}) + q^{\mu}q^{\nu}]. \end{aligned}$$

Penjabarannya bisa dilihat pada lampiran (D) dan persamaan (D.2).

Perhitungan tensor neutrino untuk interferensi antara interaksi lemah dan elektromagnetik didapatkan dari persamaan (A.14),

$$\begin{aligned} L_{\nu}^{\mu\nu(INT)} = & 4(f_{m\nu} + g_{1\nu})[2k^{\mu}k^{\nu} - (k^{\mu}q^{\nu} + k^{\nu}q^{\mu}) + g^{\mu\nu}(k.q) \\ & - i \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu}k_{\alpha}k'_{\beta}. \end{aligned}$$

Penjabarannya bisa dilihat pada lampiran (D) dan persamaan (D.3).

Sesudah menghitung tensor polarisasi elektron dan neutrino, kemudian dilanjutkan dengan perhitungan kontraksi keduanya.

Kontraksi $\Pi_{\mu\nu}^{Im} L_{\nu}^{\mu\nu}$

Total kontraksi untuk interaksi lemah, terdiri dari kontraksi bagian vektor, vektor-aksial dan aksial.

Diketahui dari persamaan (A.3) dan (B.13),

$$L_{\nu}^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu}^{Im(W)} = -8 q_{\mu}^2 (A_W R_{W_1} + R_{W_2} + R_{W_3} B_W),$$

dengan

$$\begin{aligned}
A_W &= \frac{2E(E - q_0) + \frac{1}{2}q_\mu^2}{|\vec{q}|^2}, \\
B_W &= 2E - q_0, \\
R_{W_1} &= (C_V^2 + C_A^2)(\Pi_L + \Pi_T), \\
R_{W_2} &= C_V^2 \Pi_T + C_A^2 (\Pi_T - \Pi_A), \\
R_{W_3} &= 2C_V C_A \Pi_{VA},
\end{aligned}$$

perhitungan terdapat pada lampiran (F), dan persamaan (F.5).

Kontraksi interaksi elektromagnetik hanya terdiri dari bagian vektor saja.

Penurunan kontraksi bagian vektor dapat dilihat pada persamaan (E.3) dan (E.4). Hasil jadi kontraksi interaksi elektromagnetik adalah,

$$L_\nu^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(EM)} = A_{EM} R_{EM_1} - B_{EM} R_{EM_2},$$

dengan,

$$\begin{aligned}
a &= 4(f_{m\nu}^2 + g_{1\nu}^2), \\
b &= \frac{f_{2\nu}^2 + g_{2\nu}^2}{m_e^2}, \\
A_W &= \frac{2E(E - q_0) + \frac{1}{2}q_\mu^2}{|\vec{q}|^2}, \\
A_{EM} &= \left[(bq_\mu^2 - a)A_W + \frac{1}{2}bq_\mu^2 \right] q_\mu^2, \\
B_{EM} &= \left(\frac{1}{2}bq_\mu^2 + a \right) q_\mu^2, \\
R_{EM_1} &= \Pi_L + \Pi_T, \\
R_{EM_2} &= \Pi_T,
\end{aligned}$$

perhitungan terdapat pada lampiran (G), dan persamaan (G.1).

Perlu diketahui bahwa bentuk $f_{m\nu}^2 + g_{1\nu}^2$ adalah merupakan jari-jari muatan neutrino kuadrat, dan $f_{2\nu}^2 + g_{2\nu}^2$ adalah kuadrat dari momen dipol neutrino.

Telah diketahui bahwa kontraksi untuk interferensi terdiri dari bagian

vektor dan bagian vektor-aksial, dapat dilihat pada persamaan (A.14) dan (B.13),

$$L_{\nu}^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(INT)} = -4\tilde{a} q_{\mu}^2 (A_{INT} R_{INT_1} + R_{INT_2} + B_{INT} R_{INT_3}),$$

dengan

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= f_{m\nu} + g_{1\nu}, \\ A_{INT} &= A_W = \frac{2E(E - q_0) + \frac{1}{2}q_{\mu}^2}{|\vec{q}|^2}, \\ B_{INT} &= B_W = 2E - q_0, \\ R_{INT_1} &= C_V(\Pi_L + \Pi_T), \\ R_{INT_2} &= C_V \Pi_T, \\ R_{INT_3} &= C_A \Pi_{VA}. \end{aligned}$$

perhitungan terdapat pada lampiran (H), dan persamaan (H.4).

Seperti dijelaskan diatas bahwa efek banyak benda mengakibatkan ada beberapa faktor harus dipertimbangkan, dalam tulisan ini faktor-faktor yang dipertimbangkan adalah massa photon efektif dan RPA.

Massa Photon Efektif

Pada saat terjadinya interaksi elektromagnetik, photon bertindak sebagai pembawa interaksi. Dan menurut standart model photon adalah partikel yang tidak bermassa. Tetapi karena pengaruh lingkungan gas elektron, ketika proses interaksi terjadi ternyata photon mempunyai massa efektif.

Besar massa efektif photon tersebut adalah (Braaten & Segel 1993),

$$m_t^2 = \frac{4\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} dp \frac{p^2}{E} [n_F(E) + \bar{n}_F(E)], \quad (2.21)$$

dengan n_F adalah distribusi Fermi untuk elektron

$$n_F(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} + 1},$$

dan $\bar{n}_F$ adalah distribusi Fermi untuk positron

$$\bar{n}_F(E) = \frac{1}{e^{(E+\mu)/T} + 1}.$$

Random Phase Aproximation

Selanjutnya kita pertimbangkan efek dari korelasi RPA relativistik pada temperatur berhingga. Penelitian neutrino mengekstraksi *particle-hole* dan pasangan partikel dan anti partikel. Pada materi yang termampatkan (*dense matter*), ekstraksi ini dapat merambat melalui interaksi dari unsur-unsurnya (elektron-elektron) (Horowitz 1991a).

RPA mengekspresikan propagator polarisasi sebagai suatu jumlah dari beberapa diagram Feynman, diagram-diagram ini adalah suatu himpunan bagian dari semua ring diagram, RPA mempertimbangkan beberapa *particle-hole* yang disajikan secara bersama-sama (simultan) (Fetter & Walecka 1971).

RPA dihitung dengan menggantikan polarisasi Π dengan polarisasi $\tilde{\Pi}$ yang didapat dari solusi persamaan Dyson.

Pada tulisan ini, selain korelasi RPA pada temperatur berhingga dihitung juga korelasi pada temperatur nol untuk perbandingan. Selain dari pada itu, karena didalam penurunan RPA terdapat unsur propagator interaksi elektromagnetik, maka koreksi massa photon efektif sudah dipertimbangkan disini.

Bentuk eksplisit dari korelasi RPA pada polarisasi-polarisasi adalah:

Untuk polarisasi transversal didapatkan

$$Im \delta \tilde{\Pi}_T = -\frac{1}{\epsilon_T} \chi_\gamma \Pi_T^I [2\Pi_T^R + \chi_\gamma (\Pi_T^{R^2} + \Pi_T^{I^2})],$$

Untuk polarisasi vektor-aksial didapatkan

$$Im \delta \tilde{\Pi}_{VA} = \frac{1}{\epsilon_T} (-\chi_\gamma) [(\Pi_{VA}^I \Pi_T^R + \Pi_{VA}^R \Pi_T^I) + \chi_\gamma \Pi_{VA}^I (\Pi_T^{R^2} + \Pi_T^{I^2})],$$

Untuk polarisasi aksial didapatkan

$$Im \delta \tilde{\Pi}_A = -\frac{2}{\epsilon_T} (1 + \chi_\gamma \Pi_T^R) \chi_\gamma \Pi_{VA}^R \Pi_{VA}^I + \frac{1}{\epsilon_T} \chi_\gamma^2 \Pi_T^I (\Pi_{VA}^{R^2} - \Pi_{VA}^{I^2}),$$

semuanya dengan,

$$\epsilon_T = (1 + \chi_\gamma \Pi_T^R)^2 + \chi_\gamma^2 \Pi_T^{I^2}.$$

Untuk polarisasi longitudinal didapatkan

$$Im \delta \tilde{\Pi}_L = \frac{1}{\epsilon_L} \bar{\chi}_\gamma \Pi_L^I [2\Pi_L^R - \bar{\chi}_\gamma (\Pi_L^{R^2} + \Pi_L^{I^2})],$$

dengan,

$$\epsilon_L = (1 - \bar{\chi}_\gamma \Pi_L^R)^2 + \bar{\chi}_\gamma^2 \Pi_L^{I^2}.$$

Penurunan persamaan-persamaan ini dapat dilihat pada lampiran I, yaitu persamaan (I.2), (I.3), (I.4) dan (I.6).

2.4.3 Jalan Bebas Rata-rata

Jalan bebas rata-rata neutrino dalam tulisan ini adalah jarak terdekat dimana neutrino dapat berinteraksi dengan elektron, dan besarnya berbanding terbalik dengan penampang lintang total $\left(\frac{1}{\lambda} \equiv \sigma \right)$.

Untuk perhitungan dipergunakan integral ganda dan sebagai variabel integrasi adalah momentum transfer $(|\vec{q}|)$ dan energi transfer (q_0) .

Jalan bebas rata-rata (λ) sebagai fungsi dari energi awal neutrino (E_v) pada suatu kerapatan tertentu ditunjukkan dengan (Reddy, Prakash & Latimer 1998, Niembro, R., et al. 2001, Sulaksono, Hutauruk & Mart 2005),

$$\frac{1}{\lambda(E_v)} = \int_{|q_0|}^{2E_v - q_0} d|\vec{q}| \int_{-\infty}^{E_v} dq_0 \frac{|\vec{q}|}{E'_v E_v} 2\pi \frac{d^3\sigma}{V d^2\Omega' dE'_v}. \quad (2.22)$$

Persamaan (2.22) identik dengan persamaan jalan bebas rata-rata ketika $T = 0$ MeV, tetapi dengan koreksi pada batas-batas integrasinya.

Bab 3

Hasil dan Pembahasan

Dalam bab ini akan ditampilkan hasil perhitungan dan pembahasan dari penampang lintang diferensial dan jalan bebas rata-rata interaksi neutrino dengan materi yang tersusun dari elektron-elektron, untuk $T \neq 0$ MeV.

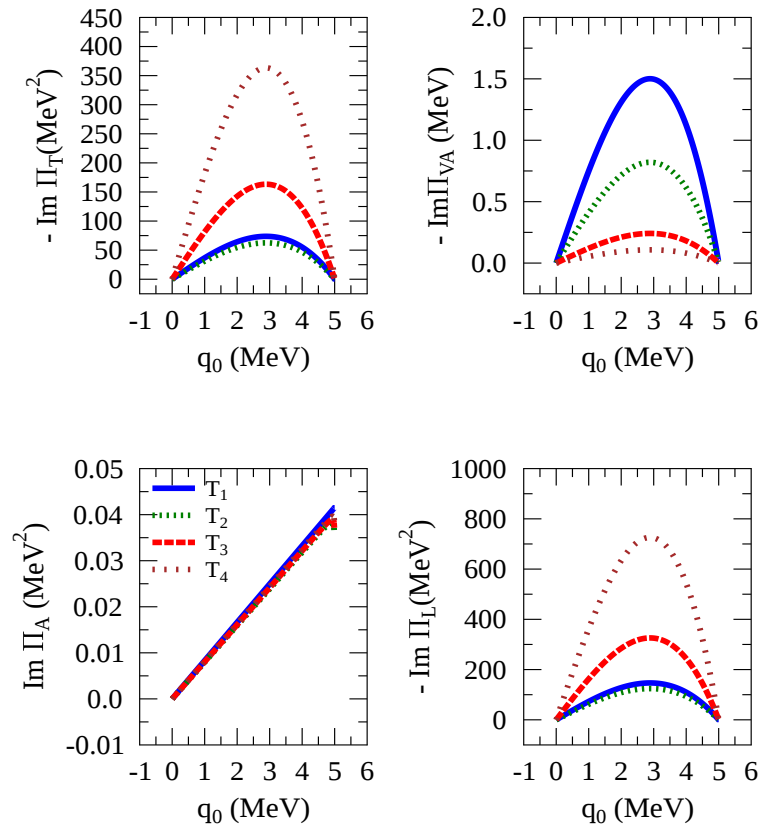
Hasil perhitungan numerik akan disajikan dalam bentuk grafis kemudian hasilnya dianalisa. Secara garis besar analisa yang dilakukan meliputi : polarisasi longitudinal, transversal, aksial dan vektor aksial, tampang lintang diferensial dan jalan bebas rata-rata.

Bab ini akan dibagi menjadi 3 sub bab, yaitu yang pertama hasil-hasil berdasarkan pendekatan respon linier (LR), kedua efek *random phase approximation* (RPA) dan massa photon efektif (MPE) pada penampang lintang diferensial dan jalan bebas rata-rata neutrino dimateri. Sedangkan yang terakhir, aplikasi perhitungan interaksi neutrino dengan materi elektron di atmosfir supernova juga akan dibahas.

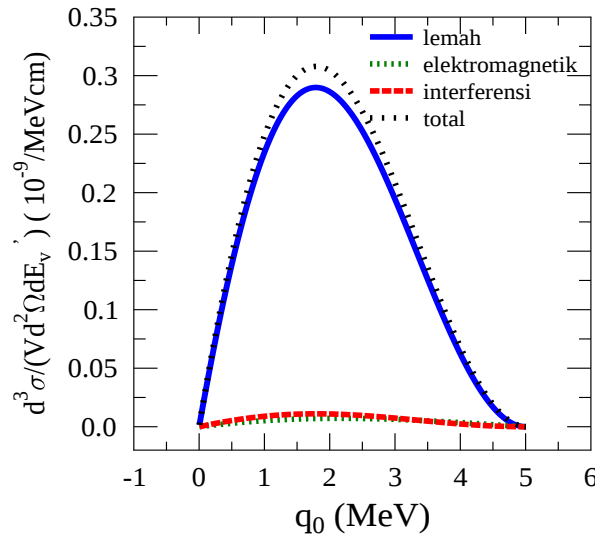
3.1 Pendekatan Respon Linier (*linear response*)

Yang dimaksud dengan pendekatan respon linier pada interaksi neutrino dengan materi elektron adalah elektron-elektron dimateri diasumsikan bebas atau tidak berkorelasi satu sama lain atau dengan kata lain korelasi RPA dan MPE karena medium diabaikan.

Pertama akan dibahas pengaruh variasi energi transfer (q_0) terhadap keempat polarisasi (Π_L , Π_T , Π_A dan Π_{VA}), gambar 3.1 adalah bagian imajiner dari polarisasi gas elektron pada kerapatan yang tetap untuk tempe-



Gambar 3.1: Perbandingan polarisasi longitudinal (Π_L), transversal (Π_T), aksial (Π_A), dan vektor-aksial (Π_{VA}) untuk kerapatan elektron tetap tetapi dengan temperatur bervariasi. ($T_1 = 0$ MeV, $\mu_1 = 50$ MeV, $T_2 = 20$ MeV, $\mu_2 = 26.79$ MeV, $T_3 = 40$ MeV, $\mu_3 = 7.88$ MeV, $T_4 = 60$ MeV, $\mu_4 = 3.52$ MeV, $E_v = 10$ MeV, $|\vec{q}| = 5$ MeV).



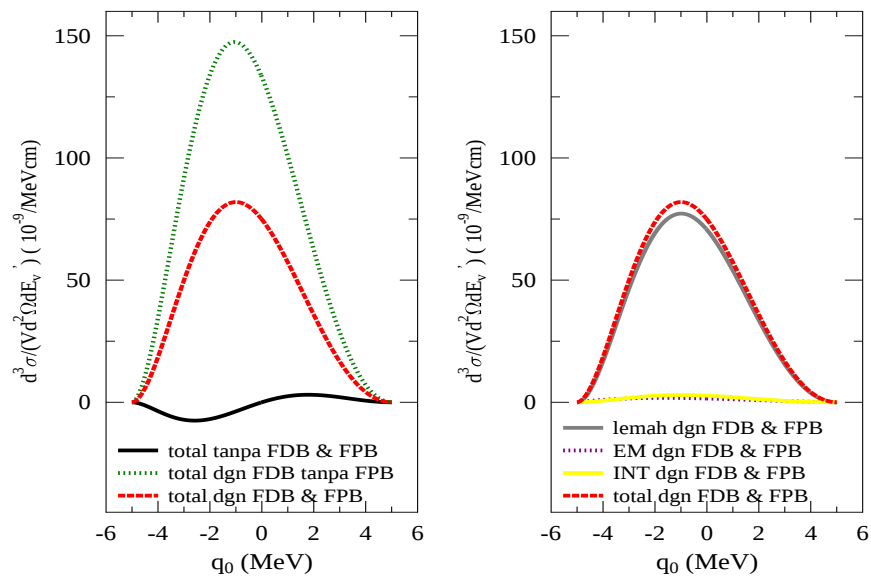
Gambar 3.2: Perbandingan penampang lintang diferensial interaksi lemah, elektromagnetik, interferensi dan total untuk $T = 0$ MeV. ($\mu = 50$ MeV, $|\vec{q}| = 5$ MeV, $E_v = 10$ MeV, $R_\nu = 5 \cdot 10^{-6}$ MeV $^{-1}$, $\mu_\nu = 10^{-10} \mu_B$).

ratur yang berbeda.

Pada polarisasi longitudinal (Π_L) dan transversal (Π_T), untuk temperatur rendah responnya turun tetapi pada temperatur tinggi responnya naik. Tetapi pada polarisasi vektor-aksial (Π_{VA}) responnya terus menurun dengan naiknya temperatur. Pada polarisasi aksial (Π_A) didapat tidak adanya perubahan yang signifikan terhadap kenaikan temperatur. Sehingga dapat disimpulkan bahwa variasi temperatur hanya mempengaruhi polarisasi longitudinal, transversal dan vektor-aksial terhadap variasi energi transfer.

Untuk perbandingan, pada gambar 3.2 disajikan penampang lintang diferensial untuk $T = 0$ MeV (Caroline 2004), tampak untuk $R_\nu = 5 \cdot 10^{-6}$ MeV $^{-1}$ dan $\mu_\nu = 10^{-10} \mu_B$ efek faktor bentuk elektromagnetik dari neutrino pada penampang lintang diferensial hamburan neutrino terhadap materi elektron tidak signifikan.

Gambar 3.3 adalah penampang lintang diferensial neutrino ketika berinteraksi dengan gas elektron untuk temperatur $T = 40$ MeV, dibedakan



Gambar 3.3: Perbandingan penampang lintang diferensial interaksi lemah, elektromagnetik, interferensi dan total untuk $T = 40$ MeV. ($\mu = 7,88$ MeV, $|\vec{q}| = 5$ MeV, $E_\nu = 10$ MeV, $R_\nu = 5 \cdot 10^{-6}$ MeV $^{-1}$, $\mu_\nu = 10^{-10} \mu_B$). FDB : Faktor detailed balance, FPB : Faktor Pauli blocking.

untuk interaksi lemah , elektromagnetik dan interferensi . Untuk temperatur berhingga ($T > 0$ MeV), ada beberapa faktor harus dipertimbangkan yaitu faktor retardasi, Pauli blocking dan detail balans.

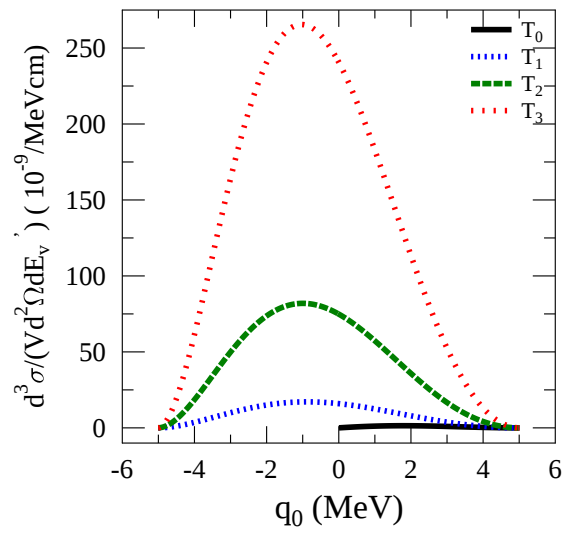
Untuk bagian sebelah kiri gambar 3.3, garis (hitam) menunjukkan pengaruh faktor retardasi, garis titik-titik (hijau) menunjukkan pengaruh faktor detail balans dan garis putus-putus (merah) menunjukkan pengaruh faktor Pauli blocking. Tampak jelas faktor detail balans menaikkan besarnya penampang lintang diferensial, sedangkan faktor Pauli blocking menurunkan besarnya penampang lintang diferensial. Secara umum kedua faktor ini menaikkan besarnya harga penampang lintang diferensial. Sehingga jika temperatur naik maka penampang lintang diferensial hamburan neutrino elektron dimedium juga naik.

Sedangkan bagian sebelah kanan gambar 3.3, diperlihatkan kontribusi dari masing-masing interaksi (lemah, elektromagnetik dan interferensi). Dapat dilihat bahwa interaksi lemah mempunyai kontribusi paling besar, ini sesuai dengan *Standard Model* bahwa interaksi neutrino didominasi interaksi lemah. Tetapi ternyata ada kontribusi lain yaitu interaksi elektromagnetik dan interferensi yang diakibatkan faktor bentuk elektromagnetik neutrino, meskipun pengaruhnya tidak signifikan interaksi lemah. Hal ini sesuai dengan apa yang diperoleh pada $T = 0$ MeV.

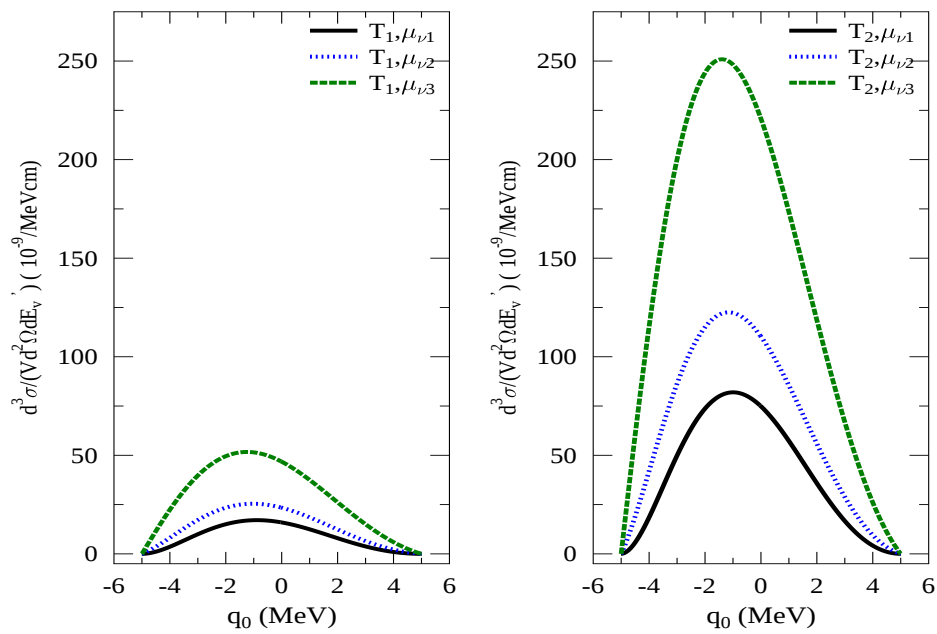
Untuk gambar-gambar selanjutnya disajikan penampang lintang diferensial total saja, dimana faktor-faktor retardasi, Pauli blocking dan detailed balance sudah diperhitungkan.

Gambar 3.4 menunjukkan penampang lintang diferensial neutrino dengan bervariasi temperatur. Jelas terlihat penampang lintang diferensial hamburan neutrino elektron dimateri sangat sensitif terhadap kenaikan temperatur. Hal ini dikarenakan polarisasi longitudinal dan transversal yang memberikan kontribusi pada penampang lintang hamburan neutrino dengan materi elektron sangat sensitif terhadap kenaikan temperatur (gambar 3.1). Untuk aplikasi pada atmosfer supernova nanti akan dipakai temperatur maksimum 20 MeV atau sekitar $3 \cdot 10^{11}$ K.

Gambar 3.5 menunjukkan pengaruh variasi momen dipol neutrino (μ_ν)

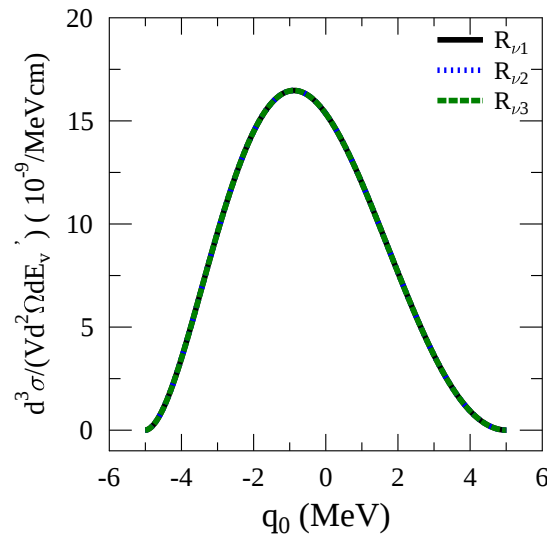


Gambar 3.4: Perbandingan penampang lintang diferensial ($T_0 = 0$ MeV, $\mu_0 = 50$ MeV, $T_1 = 20$ MeV, $\mu_1 = 26,79$ MeV, $T_2 = 40$ MeV, $\mu_2 = 7,88$ MeV, $T_3 = 60$ MeV, $\mu_3 = 3,52$ MeV, $|\vec{q}| = 5$ MeV, $E_v = 10$ MeV, $R_\nu = 5 \cdot 10^{-6}$ MeV $^{-1}$, $\mu_\nu = 10^{-10} \mu_B$).



Gambar 3.5: Perbandingan penampang lintang diferensial ($T_1 = 20$ MeV, $\mu_1 = 26, 79$ MeV, $T_2 = 40$ MeV, $\mu_2 = 7.88$ MeV, $|\vec{q}| = 5$ MeV, $E_v = 10$ MeV, $R_\nu = 5.10^{-6}$ MeV $^{-1}$, $\mu_{\nu 1} = 10^{-10} \mu_B$, $\mu_{\nu 2} = 5.10^{-10} \mu_B$, $\mu_{\nu 3} = 10^{-9} \mu_B$).

dengan satuan magneton Bohr (μ_B), untuk temperatur yang berbeda. Disini terlihat pengaruh momen dipol neutrino sangat signifikan baik untuk temperatur rendah maupun temperatur tinggi. Efek ini menjadi semakin besar jika temperatur materi naik.

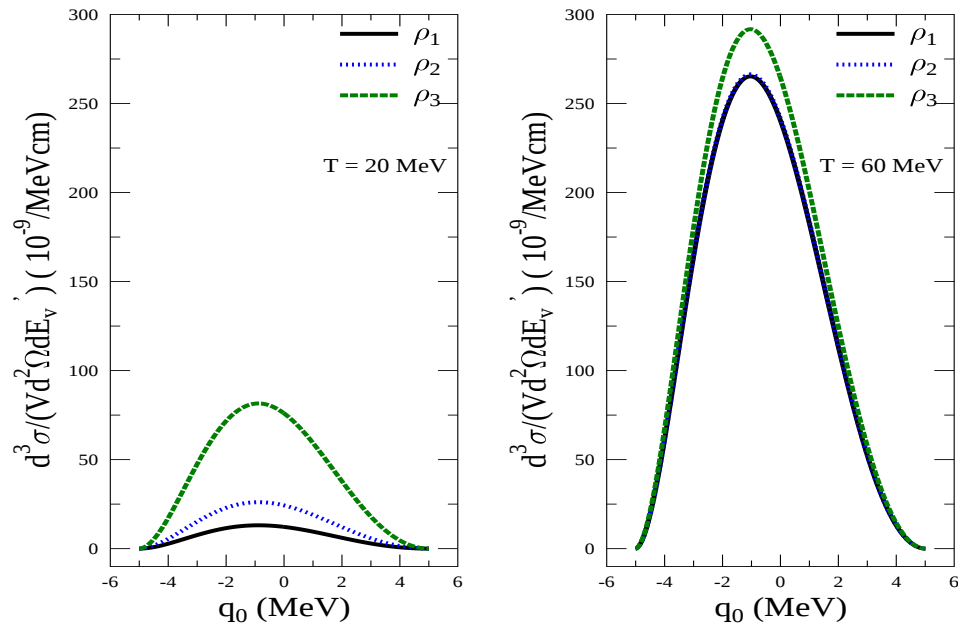


Gambar 3.6: Perbandingan penampang lintang diferensial ($T = 20$ MeV, $\mu = 26,79$ MeV, $|\vec{q}| = 5$ MeV, $E_v = 10$ MeV, $\mu_\nu = 10^{-10}\mu_B$, $R_{\nu1} = 10^{-9}$ MeV $^{-1}$, $R_{\nu2} = 10^{-11}$ MeV $^{-1}$, $R_{\nu3} = 10^{-12}$ MeV $^{-1}$).

Gambar 3.6 menunjukkan pengaruh variasi jari-jari muatan neutrino (R_ν). Dari grafik terlihat penampang lintang diferensial neutrino tidak sensitif terhadap perubahan jari-jari muatan neutrino R_ν . Sehingga dapat disimpulkan, pengaruh jari-jari muatan neutrino tidak memberikan efek yang signifikan terhadap penampang lintang, hal ini konsisten dengan apa yang didapat pada kasus $T = 0$ MeV (Caroline 2004).

Gambar 3.7 membahas pengaruh kerapatan jumlah elektron (ρ) untuk temperatur berbeda lihat tabel 3.1 (keterangan : μ adalah potensial kimia elektron).

Disini terlihat dengan jelas pengaruh kerapatan elektron sangat signifikan

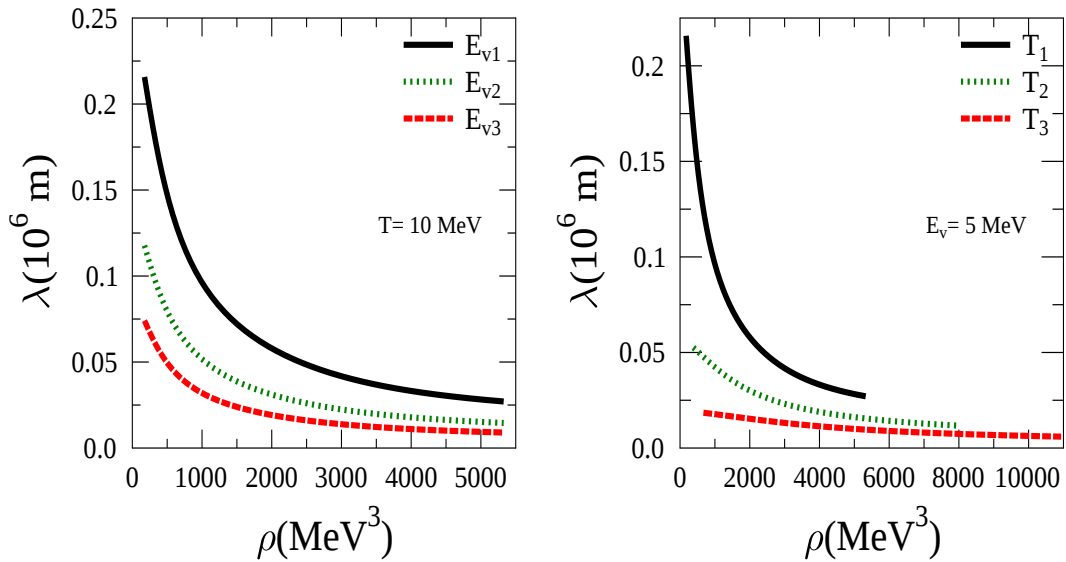


Gambar 3.7: Perbandingan tampang lintang dengan variasi kerapatan elektron ($\rho_1 = 2112,713 \text{ MeV}^3$, $\rho_2 = 8450,852 \text{ MeV}^3$, $\rho_3 = 42254,26 \text{ MeV}^3$, $|\vec{q}| = 5 \text{ MeV}$, $E_v = 10 \text{ MeV}$, $R_\nu = 5 \cdot 10^{-6} \text{ MeV}^{-1}$, $\mu_\nu = 10^{-10} \mu_B$).

T (MeV)	ρ (MeV ³)	μ (MeV)
20	2112.713	15.6585
20	8450.852	42.1981
20	42254.260	91.6130
60	2112.713	1.7626
60	8450.852	7.0414
60	42254.260	34.1384

Tabel 3.1: Tabel variasi kerapatan dan potensial kimia elektron.

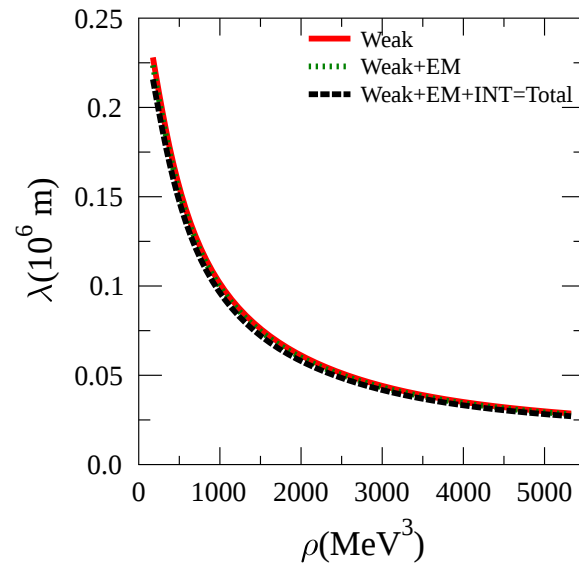
terutama justru untuk temperatur rendah pada penampang lintang diferensial hamburan neutrino terhadap materi elektron.



Gambar 3.8: Jalan bebas rata-rata neutrino interaksi total terhadap kepadatan elektron dengan variasi temperatur dan energi neutrino datang ($T_1 = 10$ MeV, $T_2 = 15$ MeV, $T_3 = 20$ MeV, $E_{v1} = 5$ MeV, $E_{v2} = 7,5$ MeV, $E_{v3} = 10$ MeV, $\mu_\nu = 10^{-10} \mu_B$, $R_\nu = 5 \cdot 10^{-6} \text{ MeV}^{-1}$).

Pada gambar 3.8 dan 3.9, jalan bebas rata-rata neutrino ketika berinteraksi dengan gas elektron sebagai fungsi kepadatan elektron diberikan.

Sebelah kiri gambar 3.8 ditunjukkan variasi energi neutrino datang sedangkan sebelah kanan sebagai variasi temperatur. Dari gambar-gambar tersebut dapat disimpulkan bahwa semakin besar energi neutrino datang dan temperatur, semakin kecil jalan bebas rata-ratanya. Hal ini dapat dimengerti, karena semakin besar energinya atau temperaturnya maka semakin sering neutrino berinteraksi dengan elektron sehingga penampang lintang total hamburannya naik. Padahal kita tahu jalan bebas rata-rata neutrino di materi berbanding terbalik dengan penampang lintang total. Kenyataan semakin besar temperaturnya semakin besar penampang lintang diferensial dapat dilihat pada gambar 3.4.



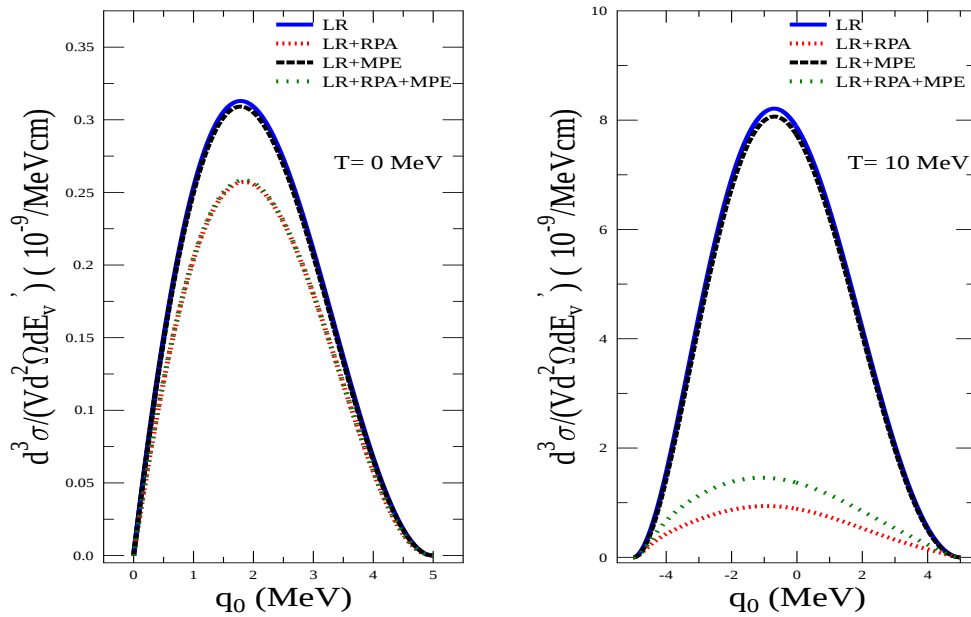
Gambar 3.9: Jalan bebas rata-rata neutrino interaksi total, lemah (Weak), lemah + elektromagnetik (Weak + EM), terhadap kerapatan elektron ($T = 10 \text{ MeV}$, $E_\nu = 5 \text{ MeV}$, $\mu_\nu = 10^{-10} \mu_B$, $R_\nu = 5 \cdot 10^{-6} \text{ MeV}^{-1}$).

Gambar 3.9 ditunjukkan pengaruh interaksi-interaksi lemah, elektromagnetik dan total Seperti yang kita harapkan tampak interaksi elektromagnetik dan interferensi tidak memberikan kontribusi yang signifikan terhadap jalan bebas rata-rata neutrino di materi elektron, meski temperaturnya tidak nol.

3.2 *Random Phase Approximation* dan Massa Photon Efektif

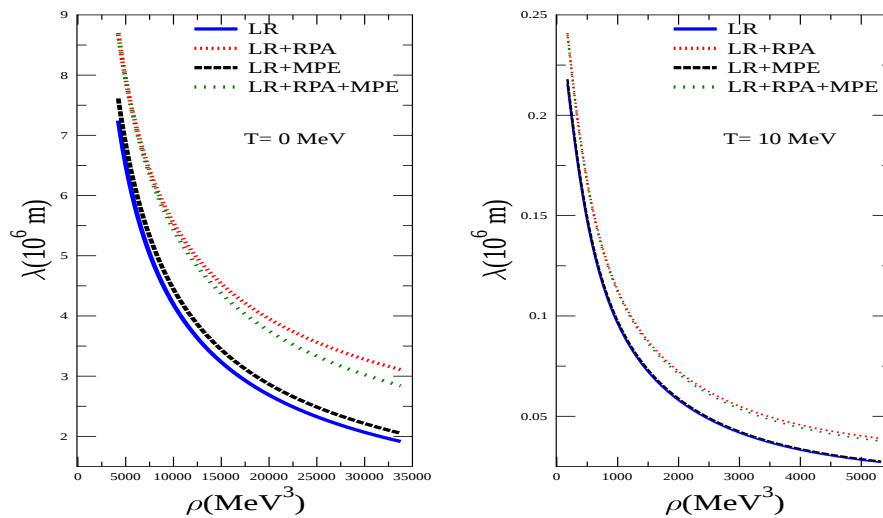
Pada bagian ini akan dipelajari efek-efek dari korelasi RPA yang merupakan harga pendekatan pada polarisasi elektron ketika semua ring diagram, dalam diagram Feynman dipertimbangkan, dan faktor MPE karena efek medium, yang menyatakan bahwa ketika photon (sebagai pembawa interaksi elektromagnetik) berada dalam lingkungan gas elektron, maka photon tidak lagi bermasa nol. Hasilnya dibandingkan dengan perhitungannya yang hanya menggunakan pendekatan respon linier.

MPE mempengaruhi besar propagator interaksi elektromagnetik, jadi selain mempengaruhi penampang lintang, lihat persamaan 2.10, MPE juga mempengaruhi RPA, karena didalam persamaan RPA terdapat juga propagator interaksi elektromagnetik, lihat persamaan I.1.



Gambar 3.10: Perbandingan penampang lintang diferensial untuk respon linier, random phase approximation dan massa photon efektif pada $E_v = 10$ MeV, $R_\nu = 5 \cdot 10^{-6} \text{ MeV}^{-1}$ dan $\mu_\nu = 10^{-10} \mu_B$.

Gambar 3.10 sebelah kiri ($T = 0$ MeV) memperlihatkan korelasi RPA menurunkan penampang lintang diferensial sampai sekitar 20 %, sedangkan gambar sebelah kanan ($T = 10$ MeV) korelasi RPA menurunkan penampang lintang hampir mencapai 80 % dari penampang lintang dihitung dengan pendekatan linier respon. Ini artinya korelasi RPA terhadap penampang lintang diferensial sangat signifikan untuk temperatur berhingga. Sedangkan pengaruh MPE tidak terlalu signifikan baik untuk $T = 0$ MeV maupun untuk $T = 10$ MeV dibandingkan efek RPA. Tetapi dengan naiknya temperatur efek MPE sedikit demi sedikit muncul.



Gambar 3.11: Perbandingan jalan bebas rata-rata untuk respon linier, random phase approximation dan massa photon efektif pada $E_v = 10$ MeV, $R_\nu = 5.10^{-6} \text{ MeV}^{-1}$ dan $\mu_\nu = 10^{-10} \mu_B$.

Gambar 3.11 memperlihatkan efek korelasi RPA dan MPE dalam menaikkan jalan bebas rata-rata. Pengaruh MPE pada jalan bebas rata-rata neutrino tampak lebih nyata untuk $T = 0$ MeV dibandingkan $T = 10$ MeV, karena pada T lebih besar jalan bebas rata-rata neutrino menjadi lebih kecil.

3.3 Aplikasi pada Atmosfir Supernova

Seperti yang telah kita ketahui bersama bahwa simulasi dari dinamika supernova yang ada saat ini cocok dengan tahapan-tahapan awal dari mekanisme supernova, tetapi tidak mampu menjelaskan ledakan supernova sehingga tampaknya masih ada beberapa fisika yang hilang yang perlu diselidiki (Keil 2003). Transport neutrino merupakan input yang sangat krusial dari simulasi dinamika supernova. Semua jenis neutrino dari berbagai *flavour* dipancarkan oleh bintang neutron yang terbentuk melalui ledakan supernova. Bahkan jika pada proses masih ada cukup kelimpahan proton, maka sebagian neutrino akan terperangkap dalam inti bintang. Hal ini terjadi jika jalan bebas rata-rata neutrino di bintang lebih pendek dibanding jari-jari bintang. Disisi lain efek dari propagasi neutrino melalui atmosfer supernova juga tidak dapat diabaikan pada simulasi mekanisme supernova yang realistik. Sehingga pada sub bab ini akan dipelajari dan dihitung jalan bebas rata-rata neutrino pada atmosfer supernova.

Karena temperatur di atmosfer supernova tidak dapat dikatakan nol dan karena massa elektron cukup kecil dibandingkan massa proton dan neutron, maka efek RPA dan MPE mungkin tidak dapat diabaikan. Hal ini akan menjadi fokus pada sub bab ini. Harga temperatur dan kerapatan elektron sebagai fungsi jarak relatif terhadap permukaan inti supernova, diambil dari hasil simulasi Monte Carlo dari referensi (Keil 2003) baik berdasarkan pendekatan Newton maupun relativitas umum untuk perhitungan gravitasi pada supernova.

Data dari referensi (Keil 2003) dapat dilihat pada tabel 3.2 untuk hasil yang berdasarkan relativitas umum dan tabel 3.3 untuk hasil yang berdasarkan pendekatan Newton, dimana r & T adalah radius dan temperatur atmosfer supernova dan μ_e & μ_ν adalah potensial kimia elektron dan neutrino.

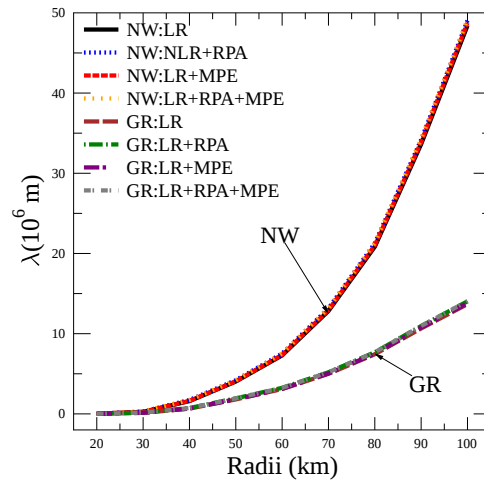
Pada gambar 3.12 diberikan perbandingan jalan bebas rata-rata terhadap jari-jari atmosfer supernova, baik untuk pendekatan respon linier maupun memperhitungkan koreksi RPA dan MPE, baik untuk kasus Newton maupun relativitas umum. Jelas tampak korelasi RPA dan MPE tidak signifikan untuk kasus ini. Hal ini tampaknya dikarenakan terutama karena renggangnya kerapatan elektron pada atmosfer supernova selain tidak konstan-

r (Km)	T (MeV)	μ_e (MeV)	μ_ν (MeV)
20	18.51	47.110	10.846
30	9.23	22.438	3.834
40	5.96	13.251	2.874
50	4.69	8.933	2.990
60	4.34	4.793	1.319
70	3.93	2.978	0.886
80	3.53	2.171	0.591
90	3.17	1.915	0.629
100	2.96	1.540	0.461

Tabel 3.2: Data : RadiiGR (Keil 2003).

r (Km)	T (MeV)	μ_e (MeV)	μ_ν (MeV)
20	15.99	52.231	15.393
30	7.10	20.493	2.891
40	4.24	12.077	3.185
50	3.79	5.052	0.886
60	3.50	2.477	0.614
70	3.03	1.606	0.628
80	2.64	1.278	0.748
90	2.29	1.085	0.810
100	2.06	0.947	0.865

Tabel 3.3: Data : RadiiNW (Keil 2003).



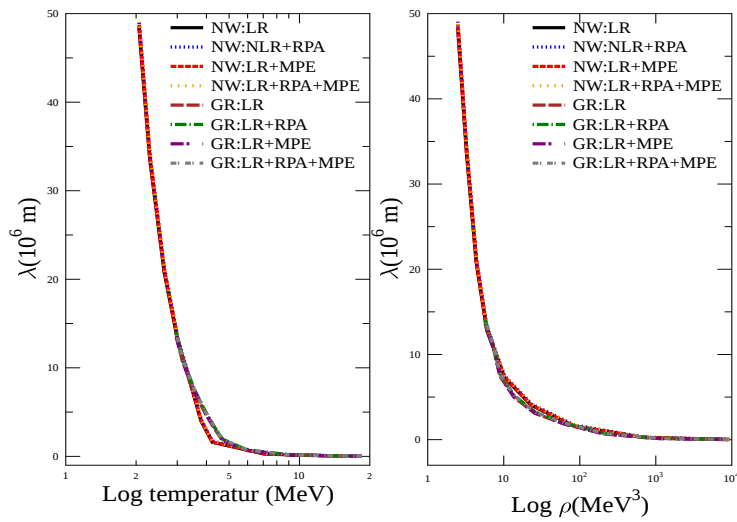
Gambar 3.12: Perbandingan jalan bebas rata-rata terhadap jari-jari atmosfer supernova untuk respon linier, random phase approximation dan massa photon efektif pada $E_\nu = 5 \text{ MeV}$, $R_\nu = 5 \cdot 10^{-6} \text{ MeV}^{-1}$ dan $\mu_\nu = 10^{-10} \mu_B$. Dengan data : RadiiNW dan RadiiGR.

nya temperatur dan kerapatan elektron terhadap perubahan jari-jari atmosfer supernova. Dilain pihak tampak jelas bahwa koreksi relativitas umum sangat signifikan.

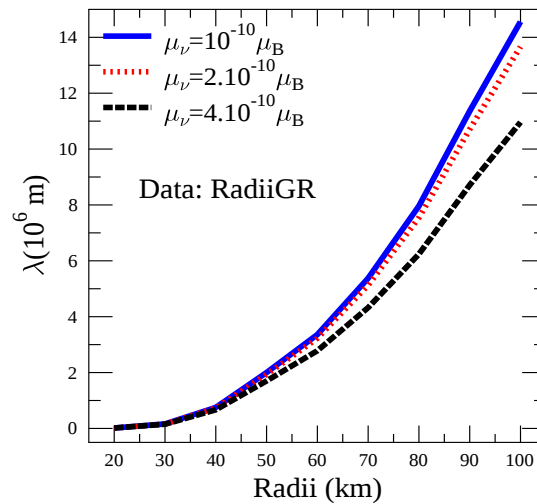
Pada panel sebelah kanan gambar 3.13 diberikan jalan bebas rata-rata sebagai fungsi temperatur pada atmosfer supernova, sedangkan pada panel sebelah kiri diberikan jalan bebas rata-rata sebagai fungsi kerapatan elektron pada atmosfer supernova. Tampak efek korelasi RPA, MPE dan relativitas umum tidak memberikan efek yang nyata pada kasus-kasus ini.

Pada gambar 3.14 diberikan efek momen dipol neutrino terhadap jalan bebas rata-rata neutrino pada atmosfer supernova. Jelas tampak bahwa jalan bebas rata-rata neutrino di atmosfer supernova cukup sensitif terhadap harga momen dipol neutrino.

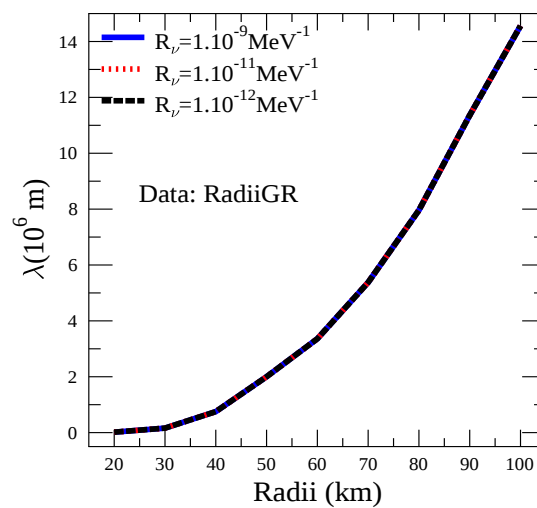
Sedangkan harga jari-jari muatan neutrino tidak memberikan pengaruh yang signifikan pada jalan bebas rata-rata neutrino pada atmosfer supernova. Hal ini dapat dilihat pada gambar 3.15.



Gambar 3.13: Perbandingan jalan bebas rata-rata pada atmosfer supernova terhadap temperatur dan kerapatan elektron pada $E_\nu = 5 \text{ MeV}$, $R_\nu = 5 \cdot 10^{-6} \text{ MeV}^{-1}$ dan $\mu_\nu = 10^{-10} \mu_B$.



Gambar 3.14: Perbandingan jalan bebas rata-rata terhadap jari-jari atmosfer supernova dengan variasi momen dipol neutrino pada $E_\nu = 5 \text{ MeV}$ dan $R_\nu = 0 \text{ MeV}^{-1}$.



Gambar 3.15: Perbandingan jalan bebas rata-rata terhadap jari-jari atmosfer supernova dengan variasi jari-jari muatan neutrino pada $E_\nu = 5 \text{ MeV}$ dan $\mu_\nu = 10^{-10} \mu_B$.

Bab 4

Kesimpulan

Pada bab ini akan diberikan kesimpulan pada tesis ini.

Pada pendekatan respon linier dapat kami simpulkan, pertama pada polarisasi, bahwa variasi temperatur terhadap energi transfer hanya mempengaruhi polarisasi longitudinal, transversal dan vektor-aksial. Untuk polarisasi aksial tidak ada perubahan signifikan terhadap perubahan temperatur.

Kemudian untuk penampang lintang diferensial, faktor detail balance dan Pauli blocking menaikkan besarnya harga penampang lintang diferensial. Ditinjau dari segi interaksi, dapat disimpulkan bahwa interaksi lemah yang mempunyai kontribusi paling besar, ini sesuai dengan standar model, tetapi kontribusi elektromagnetik dan interferensi tidak bisa diabaikan, walaupun pengaruhnya tidak signifikan interaksi lemah. Kemungkinan untuk pengembangan penelitian selanjutnya pengaruh interaksi akibat faktor bentuk ini bisa lebih diteliti dengan penambahan partikel, misal neutron dan proton ataupun partikel yang lain. Hal ini berguna untuk mempelajari interaksi neutrino dengan “core” dari supernova.

Penampang lintang diferensial sangat sensitif terhadap kenaikan temperatur, hal ini sesuai dengan kesimpulan tentang polarisasi, kenaikan temperatur mempengaruhi ketiga polarisasi dari empat polarisasi yang ada.

Pengaruh momen dipol magnet sangat sensitif terhadap penampang lintang diferensial, efek ini menjadi semakin besar jika temperatur materi naik. Sebaliknya penampang lintang diferensial tidak sensitif terhadap perubahan jari-jari muatan, hal ini juga sama dengan yang diperoleh pada penelitian temperatur nol sebelumnya (Caroline 2004).

Sedangkan untuk variasi kerapatan elektron, penampang lintang diferensial sangat sensitif terutama justru untuk temperatur yang rendah.

Kemudian untuk jalan bebas rata-rata, seperti kita ketahui besaran ini berbanding terbalik dengan penampang lintang diferensial, maka dari hasil penelitian disimpulkan bahwa semakin besar temperatur dan energi neutrino datang semakin kecil jalan bebas rata-rata neutrino. Dan sama seperti penampang lintang diferensial, pengaruh interaksi lemah yang paling dominan dan interaksi yang lain yaitu elektromagnetik dan interferensi tidak memberikan kontribusi yang cukup signifikan meski $T \neq 0$.

Selanjutnya pengaruh korelasi RPA menurunkan penampang lintang diferensial untuk temperatur nol maupun berhingga. Penurunan ini sangat signifikan untuk temperatur berhingga. Sedangkan pengaruh MPE tidak terlalu signifikan baik untuk temperatur nol maupun berhingga bila dibandingkan dengan efek RPA. Tetapi dengan naiknya temperatur efek MPE sedikit demi sedikit mulai muncul.

Efek korelasi RPA dan MPE menaikkan jalan bebas rata-rata. Pengaruh MPE pada jalan bebas rata-rata tampak lebih nyata untuk temperatur nol dibandingkan temperatur berhingga, karena pada temperatur lebih besar jalan bebas rata-rata menjadi lebih kecil.

Untuk aplikasi pada atmosfer supernova, jalan bebas rata-rata neutrino tidak sensitif terhadap pengaruh korelasi RPA dan MPE, baik untuk perhitungan Newton maupun relativitas umum untuk melukiskan gravitasi pada supernova. Hal ini tampaknya dikarenakan terutama karena renggangnya kerapatan elektron pada atmosfer supernova. Selain itu disebabkan juga karena tidak konstannya temperatur dan kerapatan elektron terhadap perubahan jari-jari atmosfer supernova.

Tetapi dilain pihak tampak jelas bahwa korelasi relativitas umum sangat signifikan efeknya.

Untuk variasi temperatur dan kerapatan elektron terhadap jalan bebas rata-rata neutrino, efek korelasi RPA, MPE dan relativitas umum tidak memberikan pengaruh yang nyata.

Akan tetapi jalan bebas rata-rata neutrino di atmosfer supernova cukup sen-

sitif terhadap harga momen dipol neutrino. Dan sama dengan kesimpulan yang sebelumnya untuk kasus T konstan/ μ_e konstan, harga jari-jari muatan neutrino tidak memberikan pengaruh yang signifikan pada jalan bebas rata-rata neutrino pada atmosfer supernova.

Lampiran A

Hamburan Neutrino dengan Elektron di Vakum

A.1 Kontribusi Interaksi Lemah

Matrik transisi interaksi lemah dari gambar 2.4 adalah,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_W &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}(p')\gamma_\mu(C_V + C_A\gamma^5)u(p) \bar{u}(k')\gamma^\mu(1 + \gamma^5)u(k), \\ \mathcal{M}_W^2 &= \left(\frac{G_F}{\sqrt{2}}\right)^2 \underbrace{[\bar{u}(p')\gamma_\mu(C_V + C_A\gamma^5)u(p)]^2}_{L_{\mu\nu}^{e(W)}} \underbrace{[\bar{u}(k')\gamma^\mu(1 + \gamma^5)u(k)]^2}_{L_\nu^{\mu\nu(W)}}, \\ &= \left(\frac{G_F}{\sqrt{2}}\right)^2 L_{\mu\nu}^{e(W)} L_\nu^{\mu\nu(W)},\end{aligned}\tag{A.1}$$

dengan e dan ν adalah elektron dan neutrino.

A.1.1 Tensor Elektron Interaksi Lemah

$$\begin{aligned}L_{\mu\nu}^{e(W)} &= [\bar{u}(p')\gamma_\mu(C_V + C_A\gamma^5)u(p)]^2, \\ &= [\bar{u}(p')\gamma_\mu(C_V + C_A\gamma^5)u(p)][\bar{u}(p')\gamma_\nu(C_V + C_A\gamma^5)u(p)]^*,\end{aligned}$$

dengan ketentuan,

$$\begin{aligned}
 \bar{u} &= u^\dagger \gamma^0, \\
 \gamma^{0\dagger} &= \gamma^0, \\
 (\gamma^0 \gamma_\mu)^\dagger &= \gamma_\mu^\dagger \gamma^{0\dagger} = \gamma_\mu^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma_\mu^\dagger, \\
 \gamma^{5\dagger} &= \gamma^5.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{\mu\nu}^{e(W)} &= [\bar{u}(p') \gamma_\mu (C_V + C_A \gamma^5) u(p)] [u^\dagger(p') \gamma_0 \gamma_\nu (C_V + C_A \gamma^5) u(p)]^\dagger, \\
 &= [u(p') \gamma_\mu (C_V + C_A \gamma^5) u(p)] [\bar{u}(p') \gamma_\nu^\dagger \gamma_0^\dagger (C_V + C_A \gamma^5) u^\dagger(p)], \\
 &= [\bar{u}(p') \gamma_\mu (C_V + C_A \gamma^5) u(p)] [u^\dagger(p) \gamma_0 \gamma_\nu (C_V + C_A \gamma^5) \bar{u}(p')], \\
 &= [u(p') \gamma_\mu (C_V + C_A \gamma^5) u(p)] [\bar{u}(p) \gamma_\nu (C_V + C_A \gamma^5) u(p')],
 \end{aligned}$$

kemudian dengan menggunakan *Casimir trick* (Halzen & Martin 1984, Kumerički 2001), unsur-unsurnya dijadikan komponen matrik,

$$L_{\mu\nu}^{e(W)} = \sum \bar{u}_\alpha(p') \gamma_\mu^{\alpha\beta} (C_V + C_A \gamma^5) u_\beta(p) \bar{u}_\gamma(p) \gamma_\nu^{\gamma\delta} (C_V + C_A \gamma^5) u_\delta(p'),$$

dan karena merupakan komponen matrik bukan komponen vektor, maka unsur-unsurnya bisa ditukar,

$$L_{\mu\nu}^{e(W)} = \sum u_\delta(p') \bar{u}_\alpha(p') \gamma_\mu^{\alpha\beta} (C_V + C_A \gamma^5) u_\beta(p) \bar{u}_\gamma(p) \gamma_\nu^{\gamma\delta} (C_V + C_A \gamma^5),$$

dengan menggunakan *completeness relations* didapatkan,

$$\begin{aligned}
 L_{\mu\nu}^{e(W)} &= \sum \underbrace{u_\delta(p') \bar{u}_\alpha(p')}_{(\not{p}' + m_e)_{\delta\alpha}} \gamma_\mu^{\alpha\beta} (C_V + C_A \gamma^5) \underbrace{u_\beta(p) \bar{u}_\gamma(p)}_{(\not{p} + m_e)_{\beta\gamma}} \gamma_\nu^{\gamma\delta} (C_V + C_A \gamma^5), \\
 L_{\mu\nu}^{e(W)} &= \sum (\not{p}' + m_e)_{\beta\gamma} \gamma_\mu^{\alpha\beta} (C_V + C_A \gamma^5) (\not{p} + m_e)_{\beta\gamma} \gamma_\nu^{\gamma\delta} (C_V + C_A \gamma^5),
 \end{aligned}$$

dijadikan bentuk Trace,

$$\begin{aligned}
 L_{\mu\nu}^{e(W)} &= \text{Tr}(\not{p}' + m_e) \gamma_\mu (C_V + C_A \gamma^5) (\not{p} + m_e) \gamma_\nu (C_V + C_A \gamma^5), \quad (\text{A.2}) \\
 &= \text{Tr}(\not{p}' + m_e) J_\mu^{e(W)} (C_V + C_A \gamma^5) (\not{p} + m_e) J_\nu^{e(W)},
 \end{aligned}$$

dimana J^e adalah vertex elektron interaksi lemah,

$$\begin{aligned} J_\mu^{e(W)} &= \gamma_\mu (C_V + C_A \gamma^5), \\ J_\nu^{e(W)} &= \gamma_\nu (C_V + C_A \gamma^5). \end{aligned}$$

Kemudian persamaan (A.2) dapat ditulis,

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}^{e(W)} &= C_V^2 \text{Tr}[(\not{p}' + m_e)\gamma_\mu(\not{p} + m_e)\gamma_\nu], \\ &+ 2C_V C_A \text{Tr}[(\not{p}' + m_e)\gamma_\mu(\not{p} + m_e)\gamma_\nu\gamma^5], \\ &+ 2C_A^2 \text{Tr}[(\not{p}' + m_e)\gamma_\mu\gamma^5(\not{p} + m_e)\gamma_\nu\gamma^5], \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

dan,

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}^{e(W)} &= C_V^2 \underbrace{\text{Tr}[(\not{p}' + m_e)\gamma_\mu(\not{p} + m_e)\gamma_\nu]}_{F_{\mu\nu}^V(p', p)}, \\ &+ 2C_V C_A \underbrace{\text{Tr}[(\not{p}' + m_e)\gamma_\mu(\not{p} + m_e)\gamma_\nu\gamma^5]}_{F_{\mu\nu}^{VA}(p', p)}, \\ &+ 2C_A^2 \underbrace{\text{Tr}[(\not{p}' + m_e)\gamma_\mu\gamma^5(\not{p} + m_e)\gamma_\nu\gamma^5]}_{F_{\mu\nu}^A(p', p)}. \end{aligned}$$

dengan, bagian vektor:

$$F_{\mu\nu}^V(p', p) = \text{Tr}[(\not{p}' + m_e)\gamma_\mu(\not{p} + m_e)\gamma_\nu], \quad (\text{A.4})$$

bagian vektor-aksial:

$$F_{\mu\nu}^{VA}(p', p) = \text{Tr}[(\not{p}' + m_e)\gamma_\mu(\not{p} + m_e)\gamma_\nu\gamma^5], \quad (\text{A.5})$$

bagian aksial:

$$F_{\mu\nu}^A(p', p) = \text{Tr}[(\not{p}' + m_e)\gamma_\mu\gamma^5(\not{p} + m_e)\gamma_\nu\gamma^5], \quad (\text{A.6})$$

dan $p' = p + q$.

Jadi bisa disimpulkan tensor elektron interaksi lemah terdiri dari bagian vektor, vektor-aksial dan aksial.

A.1.2 Tensor Neutrino Interaksi Lemah

$$\begin{aligned}
L_{\nu}^{\mu\nu(W)} &= [\bar{u}(k')\gamma^{\mu}(1 + \gamma 5)u(k)]^2, \\
&= [\bar{u}(k')\gamma^{\mu}(1 + \gamma 5)u(k)][\bar{u}(k')\gamma^{\nu}(1 + \gamma 5)u(k)]^*, \\
&= [\bar{u}(k')\gamma^{\mu}(1 + \gamma 5)u(k)][u^{\dagger}(k')\gamma^0\gamma^{\nu}(1 + \gamma 5)u(k)]^{\dagger}.
\end{aligned}$$

Dengan ketentuan yang sama seperti yang dipakai dibagian elektron maka didapatkan:

$$\begin{aligned}
L_{\nu}^{\mu\nu(W)} &= [\bar{u}(k')\gamma^{\mu}(1 + \gamma 5)u(k)][u(k')\gamma^{\nu\dagger}\gamma^0(1 + \gamma 5)u^{\dagger}(k)], \\
&= [\bar{u}(k')\gamma^{\mu}(1 + \gamma 5)u(k)][u(k')\gamma^0\gamma^{\nu}(1 + \gamma 5)u^{\dagger}(k)], \\
&= [\bar{u}(k')\gamma^{\mu}(1 + \gamma 5)u(k)][u^{\dagger}(k)\gamma^0\gamma^{\nu}(1 + \gamma 5)u(k')], \\
&= [\bar{u}(k')\gamma^{\mu}(1 + \gamma 5)u(k)][\bar{u}(k)\gamma^{\nu}(1 + \gamma 5)u(k')], \\
&= \sum \bar{u}_{\alpha}(k')\gamma_{\alpha\beta}^{\mu}(1 + \gamma 5)u_{\beta}(k)\bar{u}_{\gamma}(k)\gamma_{\gamma\delta}^{\nu}(1 + \gamma 5)u_{\delta}(k'), \\
&= \sum u_{\delta}(k')\bar{u}_{\alpha}(k')\gamma_{\alpha\beta}^{\mu}(1 + \gamma 5)u_{\beta}(k)\bar{u}_{\gamma}(k)\gamma_{\gamma\delta}^{\nu}(1 + \gamma 5),
\end{aligned}$$

maka,

$$\begin{aligned}
L_{\nu}^{\mu\nu(W)} &= Tr[(\not{k}' + m_{\nu})\gamma^{\mu}(1 + \gamma 5)(\not{k} + m_{\nu})\gamma^{\nu}(1 + \gamma 5)], \quad (A.7) \\
&= Tr[(\not{k}' + m_{\nu})J_{\nu}^{\mu(W)}(\not{k} + m_{\nu})J_{\nu}^{\nu(W)}],
\end{aligned}$$

dimana J_{ν} adalah vertex neutrino interaksi lemah,

$$\begin{aligned}
J_{\nu}^{\mu(W)} &= \gamma^{\mu}(1 + \gamma 5), \\
J_{\nu}^{\nu(W)} &= \gamma^{\nu}(1 + \gamma 5).
\end{aligned}$$

A.2 Kontribusi Interaksi Elektromagnetik

Matrik transisi interaksi elektromagnetik dari gambar 2.5 adalah,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{EM} &= \frac{4\pi\alpha}{q^2} \bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) \\
 &\quad \times \bar{u}(k') \left[f_{m\nu} \gamma^\mu + g_{1\nu} \gamma^\mu \gamma^5 - (f_{2\nu} + i g_{2\nu} \gamma^5) \frac{P^\mu}{2m_e} u(k) \right], \\
 \mathcal{M}_{EM}^2 &= \left(\frac{4\pi\alpha}{q^2} \right)^2 \underbrace{\left[\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) \right]^2}_{L_{\mu\nu}^{e(EM)}} \\
 &\quad \times \underbrace{\left\{ \bar{u}(k') \left[f_{m\nu} \gamma^\mu + g_{1\nu} \gamma^\mu \gamma^5 - (f_{2\nu} + i g_{2\nu} \gamma^5) \frac{P^\mu}{2m_e} u(k) \right] \right\}^2}_{L_\nu^{\mu\nu(EM)}}, \\
 &= \left(\frac{4\pi\alpha}{q^2} \right)^2 L_{\mu\nu}^{e(EM)} L_\nu^{\mu\nu(EM)}. \tag{A.8}
 \end{aligned}$$

A.2.1 Tensor Elektron Interaksi Elektromagnetik

$$\begin{aligned}
 L_{\mu\nu}^{e(EM)} &= \left[\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) \right]^2, \\
 &= \left[\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) \right] \left[\bar{u}(p') \gamma_\nu u(p) \right]^*,
 \end{aligned}$$

dengan penurunan yang sama dengan pada bagian interaksi lemah, akhirnya didapatkan,

$$\begin{aligned}
 L_{\mu\nu}^{e(EM)} &= \text{Tr}[(\not{p}' + m_e) \gamma_\mu (\not{p} + m_e) \gamma_\nu], \\
 &= \text{Tr}[(\not{p}' + m_e) J_\mu^e (\not{p} + m_e) J_\nu^e], \tag{A.9}
 \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
 J_\mu^e &= \gamma_\mu, \\
 J_\nu^e &= \gamma_\nu.
 \end{aligned}$$

Persamaan (A.9) dapat dituliskan,

$$L_{\mu\nu}^{e(EM)} = \underbrace{\text{Tr}[(\not{p}' + m_e) \gamma_\mu (\not{p} + m_e) \gamma_\nu]}_{F_{\mu\nu}^V}.$$

Jadi bisa disimpulkan tensor elektron interaksi elektromagnetik terdiri dari bagian vektor saja.

A.2.2 Tensor Neutrino Interaksi Elektromagnetik

$$\begin{aligned}
 L_{\nu}^{\mu\nu(EM)} &= \left\{ \bar{u}(k') \left[f_{m\nu} \gamma^{\mu} + g_{1\nu} \gamma^{\mu} \gamma^5 - (f_{2\nu} + i g_{2\nu} \gamma^5) \frac{P^{\mu}}{2m_e} u(k) \right] \right\}^2 \\
 &= \left\{ \bar{u}(k') \left[f_{m\nu} \gamma^{\mu} + g_{1\nu} \gamma^{\mu} \gamma^5 - (f_{2\nu} + i g_{2\nu} \gamma^5) \frac{P^{\mu}}{2m_e} u(k) \right] \right\} \\
 &\times \left\{ \bar{u}(k') \left[f_{m\nu} \gamma^{\nu} + g_{1\nu} \gamma^{\nu} \gamma^5 - (f_{2\nu} + i g_{2\nu} \gamma^5) \frac{P^{\nu}}{2m_e} u(k) \right] \right\}^*
 \end{aligned}$$

dengan penurunan yang sama dengan pada bagian interaksi lemah, akhirnya didapatkan,

$$\begin{aligned}
 L_{\nu}^{\mu\nu(EM)} &= Tr \left\{ (\not{k}' + m_{\nu}) \left[f_{m\nu} \gamma^{\mu} + g_{1\nu} \gamma^{\mu} \gamma^5 - (f_{2\nu} + i g_{2\nu} \gamma^5) \frac{P^{\mu}}{2m_e} \right] \right. \\
 &\quad \times (\not{k} + m_{\nu}) \left[f_{m\nu} \gamma^{\nu} + g_{1\nu} \gamma^{\nu} \gamma^5 - (f_{2\nu} + i g_{2\nu} \gamma^5) \frac{P^{\nu}}{2m_e} \right] \left. \right\} \quad (A.10)
 \end{aligned}$$

atau

$$L_{\nu}^{\mu\nu(EM)} = Tr[(\not{k}' + m_{\nu}) J_{\nu}^{\mu} (\not{k} + m_{\nu}) J_{\nu}^{\nu},$$

dengan

$$\begin{aligned}
 J_{\nu}^{\mu} &= \left[f_{m\nu} \gamma^{\mu} + g_{1\nu} \gamma^{\mu} \gamma^5 - (f_{2\nu} + i g_{2\nu} \gamma^5) \frac{P^{\mu}}{2m_e} \right], \\
 J_{\nu}^{\nu} &= \left[f_{m\nu} \gamma^{\nu} + g_{1\nu} \gamma^{\nu} \gamma^5 - (f_{2\nu} + i g_{2\nu} \gamma^5) \frac{P^{\nu}}{2m_e} \right].
 \end{aligned}$$

A.3 Kontribusi Interferensi

Matrik transisi interferensi dari persamaan (2.6) dan (2.7) adalah,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{EM} \mathcal{M}_W^* &= \frac{4\pi\alpha}{q^2} \bar{u}(p') \gamma_{\mu} u(p) \\
 &\times \bar{u}(k') \left[f_{m\nu} \gamma^{\mu} + g_{1\nu} \gamma^{\mu} \gamma^5 - (f_{2\nu} + i g_{2\nu} \gamma^5) \frac{P^{\mu}}{2m_e} u(k) \right] \\
 &\times \left[\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}(p') \gamma_{\mu} (C_V + C_A \gamma^5) u(p) \bar{u}(k') \gamma^{\mu} (1 + \gamma^5) u(k) \right]^*.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_W \mathcal{M}_{EM}^* &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}(p') \gamma_\mu (C_V + C_A \gamma^5) u(p) \bar{u}(k') \gamma^\mu (1 + \gamma^5) u(k) \\
&\times \left\{ \frac{4\pi\alpha}{q^2} \bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) \right. \\
&\times \left. \bar{u}(k') \left[f_{m\nu} \gamma^\mu + g_{1\nu} \gamma^\mu \gamma^5 - (f_{2\nu} + i g_{2\nu} \gamma^5) \frac{P^\mu}{2m_e} u(k) \right] \right\}^*.
\end{aligned}$$

Kedua faktor bisa dianggap sama, maka

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_{EM} \mathcal{M}_W^* + \mathcal{M}_W \mathcal{M}_{EM}^* = \\
&= 2 \left(\frac{4\pi\alpha}{q^2} \right) \left(\frac{G_F}{\sqrt{2}} \right) \underbrace{\left[\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) \right] \left[\bar{u}(p') \gamma_\mu (C_V + C_A \gamma^5) u(p) \right]^*}_{L_{\mu\nu}^{e(INT)}} \\
&\times \underbrace{\left[\bar{u}(k') \gamma^\mu (1 + \gamma^5) u(k) \right] \left\{ \bar{u}(k') \left[f_{m\nu} \gamma^\mu + g_{1\nu} \gamma^\mu \gamma^5 - (f_{2\nu} + i g_{2\nu} \gamma^5) \frac{P^\mu}{2m_e} u(k) \right] \right\}^*}_{L_{\nu}^{\mu\nu(INT)}} \\
&= \frac{8G_F \pi \alpha}{q^2 \sqrt{2}} L_{\mu\nu}^{e(INT)} L_{\nu}^{\mu\nu(INT)}. \tag{A.11}
\end{aligned}$$

A.3.1 Tensor Elektron Interferensi

$$L_{\mu\nu}^{e(INT)} = \left[\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) \right] \left[\bar{u}(p') \gamma_\mu (C_V + C_A \gamma^5) u(p) \right]^*$$

dengan penurunan yang sama dengan pada bagian interaksi lemah, akhirnya didapatkan,

$$\begin{aligned}
L_{\mu\nu}^{e(INT)} &= Tr[(\not{p}' + m_e) \gamma_\mu (C_V + C_A \gamma^5) (\not{p} + m_e) \gamma_\nu], \tag{A.12} \\
&= Tr[(\not{p}' + m_e) J_\mu^e (\not{p} + m_e) J_\nu^e],
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
J_\mu^e &= \gamma_\mu (C_V + C_A \gamma^5), \\
J_\nu^e &= \gamma_\nu.
\end{aligned}$$

Kemudian persamaan (A.12) dapat ditulis,

$$\begin{aligned}
L_{\mu\nu}^{e(INT)} &= C_V Tr[(\not{p}' + m_e) \gamma_\mu + (\not{p} + m_e) \gamma_\nu] \\
&+ C_A Tr[(\not{p}' + m_e) \gamma_\mu \gamma^5 + (\not{p} + m_e) \gamma_\nu] \tag{A.13}
\end{aligned}$$

dan,

$$L_{\mu\nu}^{e(INT)} = C_V \underbrace{Tr[(\not{p}' + m_e)\gamma_\mu + (\not{p} + m_e)\gamma_\nu]}_{F_{\mu\nu}^V} + C_A \underbrace{Tr[(\not{p}' + m_e)\gamma_\mu\gamma^5 + (\not{p} + m_e)\gamma_\nu]}_{F_{\mu\nu}^{VA}}.$$

Jadi bisa disimpulkan tensor elektron interferensi terdiri dari bagian vektor dan vektor aksial.

A.3.2 Tensor Neutrino Interferensi

$$L_{\nu}^{\mu\nu(INT)} = \left[\bar{u}(k')\gamma^\mu(1 + \gamma^5)u(k) \right] \times \bar{u}(k') \left[f_{m\nu}\gamma^\mu + g_{1\nu}\gamma^\mu\gamma^5 - (f_{2\nu} + ig_{2\nu}\gamma^5)\frac{P^\mu}{2m_e} \right]^*,$$

dengan penurunan yang sama dengan pada bagian interaksi lemah, akhirnya didapatkan,

$$\begin{aligned} L_{\nu}^{\mu\nu(INT)} &= Tr[(\not{k}' + m_\nu)\gamma^\mu(1 + \gamma^5)(\not{k} + m_\nu) \\ &\quad \times \left[f_{m\nu}\gamma^\mu + g_{1\nu}\gamma^\mu\gamma^5 - (f_{2\nu} + ig_{2\nu}\gamma^5)\frac{P^\mu}{2m_e} \right]], \quad (A.14) \\ &= Tr[(\not{k}' + m_\nu)J_\nu^\mu(\not{k} + m_\nu)J_\nu^\nu], \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} J_\nu^\mu &= \gamma^\mu(1 + \gamma^5) \\ J_\nu^\nu &= \left[f_{m\nu}\gamma^\mu + g_{1\nu}\gamma^\mu\gamma^5 - (f_{2\nu} + ig_{2\nu}\gamma^5)\frac{P^\mu}{2m_e} \right]. \end{aligned}$$

Jadi penampang lintang diferensial dapat ditulis,

$$\begin{aligned} d\sigma &\propto \mathcal{M}^2 \\ &\propto \mathcal{M}_W^2 + \mathcal{M}_{EM}^2 + \mathcal{M}_W\mathcal{M}_{EM}^* + \mathcal{M}_{EM}\mathcal{M}_W^* \\ &\propto \left(\frac{G_F}{\sqrt{2}}\right)^2 L_{\mu\nu}^{e(W)} L_{\nu}^{\mu\nu(W)} + \left(\frac{4\pi\alpha}{q_\mu^2}\right)^2 L_{\mu\nu}^{e(EM)} L_{\nu}^{\mu\nu(EM)} \\ &\quad + \frac{8G_F\pi\alpha}{q_\mu^2\sqrt{2}} L_{\mu\nu}^{e(INT)} L_{\nu}^{\mu\nu(INT)}. \quad (A.15) \end{aligned}$$

Lampiran B

Polarisasi

Tensor polarisasi elektron dari persamaan (2.9) adalah (Horowitz & Wehrberger 1991):

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = -i \int \frac{d^4p}{2\pi^4} \text{Tr}[G(p) J_\mu^e G(p+q) J_\nu^e]. \quad (\text{B.1})$$

Dimana J_μ^e dan J_ν^e adalah verteks elektron dan propagator partikel target adalah,

$$\begin{aligned} G(p) &= G_F(p) + G_D(p), \\ G(p+q) &= G_F(p+q) + G_D(p+q). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

G_D adalah propagator yang bergantung pada kerapatan, yang mengakomodasi efek korelasi gas elektron.

G_F adalah propagator fermion standard.

Jika persamaan (B.2) disubstitusi ke persamaan (B.1) maka akan menghasilkan:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(q) &= -i \int \frac{d^4p}{2\pi^4} \text{Tr}\{[G_F(p) + G_D(p)] J_\mu^e [G_F(p+q) + G_D(p+q)] J_\nu^e\} \\ &= -i \int \frac{d^4p}{2\pi^4} \text{Tr}[G_F(p) J_\mu^e G_F(p+q) J_\nu^e + G_F(p) J_\mu^e G_D(p+q) J_\nu^e \\ &\quad + G_D(p) J_\mu^e G_F(p+q) J_\nu^e + G_D(p) J_\mu^e G_D(p+q) J_\nu^e]. \end{aligned}$$

Dengan pendekatan medan rata-rata, suku $G_F(p) J_\mu^e G_F(p+q) J_\nu^e$ diabaikan karena kontribusinya kecil. Persamaan menjadi:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(q) = & -i \int \frac{d^4p}{2\pi^4} \text{Tr} \left[\frac{1}{2} G_D(p) J_\mu^e G_D(p+q) J_\nu^e + G_F(p) J_\mu^e G_D(p+q) J_\nu^e \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} G_D(p) J_\mu^e G_D(p+q) J_\nu^e + G_D(p) J_\mu^e G_F(p+q) J_\nu^e \right]. \end{aligned}$$

Jika $p = p - q$, maka:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(q) = & -i \int \frac{d^4p}{2\pi^4} \text{Tr} \left[\frac{1}{2} G_D(p-q) J_\mu^e G_D(p) J_\nu^e + G_F(p-q) J_\mu^e G_D(p) J_\nu^e \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} G_D(p) J_\mu^e G_D(p+q) J_\nu^e + G_D(p) J_\mu^e G_F(p+q) J_\nu^e \right], \end{aligned}$$

dengan menggunakan theorema Trace : $\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\sigma) = \text{Tr}(\gamma_\beta \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\sigma)$, maka persamaan menjadi:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(q) = & -i \int \frac{d^4p}{2\pi^4} \text{Tr} \left[\frac{1}{2} G_D(p) J_\mu^e G_D(p-q) J_\nu^e + G_D(p) J_\mu^e G_F(p-q) J_\nu^e \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} G_D(p) J_\mu^e G_D(p+q) J_\nu^e + G_D(p) J_\mu^e G_F(p+q) J_\nu^e \right] \\ = & -i \int \frac{d^4p}{2\pi^4} \text{Tr} \left[\frac{1}{2} G_D(p) J_\mu^e G_D(p+q) J_\nu^e + G_D(p) J_\mu^e G_F(p+q) J_\nu^e \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} G_D(p) J_\mu^e G_D(p-q) J_\nu^e + G_D(p) J_\mu^e G_F(p-q) J_\nu^e \right]. \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

Bentuk eksplisit dari propagator G_D dan G_F adalah:

$$\begin{aligned} G_D(p) &= g_D(p)(\not{p} + m_e), \\ G_D(p \pm q) &= g_D(p \pm q)(\not{p} \pm \not{q} + m_e), \\ G_F(p) &= g_F(p)(\not{p} + m_e), \\ G_F(p \pm q) &= g_F(p \pm q)(\not{p} \pm \not{q} + m_e). \end{aligned}$$

Kemudian dimasukkan ke persamaan (B.3), hasilnya:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\mu\nu}(q) = & -i \int \frac{d^4p}{2\pi^4} \\
 & \times \text{Tr} \left[\frac{1}{2} g_D(p) (\not{p} + m_e) J_\mu^e g_D(p+q) (\not{p} + \not{q} + m_e) J_\nu^e \right. \\
 & + g_D(p) (\not{p} + m_e) J_\mu^e g_F(p+q) (\not{p} + \not{q} + m_e) J_\nu^e \\
 & + \frac{1}{2} g_D(p) (\not{p} + m_e) J_\mu^e g_D(p-q) (\not{p} - \not{q} + m_e) J_\nu^e \\
 & \left. + g_D(p) (\not{p} + m_e) J_\mu^e g_F(p-q) (\not{p} - \not{q} + m_e) J_\nu^e \right],
 \end{aligned}$$

dan dikelompokkan serta diberi nama,

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\mu\nu}(q) = & -i \int \frac{d^4p}{2\pi^4} \\
 & \times \left\{ \underbrace{\left[\frac{1}{2} g_D(p) g_D(p+q) + g_D(p) g_F(p+q) \right]}_{I(p, p+q)} \underbrace{\text{Tr}(\not{p} + m_e) J_\mu^e (\not{p} + \not{q} + m_e) J_\nu^e}_{F_{\mu\nu}(p, p+q)} \right. \\
 & \left. + \underbrace{\left[\frac{1}{2} g_D(p) g_D(p-q) + g_D(p) g_F(p-q) \right]}_{I(p, p-q)} \underbrace{\text{Tr}(\not{p} + m_e) J_\mu^e (\not{p} - \not{q} + m_e) J_\nu^e}_{F_{\mu\nu}(p, p-q)} \right\}.
 \end{aligned}$$

Sehingga dapat ditulis,

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = -i \int \frac{d^4p}{2\pi^4} [I(p, p+q) F_{\mu\nu}(p, p+q)] + \underbrace{[I(p, p-q) F_{\mu\nu}(p, p-q)]}_{\text{disingkat } (q \rightarrow -q)}. \quad (\text{B.4})$$

Sistematika penurunan yang kami lakukan untuk polarisasi elektron adalah pertama kami lakukan penurunan untuk kasus $T = 0$ MeV, sedangkan generalisasi untuk kasus $T \neq 0$ MeV dilakukan dengan mengganti fungsi θ dengan distribusi Fermi-Dirac serta memperhitungkan adanya anti partikel (tidak muncul pada $T = 0$ MeV).

Karena bentuk eksplisit propagator partikel target untuk $T = 0$ MeV adalah,

$$\begin{aligned}
g_D(p) &= \frac{i\pi}{E_p} \delta(p_0 - E_p) \theta(k_F - |\vec{p}|), \\
g_D(p \pm q) &= \frac{i\pi}{E_{p \pm q}} \delta(p_0 \pm q_0 - E_{p \pm q}) \theta(k_F - |\vec{p} \pm \vec{q}|), \\
g_F(p) &= \frac{1}{p^2 - m_e^2 + i\epsilon}, \\
g_F(p \pm q) &= \frac{1}{(p \pm q)^2 - m_e^2 + i\epsilon},
\end{aligned}$$

dengan k_F adalah momentum-4 elektron pada level Fermi, maka $I(p, p \pm q)$ pada $T = 0$ MeV dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned}
I(p, p \pm q) &= -\frac{\pi^2}{2E_p E_{p \pm q}} \\
&\times \delta(p_0 - E_p) \theta(k_F - |\vec{p}|) \delta(p_0 \pm q_0 - E_{p \pm q}) \theta(k_F - |\vec{p} \pm \vec{q}|) \\
&+ \frac{i\pi}{E_p} \frac{\delta(p_0 - E_p) \theta(k_F - |\vec{p}|)}{(p \pm q)^2 - m_e^2 + i\epsilon}. \tag{B.5}
\end{aligned}$$

Pendekatan limit ϵ mendekati nol digunakan untuk menghindari singularitas:

$$\frac{1}{(p \pm q)^2 - m_e^2 + i\epsilon} = \frac{\mathcal{P}}{(p \pm q)^2 - m_e^2} - \frac{i\pi}{2E_{p \pm q}} \delta(p_0 \pm q_0 - E_{p \pm q}),$$

dengan $\mathcal{P}$ adalah *Principle Value*.

Maka persamaan (B.5) dapat ditulis:

$$\begin{aligned}
I(p, p \pm q) &= -\frac{\pi^2}{2E_p E_{p \pm q}} \\
&\times \delta(p_0 - E_p) \theta(k_F - |\vec{p}|) \delta(p_0 \pm q_0 - E_{p \pm q}) \theta(k_F - |\vec{p} \pm \vec{q}|) \\
&+ \frac{i\pi}{E_p} \delta(p_0 - E_p) \theta(k_F - |\vec{p}|) \\
&\times \left[\frac{\mathcal{P}}{(p \pm q)^2 - m_e^2} - \frac{i\pi}{2E_{p \pm q}} \delta(p_0 \pm q_0 - E_{p \pm q}) \right]. \tag{B.6}
\end{aligned}$$

Persamaan (B.6) disubstitusikan kedalam persamaan (B.4), hasilnya

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}(q) &= \int \frac{d^4p}{2\pi^4} \\
&\times \left\{ \frac{i\pi^2}{2E_p E_{p+q}} \delta(p_0 - E_p) \theta(k_F - |\vec{p}|) \delta(p_0 + q_0 - E_{p+q}) \theta(k_F - |\vec{p} + \vec{q}|) \right. \\
&+ \frac{\pi}{E_p} \delta(p_0 - E_p) \theta(k_F - |\vec{p}|) \left[\frac{\mathcal{P}}{(p+q)^2 - m_e^2} - \frac{i\pi}{2E_{p+q}} \delta(p_0 + q_0 - E_{p+q}) \right] \Big\} \\
&\times F_{\mu\nu}(p, p+q) + (q \rightarrow -q). \tag{B.7} \\
&= \Pi_{\mu\nu}^{(1)}(q) + \Pi_{\mu\nu}^{(2)}(q).
\end{aligned}$$

Persamaan (B.7) dibagi menjadi 2 bagian, bagian real dan bagian imajiner, tetapi bagian real masih bisa dibagi lagi menjadi bagian real dan imajiner juga, maka bagian real dari persamaan (B.7) adalah,

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}^{(1)}(q) &= \frac{\pi}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{E_p} \\
&\times \left[\underbrace{\frac{\mathcal{P}}{(p+q)^2 - m_e^2}}_{\text{real}} - \underbrace{\frac{i\pi}{2E_{p+q}} \delta(p_0 + q_0 - E_{p+q})}_{\text{imaginer}} \right] \\
&\times \delta(p_0 - E_p) \theta(k_F - |\vec{p}|) F_{\mu\nu}(p, p+q) + (q \rightarrow -q), \tag{B.8}
\end{aligned}$$

dan bagian imajiner adalah,

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(q) &= \frac{i\pi^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{2E_p E_{p+q}} \\
&\times \delta(p_0 - E_p) \theta(k_F - |\vec{p}|) \delta(p_0 + q_0 - E_{p+q}) \theta(k_F - |\vec{p} + \vec{q}|) \\
&\times F_{\mu\nu}(p, p+q) + (q \rightarrow -q). \tag{B.9}
\end{aligned}$$

Kemudian persamaan (B.8) dibagi lagi menjadi bagian real dan imajiner,

$$\begin{aligned}
Re \Pi_{\mu\nu}^{(1)}(q) &= \frac{\pi}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{E_p} \frac{\mathcal{P}}{(p+q)^2 - m_e^2} \delta(p_0 - E_p) \theta(k_F - |\vec{p}|) \\
&\times F_{\mu\nu}(p, p+q) + (q \rightarrow -q). \tag{B.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Im \Pi_{\mu\nu}^{(1)}(q) &= -\frac{\pi^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{2E_p E_{p+q}} \delta(p_0 - E_p) \theta(k_F - |\vec{p}|) \\
&\times \delta(p_0 + q_0 - E_{p+q}) F_{\mu\nu}(p, p+q) + (q \rightarrow -q). \tag{B.11}
\end{aligned}$$

Maka imajiner total dari tensor polarisasi elektron didapatkan dengan menggabungkan persamaan (B.9) dengan persamaan (B.11), didapatkan:

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}^{Im} &= \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{2E_p E_{p+q}} \\ &\times \delta(p_0 - E_p) \theta(k_F - |\vec{p}|) \delta(p_0 + q_0 - E_{p+q}) \theta(k_F - |\vec{p} + \vec{q}| - 1) \\ &\times F_{\mu\nu}(p, p+q) + (q \rightarrow -q).\end{aligned}$$

Suku ($q \rightarrow -q$) dikembalikan ke bentuk semula,

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}^{Im} &= \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{2E_p E_{p+q}} \delta(p_0 - E_p) \theta(k_F - |\vec{p}|) \delta(p_0 + q_0 - E_{p+q}) \\ &\times \theta(k_F - |\vec{p} + \vec{q}| - 1) F_{\mu\nu}(p, p+q) \\ &+ \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{2E_p E_{p-q}} \delta(p_0 - E_p) \theta(k_F - |\vec{p}|) \delta(p_0 + q_0 - E_{p-q}) \\ &\times \theta(k_F - |\vec{p} - \vec{q}| - 1) F_{\mu\nu}(p, p-q).\end{aligned}\quad (B.12)$$

Dengan menggunakan sifat fungsi θ (*theta / step function*): $\theta(-x) = 1 - \theta(x)$, dan dari prinsip konservasi arus $q^\mu F_{\mu\nu} = 0$ yang membuktikan bahwa $F_{\mu\nu}(p, p+q) = F_{\mu\nu}(p, p-q)$ (seperti terlihat pada lampiran C), serta dengan mengganti $p \rightarrow p+2q$, maka dari persamaan (B.12) didapat tensor polarisasi elektron untuk $T = 0$ MeV adalah,

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}^{Im} &= -\frac{\pi^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{2E_p E_{p+q}} \delta(p_0 - E_p) \theta(k_F - |\vec{p}|) \delta(p_0 + q_0 - E_{p+q}) \\ &\times \theta(|\vec{p} + \vec{q}| - k_F) F_{\mu\nu}(p, p+q).\end{aligned}$$

Modifikasi polarisasi untuk $T \neq 0$ MeV (kasus temperatur berhingga) adalah fungsi θ diganti fungsi distribusi Fermi-Dirac, dan efek anti partikel tidak dapat diabaikan (Saito, Maruyama & Soutome 1989, Horowitz & Wehrberger 1991, Reddy, Prakash & Lattimer 1998, Reddy,S.,et al.1999). Hal ini dilakukan dengan mengganti:

$$\begin{aligned}\theta(k_F - |\vec{p}|) &\rightarrow f(E_p), \\ \theta(|\vec{p} + \vec{q}| - k_F) &\rightarrow [1 - f(E_{p+q})], \\ \delta(E_p + q_0 - E_{p+q}) &\rightarrow \{\delta[q_0 - (E_{p+q} - E_p)] + \delta[q_0 - (E_p - E_{p+q})]\},\end{aligned}$$

pada setiap polarisasi, dan karena

$$d^4p = dp_0 d^3p,$$

serta Fungsi delta Dirac:

$$\int dp_0 \delta(p_0 - E_p) = 1 \quad \text{dan} \quad p_0 = E_p, \quad \text{maka}$$

maka didapat tensor polarisasi elektron untuk $T \neq 0$ MeV sebagai

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{Im} = & -\frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3p}{8E_p E_{p+q}} f(E_p)[1 - f(E_{p+q})] F_{\mu\nu}(p, p+q) \\ & \times \{ \delta[q_0 - (E_{p+q} - E_p)] + \delta[q_0 - (E_p - E_{p+q})] \}. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

B.1 Polarisasi Vektor (*Vector Polarization*)

Untuk menghitung secara eksplisit polarisasi vektor (yang kemudian dipakai untuk menghitung polarisasi longitudinal dan transversal), diselidiki dahulu harga-harga yang tidak sama dengan nol.

Dari persamaan (A.4) dihitung dengan menggunakan aljabar Trace:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^V(p, p+q) &= \text{Tr}[(\not{p} + m_e)\gamma_\mu(\not{p} + \not{q} + m_e)\gamma_\nu], \\ &= \text{Tr}(\not{p}\gamma_\mu \not{p}\gamma_\nu + \not{p}\gamma_\mu \not{q}\gamma_\nu + \not{p}\gamma_\mu m_e\gamma_\nu \\ &\quad + m_e\gamma_\mu \not{p}\gamma_\nu + m_e\gamma_\mu \not{q}\gamma_\nu + m_e\gamma_\mu m_e\gamma_\nu), \\ &= \text{Tr}(\gamma_\alpha p^\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta p^\beta \gamma_\nu + \gamma_\alpha p^\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta q^\beta \gamma_\nu + \gamma_\alpha p^\alpha \gamma_\mu m_e \gamma_\nu \\ &\quad + m_e \gamma_\mu \gamma_\alpha p^\alpha \gamma_\nu + m_e \gamma_\mu \gamma_\alpha q^\alpha \gamma_\nu + m_e \gamma_\mu m_e \gamma_\nu), \\ &= \underbrace{\text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu) p^\alpha p^\beta}_1 + \underbrace{\text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu) p^\alpha q^\beta}_2 + m_e \underbrace{\text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\nu)}_{=0} p^\alpha \\ &\quad + m_e \underbrace{\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu)}_{=0} p^\alpha + m_e \underbrace{\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu)}_{=0} q^\alpha + m_e^2 \underbrace{\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu)}_3. \end{aligned}$$

Berdasarkan theorema Trace:

$$\begin{aligned} Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu) &= Tr(\gamma_\nu \gamma_\mu) = 4g_{\mu\nu}. \\ Tr(\gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu) &= 4(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} + g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta} - g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}). \\ Tr(\underbrace{\gamma_\mu \dots \gamma_\nu}_{\text{ganjil}}) &= 0. \end{aligned}$$

keterangan:

$$\begin{aligned} 1. Tr(\gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu) p^\alpha p^\beta &= 4(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} + g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta} - g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}) p^\alpha p^\beta, \\ &= 4(g_{\alpha\mu}p^\alpha g_{\beta\nu}p^\beta + g_{\alpha\nu}p^\alpha g_{\mu\beta}p^\beta - g_{\alpha\beta}p^\alpha g_{\mu\nu}p^\beta), \\ &= 4p_\mu p_\nu + 4p_\nu p_\mu - 4p_\beta p^\beta g_{\mu\nu}, \\ &= 8p_\mu p_\nu - 4p^2 g_{\mu\nu}. \\ 2. Tr(\gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu) p^\alpha q^\beta &= 4(g_{\alpha\mu}p^\alpha g_{\beta\nu}q^\beta + g_{\alpha\nu}p^\alpha g_{\mu\beta}q^\beta - g_{\alpha\beta}p^\alpha g_{\mu\nu}q^\beta), \\ &= 4p_\mu q_\nu + 4p_\nu q_\mu - 4p_\beta q^\beta g_{\mu\nu}, \\ &= 4p_\mu q_\nu + 4p_\nu q_\mu - 4p \cdot q g_{\mu\nu}. \\ 3. m_e^2 Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu) &= 4 m_e^2 g_{\mu\nu}, \\ &= 4 p^2 g_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Persamaan menjadi:

$$F_{\mu\nu}^V(p, p+q) = 4(2p_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu - p \cdot q g_{\mu\nu}). \quad (\text{B.14})$$

Untuk memudahkan perhitungan, tanpa mengurangi keumuman, dipilih kerangka dimana salah satu sumbunya dihipitkan:

$$\begin{aligned} q &\equiv (q_0, q_1, q_2, q_3) \equiv (q_0, |\vec{q}|, 0, 0), \\ p &\equiv (p_0, p_1, p_2, p_3) \equiv (E, p_x, p_y, p_z), \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
p_x &= |\vec{p}| \cos \theta, \\
p_y &= |\vec{p}| \sin \theta \cos \varphi, \\
p_z &= |\vec{p}| \sin \theta \sin \varphi.
\end{aligned}$$

Harga-harga *metric tensor* dalam notasi matrik adalah:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dan dengan menggunakan ketentuan integrasi fungsi ganjil,

$$\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0, \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0.$$

dan dari perhitungan trigonometri,

$$\begin{aligned}
\underbrace{\cos 2\varphi}_{\text{fs. ganjil}} &= \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi, \\
\cos^2 \varphi &= \sin^2 \varphi,
\end{aligned}$$

digunakan untuk membuktikan $F_{22}^V = F_{33}^V$.

Kemudian dihitung $F_{\mu\nu}^V$ untuk harga-harga μ dan ν dari 0 sampai 3, hasil yang didapatkan adalah:

$$\begin{aligned}
F_{00}^V &= 4(2E^2 + Eq_0 + |\vec{p}||\vec{q}| \cos \theta), \\
F_{10}^V &= F_{01}^V = 4(2E|\vec{p}| \cos \theta + E|\vec{q}| + |\vec{p}\vec{q}|_0 \cos \theta), \\
F_{11}^V &= 4(2|\vec{p}|^2 \cos^2 \theta + Eq_0 + |\vec{p}||\vec{q}| \cos \theta), \\
F_{22}^V &= 4(2|\vec{p}|^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + Eq_0 + |\vec{p}||\vec{q}| \cos \theta), \\
F_{33}^V &= 4(2|\vec{p}|^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + Eq_0 + |\vec{p}||\vec{q}| \cos \theta). \tag{B.15}
\end{aligned}$$

Sedangkan,

$$F_{02}^V = F_{03}^V = F_{12}^V = F_{13}^V = F_{20}^V = F_{21}^V = F_{23}^V = F_{30}^V = F_{31}^V = F_{32}^V = 0.$$

Dengan demikian, polarisasi vektor dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut,

$$Im \Pi_{\mu\nu}^V = \begin{pmatrix} \Pi_{00} & \Pi_{01} & 0 & 0 \\ \Pi_{10} & \Pi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Pi_{33} \end{pmatrix}. \quad (B.16)$$

B.1.1 Polarisasi Longitudinal (*Longitudinal Polarization*)

Pada polarisasi vektor, secara umum berlaku hukum kekekalan arus $q^\mu \Pi_{\mu\nu} = 0$, maka konsekuensinya untuk harga-harga μ dan $\nu = 0, 1$ adalah:

$$\begin{aligned} q^0 \Pi_{00} + q^1 \Pi_{10} &= 0 \\ q^0 \Pi_{00} + |\vec{q}| \Pi_{10} &= 0 \\ \Pi_{10} &= -\frac{q_0}{|\vec{q}|} \Pi_{00}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q^0 \Pi_{01} + q^1 \Pi_{11} &= 0 \\ q^0 \Pi_{01} + |\vec{q}| \Pi_{11} &= 0 \\ \Pi_{11} &= -\frac{q_0}{|\vec{q}|} \Pi_{01}, \end{aligned}$$

$$\Pi_{10} = \Pi_{01},$$

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= -\frac{q_0}{|\vec{q}|} \frac{q_0}{|\vec{q}|} \Pi_{00}, \\ \Pi_{11} &= -\frac{q_0^2}{|\vec{q}|^2} \Pi_{00}. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan hubungan $\Pi_L = \Pi_{00} - \Pi_{11}$, maka diperoleh:

$$\Pi_L^{Im} = -\frac{q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \Pi_{00}^{Im(V)}. \quad (B.17)$$

Dari persamaan (B.13) untuk bagian polarisasi vektor dan harga μ dan $\nu = 0$ adalah,

$$\begin{aligned} \Pi_{00}^{Im(V)} = & -\frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3p}{8E_p E_{p+q}} f(E_p)[1 - f(E_{p+q})] F_{00}^V(p, p+q) \\ & \times \{ \delta[q_0 - (E_{p+q} - E_p)] + \delta[q_0 - (E_p - E_{p+q})] \}. \end{aligned}$$

Dipisah menjadi 2 masing-masing delta fuction:

$$\begin{aligned} \Pi_{00}^{Im(V)} = & -\frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3p}{8E_p E_{p+q}} f(E_p)[1 - f(E_{p+q})] F_{00}^V(p, p+q) \\ & \times \delta[q_0 - (E_{p+q} - E_p)], \end{aligned} \quad (B.18)$$

dan

$$\begin{aligned} \Pi_{00}^{Im(V)} = & -\frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3p}{8E_p E_{p+q}} f(E_p)[1 - f(E_{p+q})] F_{00}^V(p, p+q) \\ & \times \delta[q_0 - (E_p - E_{p+q})]. \end{aligned} \quad (B.19)$$

Perhitungan persamaan (B.18):

$$\begin{aligned} \Pi_{00}^{Im(V)} = & -\frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3p}{8E_p E_{p+q}} f(E_p)[1 - f(E_{p+q})] F_{00}^V(p, p+q) \\ & \times \delta[q_0 - (E_{p+q} - E_p)], \end{aligned}$$

elemen volume:

$$\begin{aligned} d^3p &= -|\vec{p}|^2 d|\vec{p}| d\varphi d\cos\theta, \\ x &= \cos\theta, \\ d^3p &= -|\vec{p}|^2 d|\vec{p}| d\varphi dx. \end{aligned}$$

Karena integrand tidak tergantung φ , maka integrasi $d\varphi = 2\pi$:

$$d^3p = -2\pi |\vec{p}|^2 d|\vec{p}| dx,$$

jika $g(x) \equiv q_0 - E_{p+q} + E_p$, maka:

$$\Pi_{00}^{Im(V)} = -\frac{1}{(2\pi)} \int \frac{|\vec{p}|^2 d|\vec{p}| dx}{8E_p E_{p+q}} f(E_p)[1 - f(E_{p+q})] F_{00}^V(p, p+q) \delta[g(x)].$$

Dan karena:

$$E_{p+q}^2 = (\vec{p} + \vec{q})^2 + m_e^2,$$

maka:

$$g(x) = E_p + q_0 - (|\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 + 2|\vec{p}||\vec{q}|x + m_e)^{\frac{1}{2}}.$$

Turunan $g(x)$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{dg(x)}{dx} \\ &= -\frac{1}{2}(|\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 + 2|\vec{p}||\vec{q}|x + m_e)^{\frac{1}{2}} 2|\vec{p}||\vec{q}| \\ &= -\frac{|\vec{p}||\vec{q}|}{E_{p+q}}. \end{aligned}$$

Karena:

$$g(x)|_{x=x_i} = 0,$$

maka:

$$\begin{aligned} E_{p+q} &= E_p + q_0 \\ E_{p+q}^2 &= (E_p + q_0)^2 = E_p^2 + 2E_p q_0 + q_0^2. \end{aligned}$$

Jadi:

$$\begin{aligned} |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 + 2|\vec{p}||\vec{q}|x_i + m_e^2 &= E_p^2 + 2E_p q_0 + q_0^2 \\ \underbrace{-E_p^2 + m_e^2 + |\vec{p}|^2}_{=0} + \underbrace{|\vec{q}|^2 - q_0^2}_{=-q_\mu^2} + 2|\vec{p}||\vec{q}|x_i &= 2E_p q_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -q_\mu^2 + 2|\vec{p}||\vec{q}|x_i &= 2E_p q_0 \\ x_i &= \frac{2E_p q_0 + q_\mu^2}{2|\vec{p}||\vec{q}|}. \end{aligned}$$

Fungsi delta Dirac:

$$\delta[g(x)] = \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x)|_{x_i}} = \frac{\delta(x - x_i)}{|\vec{p}||\vec{q}|} E_{p+q},$$

maka:

$$\Pi_{00}^{Im(V)} = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{|\vec{p}|^2 d|\vec{p}| dx}{8E_p E_{p+q}} f(E_p) [1 - f(E_{p+q})] F_{00}^V(p, p+q) \delta[g(x)].$$

Jika:

$$\begin{aligned} f(E_{p+q}) &= f(E_p + q_0), \\ f(E_p)[1 - f(E_{p+q})] &= F(E_p, E_{p+q}), \\ f(E_p)[1 - f(E_p + q_0)] &= F(E_p, E_p + q_0), \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} E_p^2 &= p^2 + m_e^2, \\ E_p dE_p &= p dp, \end{aligned}$$

maka:

$$\begin{aligned} \Pi_{00}^{Im(V)} &= -\frac{1}{2\pi} \int \frac{|\vec{p}|^2 d|\vec{p}| dx}{8E_p E_{p+q}} F(E_p, E_p + q_0) F_{00}^V(p, p + q) \frac{\delta(x - x_i)}{|\vec{p}||\vec{q}|} E_{p+q}, \\ &= -\frac{1}{2\pi|\vec{q}|} \int \frac{E_p dE_p}{8E_p} F(E_p, E_p + q_0) F_{00}(p, p + q), \\ &= -\frac{1}{16\pi|\vec{q}|} \int dE_p F(E_p, E_p + q_0) F_{00}^V(p, p + q). \end{aligned}$$

dari persamaan (B.14),

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^V(p, p + q) &= 4(2p_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu - p \cdot q g_{\mu\nu}), \\ F_{00}^V(p, p + q) &= 4(2p_0 p_0 + p_0 q_0 + p_0 q_0 - p \cdot q g_{00}). \end{aligned}$$

Diketahui $g_{00} = 1$ dan untuk elektron $p \cdot q = -\frac{1}{2}q\mu^2$, maka:

$$F_{00}^V(p, p + q) = 4(2E_p^2 + 2E_p q_0 + \frac{1}{2}q_\mu^2).$$

Maka

$$\begin{aligned} \Pi_{00}^{Im(V)} &= -\frac{1}{4\pi|\vec{q}|} \int dE_p (2E_p^2 + 2E_p q_0 + \frac{1}{2}q_\mu^2) F(E_p, E_p + q_0), \\ &= -\frac{i}{2\pi|\vec{q}|} \int dE_p (E_p^2 + E_p q_0 + \frac{1}{4}q_\mu^2) F(E_p, E_p + q_0), \\ &= -\frac{1}{2\pi|\vec{q}|} \int dE_p (E_p^2 + E_p q_0 + \frac{1}{4}q_0^2 - \frac{1}{4}|\vec{q}|^2) F(E_p, E_p + q_0), \\ &= -\frac{1}{2\pi|\vec{q}|} \int dE_p [(E_p + \frac{1}{2}q_0)^2 - \frac{1}{4}|\vec{q}|^2] F(E_p, E_p + q_0). \end{aligned}$$

Dan dari persamaan (B.17),

$$\begin{aligned}\Pi_L^{Im} &= -\frac{q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \Pi_{00}^{Im(V)} \\ &= \frac{q_\mu^2}{2\pi|\vec{q}|^3} \int dE_p [(E_p + \frac{1}{2}q_0)^2 - \frac{1}{4}|\vec{q}|^2] F(E_p, E_p + q_0).\end{aligned}$$

Perhitungan persamaan (B.19):

$$\Pi_{00}^{Im(V)} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3p}{8E_p E_{p+q}} f(E_p) [1 - f(E_{p+q})] F_{00}^V(p, p+q) \delta[q_0 - (E_p - E_{p+q})].$$

Penurunan seperti pada bagian 1 tetapi untuk $g(x) \equiv q_0 - E_p + E_{p+q}$,

$$\Pi_{00}^{Im(V)} = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{|\vec{p}|^2 d|\vec{p}| dx}{8E_p E_{p+q}} f(E_p) [1 - f(E_{p+q})] F_{00}^V(p, p+q) \delta[g(x)].$$

Karena $E_{p+q}^2 = (\vec{p} + \vec{q})^2 + m_e^2$, maka:

$$\begin{aligned}g(x) &= -E_p + q_0 + E_{p+q} = -E_p + q_0 + [(\vec{p} + \vec{q})^2 + m_e^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= -E_p + q_0 + [|\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 + 2|\vec{p}||\vec{q}|x + m_e^2]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Turunan dari $g(x)$ adalah

$$g'(x) = \frac{dg(x)}{dx} = \frac{|\vec{p}||\vec{q}|}{E_{p+q}},$$

dan $g(x)|_{x=x_i} = 0$, maka

$$\begin{aligned}E_{p+q} &= E_p - q_0 \\ E_{p+q}^2 &= (E_p - q_0)^2 = E_p^2 - 2E_p q_0 + q_0^2.\end{aligned}$$

Jadi

$$\begin{aligned}|\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 + 2|\vec{p}||\vec{q}|x_i + m_e^2 &= E_p^2 - 2E_p q_0 + q_0^2, \\ \underbrace{-E_p^2 + m_e^2 + |\vec{p}|^2}_{=0} + \underbrace{|\vec{q}|^2 - q_0^2}_{=-q_\mu^2} + 2|\vec{p}||\vec{q}|x_i &= -2E_p q_0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-q_\mu^2 + 2|\vec{p}||\vec{q}|x_i &= -2E_p q_0, \\
x_i &= \frac{-2E_p q_0 + q_\mu^2}{2|\vec{p}||\vec{q}|}.
\end{aligned}$$

Fungsi delta Dirac:

$$\delta[g(x)] = \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x)|_{x_i}} = \frac{\delta(x - x_i)}{|\vec{p}||\vec{q}|} E_{p+q}.$$

Maka:

$$\Pi_{00}^{Im(V)} = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{|\vec{p}|^2 d|\vec{p}| dx}{8E_p E_{p+q}} f(E_p) [1 - f(E_{p+q})] F_{00}^V(p, p+q) \delta[g(x)],$$

jika:

$$\begin{aligned}
f(E_{p+q}) &= f(E_p - q_0), \\
f(E_p) [1 - f(E_{p+q})] &= F(E_p, E_{p+q}), \\
f(E_p) [1 - f(E_p + q_0)] &= F(E_p, E_p - q_0),
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
E_p^2 &= p^2 + m_e^2, \\
E_p dE_p &= p dp,
\end{aligned}$$

maka:

$$\begin{aligned}
\Pi_{00}^{Im(V)} &= -\frac{1}{2\pi} \int \frac{|\vec{p}|^2 d|\vec{p}| dx}{8E_p E_{p+q}} F(E_p, E_p - q_0) F_{00}^V(p, p+q) \frac{\delta(x - x_i)}{|\vec{p}||\vec{q}|} E_{p+q} \\
&= -\frac{1}{2\pi|\vec{q}|} \int \frac{E_p dE_p}{8E_p} F(E_p, E_p - q_0) F_{00}^V(p, p+q) \\
&= -\frac{1}{16\pi|\vec{q}|} \int dE_p F(E_p, E_p - q_0) F_{00}^V(p, p+q).
\end{aligned}$$

dari persamaan (B.14),

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}^V(p, p+q) &= 4(2p_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu - p \cdot q g_{\mu\nu}), \\
F_{00}^V(p, p+q) &= 4(2p_0 p_0 - p_0 q_0 - p_0 q_0 - p \cdot q g_{00}).
\end{aligned}$$

Diketahui $g_{00} = 1$ dan untuk elektron $p \cdot q = -\frac{1}{2}q\mu^2$, maka:

$$F_{00}^V(p, p+q) = 4(2E_p^2 - 2E_p q_0 + \frac{1}{2}q_\mu^2).$$

Maka dengan cara seperti persamaan (B.18)

$$\Pi_{00}^{Im(V)} = -\frac{1}{2\pi|\vec{q}|} \int dE_p [(E_p - \frac{1}{2}q_0)^2 - \frac{1}{4}|\vec{q}|^2] F(E_p, E_p - q_0).$$

Misalkan

$$\begin{aligned} E + q_0 &= E', \\ dE &= dE', \end{aligned}$$

maka:

$$\begin{aligned} E_p - \frac{1}{2}q_0 &= E'_p + q_0 - \frac{1}{2}q_0, \\ &= E'_p + \frac{1}{2}q_0, \end{aligned}$$

substitusi kedalam integrasi:

$$\Pi_{00}^{Im(V)} = -\frac{1}{2\pi|\vec{q}|} \int dE'_p [(E'_p + \frac{1}{2}q_0)^2 - \frac{1}{4}|\vec{q}|^2] F(E'_p + q_0, E'_p),$$

atau

$$\Pi_{00}^{Im(V)} = -\frac{1}{2\pi|\vec{q}|} \int dE_p [(E_p + \frac{1}{2}q_0)^2 - \frac{1}{4}|\vec{q}|^2] F(E_p + q_0, E_p).$$

Dari persamaan (B.17),

$$\begin{aligned} \Pi_L^{Im} &= -\frac{q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \Pi_{00}^{Im(V)} \\ &= \frac{q_\mu^2}{2\pi|\vec{q}|^3} \int dE_p [(E_p + \frac{1}{2}q_0)^2 - \frac{1}{4}|\vec{q}|^2] F(E_p + q_0, E_p). \end{aligned}$$

Hasil penurunan persamaan (B.18) ditambah persamaan (B.19) adalah

$$\begin{aligned}\Pi_L^{Im} &= \frac{q_\mu^2}{2\pi|\vec{q}|^3} \int_{e_-}^{\infty} dE_p [(E_p + \frac{1}{2}q_0)^2 - \frac{1}{4}|\vec{q}|^2] \\ &\quad [F(E_p, E_p + q_0) + F(E_p + q_0, E_p)]. \quad (B.20) \\ &= Im\Pi_L(q_0, q).\end{aligned}$$

dengan

$$e_- = -\frac{1}{2}q_0 + \frac{1}{2}|\vec{q}| \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{q_\mu^2}}$$

B.1.2 Polarisasi Transversal (*Tranverse Polarization*)

Pada polarisasi transversal per definisi:

$$\Pi_T^{Im} = \Pi_{22}^{Im(V)}. \quad (B.21)$$

Dan dari persamaan (B.13) untuk bagian polarisasi vektor dan harga μ dan $\nu = 2$ adalah,

$$\begin{aligned}\Pi_{22}^{Im(V)} &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3p}{8E_p E_{p+q}} f(E_p)[1 - f(E_{p+q})] F_{22}^V(p, p+q) \\ &\quad \times \{\delta[q_0 - (E_{p+q} - E_p)] + \delta[q_0 - (E_p - E_{p+q})]\}.\end{aligned}$$

Dipisah menjadi 2 masing-masing delta function:

$$\begin{aligned}\Pi_{22}^{Im(V)} &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3p}{8E_p E_{p+q}} f(E_p)[1 - f(E_{p+q})] F_{22}^V(p, p+q) \\ &\quad \times \delta[q_0 - (E_{p+q} - E_p)], \quad (B.22)\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\Pi_{22}^{Im(V)} &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3p}{8E_p E_{p+q}} f(E_p)[1 - f(E_{p+q})] F_{22}^V(p, p+q) \\ &\quad \times \delta[q_0 - (E_p - E_{p+q})]. \quad (B.23)\end{aligned}$$

Perhitungan persamaan (B.22):

Dengan penurunan seperti pada polarisasi longitudinal yaitu persamaan

(B.18), maka persamaan (B.22) menjadi:

$$\Pi_{22}^{Im(V)} = -\frac{1}{16\pi|\vec{q}|} \int dE_p F(E_p, E_p + q_0) F_{22}^V(p, p + q),$$

dari persamaan (B.14),

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^V(p, p + q) &= 4(2p_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu - p \cdot q g_{\mu\nu}), \\ F_{22}^V(p, p + q) &= 4(2p_2 p_2 + p_2 q_2 + p_2 q_2 - p \cdot q g_{22}). \end{aligned}$$

diketahui $g_{22} = -1$ dan untuk elektron $p \cdot q = -\frac{1}{2}q\mu^2$, maka:

$$F_{\mu\nu}^V(p, p + q) = 4(2|\vec{p}|^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - \frac{1}{2}q_\mu^2),$$

dan

$$\Pi_{22}^{Im(V)} = -\frac{1}{4\pi|\vec{q}|} \int dE_p (2|\vec{p}|^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - \frac{1}{2}q_\mu^2) F(E_p, E_p + q_0),$$

dimana

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi &= \sin^2 \theta (\cos 2\varphi + 1), \\ \sin^2 \theta &= 1 - \cos^2 \theta, \end{aligned}$$

dan integrasi fungsi ganjil,

$$\int_0^{2\pi} \cos 2\varphi = 0.$$

Sehingga,

$$\Pi_{22}^{Im(V)} = -\frac{1}{4\pi|\vec{q}|} \int dE_p [|\vec{p}|^2 (1 - \cos^2 \theta) - \frac{1}{2}q_\mu^2] F(E_p, E_p + q_0).$$

Dengan,

$$|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| = |\vec{p}| |\vec{q}| \cos \theta,$$

$$E_{p+q}^2 = (|\vec{p}| + |\vec{q}|)^2 + m_e^2 = |\vec{p}|^2 + 2|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| + |\vec{q}|^2 + m_e^2,$$

$$g(x) = p_0 + q_0 - E_{p+q} = 0,$$

$$E_{p+q} = E_p + q_0,$$

$$\begin{aligned}
2|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| &= E_{p+q}^2 - |\vec{p}|^2 - |\vec{q}|^2 - m_e^2, \\
&= (E_p + q_0)^2 - |\vec{p}|^2 - |\vec{q}|^2 - m_e^2 \\
&= E_p^2 + 2E_p q_0 + q_0^2 - |\vec{p}|^2 - |\vec{q}|^2 - m_e^2, \\
&= 2E_p q_0 + q_0^2 - |\vec{q}|^2, \\
&= 2E_p q_0 + q_\mu^2, \\
|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| &= E_p q_0 + \frac{1}{2} q_\mu^2,
\end{aligned}$$

maka

$$\cos \theta = \frac{E_p q_0 + \frac{1}{2} q_\mu^2}{|\vec{p}| |\vec{q}|}.$$

Persamaan menjadi:

$$\begin{aligned}
\Pi_{22}^{Im(V)} &= -\frac{1}{4\pi|\vec{q}|} \int dE_p \left\{ |\vec{p}|^2 \left[1 - \left(\frac{E_p q_0 + \frac{1}{2} q_\mu^2}{|\vec{p}| |\vec{q}|} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} q_\mu^2 \right\} F(E_p, E_p + q_0), \\
&= -\frac{1}{4\pi|\vec{q}|} \int dE_p \left[|\vec{p}|^2 \left(1 - \left(\frac{4E_p^2 q_0^2}{4|\vec{q}|^2} + \frac{4E_p q_0 q_\mu^2}{4|\vec{q}|^2} + \frac{q_\mu^4}{4|\vec{p}|^2} \right)^2 - \frac{1}{2} q_\mu^2 \right) \right] F(E_p, E_p + q_0), \\
&= -\frac{1}{4\pi|\vec{q}|} \int dE_p \left(E_p^2 - m_e^2 - \frac{E_p^2 q_0^2}{|\vec{q}|^2} - \frac{E_p q_0 q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} - \frac{q_\mu^4}{4|\vec{p}|^2} \right)^2 - \frac{1}{2} q_\mu^2 \right] F(E_p, E_p + q_0), \\
&= -\frac{1}{4\pi|\vec{q}|} \int dE_p \left[E_p^2 \left(\frac{|\vec{q}|^2 - q_0^2}{|\vec{q}|^2} \right) - \frac{E_p q_0 q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} - \frac{q_\mu^4}{4|\vec{p}|^2} - m_e^2 - \frac{1}{2} q_\mu^2 \right] F(E_p, E_p + q_0), \\
&= \frac{q_\mu^2}{4\pi|\vec{q}|^3} \int dE_p \left(E_p^2 + E_p q_0 + \frac{1}{4} q_0^2 - \frac{1}{4} |\vec{q}|^2 + \frac{m_e^2 |\vec{q}|^2}{q_\mu^2} + \frac{1}{2} |\vec{q}|^2 \right) F(E_p, E_p + q_0), \\
\Pi_{22}^{Im(V)} &= \frac{q_\mu^2}{4\pi|\vec{q}|^3} \int dE_p \left[(E_p + \frac{1}{2} q_0)^2 + \frac{1}{4} |\vec{q}|^2 + \frac{m_e^2 |\vec{q}|^2}{q_\mu^2} \right] F(E_p, E_p + q_0).
\end{aligned}$$

Dari persamaan (B.21),

$$\begin{aligned}
\Pi_T^{Im} &= \Pi_{22}^{Im(V)} \\
&= \frac{q_\mu^2}{4\pi|\vec{q}|^3} \int dE_p \left[(E_p + \frac{1}{2} q_0)^2 + \frac{1}{4} |\vec{q}|^2 + \frac{m_e^2 |\vec{q}|^2}{q_\mu^2} \right] F(E_p, E_p + q_0).
\end{aligned}$$

Perhitungan persamaan (B.23):

$$\begin{aligned}
\Pi_{22}^{Im(V)} &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3 p}{8E_p E_{p+q}} f(E_p) [1 - f(E_{p+q})] F_{22}^V(p, p + q) \\
&\quad \times \delta[q_0 - (E_p - E_{p+q})].
\end{aligned} \tag{B.24}$$

Dengan penurunan seperti pada polarisasi longitudinal yaitu persamaan (B.19), maka persamaan (B.24) menjadi:

$$\Pi_{22}^{Im(V)} = -\frac{1}{16\pi|\vec{q}|} \int dE_p F(E_p, E_p - q_0) F_{22}^V(p, p + q).$$

Dari persamaan (B.14),

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^V(p, p + q) &= 4(2p_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu - p \cdot q g_{\mu\nu}), \\ F_{22}^V(p, p + q) &= 4(2p_2 p_2 + p_2 q_2 + p_2 q_2 - p \cdot q g_{22}). \end{aligned}$$

Diketahui $g_{22} = -1$ dan untuk elektron $p \cdot q = -\frac{1}{2}q\mu^2$, maka,

$$F_{\mu\nu}^V(p, p + q) = 4(2|\vec{p}|^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - \frac{1}{2}q_\mu^2),$$

dan

$$\Pi_{22}^{Im(V)} = -\frac{1}{4\pi|\vec{q}|} \int dE_p (2|\vec{p}|^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - \frac{1}{2}q_\mu^2) F(E_p, E_p - q_0),$$

dan

$$\Pi_{22}^{Im(V)} = -\frac{1}{4\pi|\vec{q}|} \int dE_p [|\vec{p}|^2(1 - \cos^2 \theta) - \frac{1}{2}q_\mu^2] F(E_p, E_p - q_0),$$

dengan,

$$|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| = |\vec{p}| |\vec{q}| \cos \theta,$$

$$E_{p+q}^2 = (|\vec{p}| + |\vec{q}|)^2 + m_e^2 = |\vec{p}|^2 + 2|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| + |\vec{q}|^2 + m_e^2,$$

$$g(x) = -p_0 + q_0 + E_{p+q} = 0,$$

$$E_{p+q} = E_p - q_0,$$

$$\begin{aligned} 2|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| &= E_{p+q}^2 - |\vec{p}|^2 - |\vec{q}|^2 - m_e^2, \\ &= (E_p - q_0)^2 - |\vec{p}|^2 - |\vec{q}|^2 - m_e^2, \\ &= E_p^2 - 2E_p q_0 + q_0^2 - |\vec{p}|^2 - |\vec{q}|^2 - m_e^2, \\ &= -2E_p q_0 + q_0^2 - |\vec{q}|^2, \\ &= -2E_p q_0 + q_\mu^2, \\ |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| &= -E_p q_0 + \frac{1}{2}q_\mu^2, \end{aligned}$$

maka

$$\cos \theta = \frac{-E_p q_0 + \frac{1}{2} q_\mu^2}{|\vec{p}| |\vec{q}|}.$$

Persamaan menjadi:

$$\begin{aligned} \Pi_{22}^{Im(V)} &= -\frac{1}{4\pi|\vec{q}|} \int dE_p \left\{ |\vec{p}|^2 \left[1 - \left(\frac{-E_p q_0 + \frac{1}{2} q_\mu^2}{|\vec{p}| |\vec{q}|} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} q_\mu^2 \right\} F(E_p, E_p - q_0), \\ &= -\frac{1}{4\pi|\vec{q}|} \int dE_p \left[|\vec{p}|^2 \left(1 - \left(\frac{4E_p^2 q_0^2}{4|\vec{q}|^2} - \frac{4E_p q_0 q_\mu^2}{4|\vec{q}|^2} + \frac{q_\mu^4}{4|\vec{p}|^2} \right)^2 - \frac{1}{2} q_\mu^2 \right) \right] F(E_p, E_p - q_0), \\ &= -\frac{1}{4\pi|\vec{q}|} \int dE_p \left(E_p^2 - m_e^2 - \frac{E_p^2 q_0^2}{|\vec{q}|^2} - \frac{E_p q_0 q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} - \frac{q_\mu^4}{4|\vec{p}|^2} \right)^2 - \frac{1}{2} q_\mu^2 \right] F(E_p, E_p + q_0), \\ &= -\frac{1}{4\pi|\vec{q}|} \int dE_p \left[E_p^2 \left(\frac{|\vec{q}|^2 - q_0^2}{|\vec{q}|^2} \right) + \frac{E_p q_0 q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} - \frac{q_\mu^4}{4|\vec{p}|^2} - m_e^2 - \frac{1}{2} q_\mu^2 \right] F(E_p, E_p - q_0), \\ &= \frac{q_\mu^2}{4\pi|\vec{q}|^3} \int dE_p \left(E_p^2 - E_p q_0 + \frac{1}{4} q_0^2 + \frac{1}{4} |\vec{q}|^2 + \frac{m_e^2 |\vec{q}|^2}{q_\mu^2} \right) F(E_p, E_p - q_0), \\ \Pi_{22}^{Im(V)} &= \frac{q_\mu^2}{4\pi|\vec{q}|^3} \int dE_p \left[(E_p - \frac{1}{2} q_0)^2 + \frac{1}{4} |\vec{q}|^2 + \frac{m_e^2 |\vec{q}|^2}{q_\mu^2} \right] F(E_p, E_p - q_0). \end{aligned}$$

Substitusi seperti pada polarisasi longitudinal yaitu persamaan (B.19)

$$\Pi_{22}^{Im(V)} = \frac{q_\mu^2}{4\pi|\vec{q}|^3} \int dE'_p \left[(E'_p + \frac{1}{2} q_0)^2 + \frac{1}{4} |\vec{q}|^2 + \frac{m_e^2 |\vec{q}|^2}{q_\mu^2} \right] F(E'_p + q_0, E'_p),$$

atau

$$\Pi_{22}^{Im(V)} = \frac{q_\mu^2}{4\pi|\vec{q}|^3} \int dE_p \left[(E_p + \frac{1}{2} q_0)^2 + \frac{1}{4} |\vec{q}|^2 + \frac{m_e^2 |\vec{q}|^2}{q_\mu^2} \right] F(E_p + q_0, E_p).$$

Dari persamaan (B.21),

$$\begin{aligned} \Pi_T^{Im} &= \Pi_{22}^{Im(V)}, \\ &= \frac{q_\mu^2}{4\pi|\vec{q}|^3} \int dE_p \left[(E_p + \frac{1}{2} q_0)^2 + \frac{1}{4} |\vec{q}|^2 + \frac{m_e^2 |\vec{q}|^2}{q_\mu^2} \right] F(E_p + q_0, E_p). \end{aligned}$$

Hasil penurunan persamaan (B.22) ditambah persamaan (B.23) adalah

$$\begin{aligned} \Pi_T^{Im} &= \frac{q_\mu^2}{4\pi|\vec{q}|^3} \int_{e-}^{\infty} dE_p \left[(E_p + \frac{1}{2} q_0)^2 + \frac{1}{4} |\vec{q}|^2 + \frac{m_e^2 |\vec{q}|^2}{q_\mu^2} \right] \\ &\quad \left[F(E_p, E_p + q_0) + F(E_p + q_0, E_p) \right]. \quad (B.25) \\ &= Im \Pi_T(q_0, q). \end{aligned}$$

B.2 Polarisasi Aksial (*Axial Polarization*)

Dari persamaan (B.13) untuk bagian aksial adalah:

$$\Pi_{\mu\nu}^{Im(A)} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3p}{8E_p E_{p+q}} f(E_p)[1 - f(E_{p+q})] F_{\mu\nu}^A(p, p+q) \times \{\delta[q_0 - (E_{p+q} - E_p)] + \delta[q_0 - (E_p - E_{p+q})]\}.$$

Perhitungan $F_{\mu\nu}^A(p, p+q)$.

Dari persamaan (A.6),

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^A(p, p+q) &= Tr[(\not{p} + m_e)\gamma_\mu\gamma^5(\not{p} + \not{q} + m_e)\gamma_\nu\gamma^5], \\ &= Tr(\not{p}\gamma_\mu\gamma^5\not{p}\gamma_\nu\gamma^5 + \not{p}\gamma_\mu\gamma^5\not{q}\gamma_\nu\gamma^5 + \not{p}\gamma_\mu\gamma^5m_e\gamma_\nu\gamma^5 \\ &\quad + m_e\gamma_\mu\gamma^5\not{p}\gamma_\nu\gamma^5 + m_e\gamma_\mu\gamma^5\not{q}\gamma_\nu\gamma^5 + m_e\gamma_\mu\gamma^5m_e\gamma_\nu\gamma^5), \\ &= Tr(\gamma_\alpha p^\alpha \gamma_\mu \gamma^5 \gamma_\beta p^\beta \gamma_\nu \gamma^5 + \gamma_\alpha p^\alpha \gamma_\mu \gamma^5 \gamma_\beta q^\beta \gamma_\nu \gamma^5 + \gamma_\alpha p^\alpha \gamma_\mu \gamma^5 m_e \gamma_\nu \gamma^5 \\ &\quad + m_e \gamma_\mu \gamma^5 \gamma_\alpha p^\alpha \gamma_\nu \gamma^5 + m_e \gamma_\mu \gamma^5 \gamma_\alpha q^\alpha \gamma_\nu \gamma^5 + m_e \gamma_\mu \gamma^5 m_e \gamma_\nu \gamma^5). \end{aligned}$$

Dari sifat matriks $(\gamma^5)^2 = 1$ dan theorema Trace seperti pada bagian longitudinal maka persamaan menjadi,

$$F_{\mu\nu}^A(p, p+q) = Tr(\gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu) p^\alpha p^\beta + \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu p^\alpha q^\beta - m_e^2 Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu),$$

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^A(p, p+q) &= 4(p_\mu p_\nu + p_\nu p_\mu - p^2 g_{\mu\nu} + p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu - p \cdot q g_{\mu\nu}) - m_e^2 (4g_{\mu\nu}), \\ &= 4(2p_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu - p \cdot q g_{\mu\nu} - 2m_e^2 g_{\mu\nu}), \end{aligned}$$

dari persamaan (B.14),

$$F_{\mu\nu}^V(p, p+q) = 4(2p_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu - p \cdot q g_{\mu\nu}),$$

maka:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^A(p, p+q) &= F_{\mu\nu}^V - 8m_e^2 g_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^V + F_A g_{\mu\nu}. \\ F_A &= -8m_e^2. \end{aligned}$$

Persamaan polarisasi menjadi:

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}^{Im(A)} &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3p}{8E_p E_{p+q}} (F_{\mu\nu}^V - 8 m_e^2 g_{\mu\nu}) f(E_p) [1 - f(E_{p+q})] \\ &\quad \times \{ \delta[q_0 - (E_{p+q} - E_p)] + \delta[q_0 - (E_p - E_{p+q})] \}, \\ &= \Pi_{\mu\nu}^{Im(v)} + \Pi_A g_{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{B.26}$$

$$\begin{aligned}\Pi_A^{Im} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3p}{E_p E_{p+q}} m_e^2 f(E_p) [1 - f(E_{p+q})] \\ &\quad \times \{ \delta[q_0 - (E_{p+q} - E_p)] + \delta[q_0 - (E_p - E_{p+q})] \}.\end{aligned}$$

Dipisah menjadi 2 masing-masing delta function:

$$\begin{aligned}\Pi_A^{Im} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3p}{E_p E_{p+q}} m_e^2 f(E_p) [1 - f(E_{p+q})] \\ &\quad \times \delta[q_0 - (E_{p+q} - E_p)],\end{aligned}\tag{B.27}$$

dan

$$\begin{aligned}\Pi_A^{Im} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3p}{E_p E_{p+q}} m_e^2 f(E_p) [1 - f(E_{p+q})] \\ &\quad \times \delta[q_0 - (E_p - E_{p+q})].\end{aligned}\tag{B.28}$$

Perhitungan persamaan (B.27):

Dengan penurunan seperti pada polarisasi longitudinal yaitu persamaan (B.18), maka persamaan (B.27) menjadi:

$$\Pi_A^{Im} = \frac{m_e^2}{(2\pi)^2} \int dE F(E_p, E_p + q_0).$$

Perhitungan persamaan (B.28):

$$\begin{aligned}\Pi_A^{Im} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3p}{E_p E_{p+q}} m_e^2 f(E_p) [1 - f(E_{p+q})] \\ &\quad \times \delta[q_0 - (E_p - E_{p+q})].\end{aligned}$$

Dengan penurunan seperti pada polarisasi longitudinal yaitu persamaan (B.19), maka persamaan diatas menjadi:

$$\Pi_A^{Im} = \frac{m_e^2}{(2\pi)^2} \int dE F(E_p - q_0, E_p).$$

Dengan substitusi seperti pada polarisasi longitudinal juga, yaitu persamaan (B.19), maka

$$\Pi_A^{Im} = \frac{m_e^2}{(2\pi)^2} \int dE F(E_p + q_0, E_p).$$

Hasil penurunan persamaan (B.27) ditambah persamaan (B.28) adalah

$$\begin{aligned} \Pi_A^{Im} &= \frac{m_e^2}{(2\pi)^2} \int_{e_-}^{\infty} dE [F(E_p, E_p + q_0) + F(E_p + q_0, E_p)]. \quad (B.29) \\ &= Im \Pi_A(q_0, q). \end{aligned}$$

B.3 Polarisasi Vektor-Aksial (*Vector-Axial Polarization*)

Dan dari persamaan (B.13) untuk bagian vektor-aksial adalah,

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)} &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3p}{8E_p E_{p+q}} f(E_p)[1 - f(E_{p+q})] F_{\mu\nu}^{VA}(p, p+q) \\ &\quad \times \{\delta[q_0 - (E_{p+q} - E_p)] + \delta[q_0 - (E_p - E_{p+q})]\}. \end{aligned}$$

Dipisah menjadi 2 masing-masing delta function:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)} &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3p}{8E_p E_{p+q}} f(E_p)[1 - f(E_{p+q})] F_{\mu\nu}^{VA}(p, p+q) \\ &\quad \times \delta[q_0 - (E_{p+q} - E_p)], \quad (B.30) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)} &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3p}{8E_p E_{p+q}} f(E_p)[1 - f(E_{p+q})] F_{\mu\nu}^{VA}(p, p+q) \\ &\quad \times \delta[q_0 - (E_p - E_{p+q})]. \quad (B.31) \end{aligned}$$

Perhitungan persamaan (B.30):

Dengan penurunan seperti pada polarisasi longitudinal yaitu persamaan (B.18), maka persamaan (B.30) menjadi:

$$\Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)} = \frac{1}{16\pi|\vec{q}|} \int dE_p F(E_p, E_p + q_0) F_{\mu\nu}^{VA}(p, p+q). \quad (B.32)$$

Perhitungan $F_{\mu\nu}^{VA}(p, p+q)$:
menurut persamaan (A.5),

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}^{VA}(p, p+q) &= Tr \frac{1}{2} (\not{p} + m_e) \gamma_\mu \gamma^5 (\not{p} + \not{q} + m_e) \gamma_\nu \\
&\quad + Tr \frac{1}{2} (\not{p} + m_e) \gamma_\mu (\not{p} + \not{q} + m_e) \gamma_\nu \gamma^5, \\
&= Tr \frac{1}{2} (\not{p} \gamma_\mu \gamma^5 \not{p} \gamma_\nu + \not{p} \gamma_\mu \gamma^5 \not{q} \gamma_\nu + \not{p} \gamma_\mu \gamma^5 m_e \gamma_\nu \\
&\quad + m_e \gamma_\mu \gamma^5 \not{p} \gamma_\nu + m_e \gamma_\mu \gamma^5 \not{q} \gamma_\nu + m_e \gamma_\mu \gamma^5 m_e \gamma_\nu \\
&\quad + \not{p} \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu \gamma^5 + \not{p} \gamma_\mu \not{q} \gamma_\nu \gamma^5 + \not{p} \gamma_\mu m_e \gamma_\nu \gamma^5 \\
&\quad + m_e \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu \gamma^5 + m_e \gamma_\mu \not{q} \gamma_\nu \gamma^5 + m_e \gamma_\mu m_e \gamma_\nu \gamma^5), \\
&= Tr \frac{1}{2} (\gamma_\alpha p^\alpha \gamma_\mu \gamma^5 \gamma_\beta p^\beta \gamma_\nu + \gamma_\alpha p^\alpha \gamma_\mu \gamma^5 \gamma_\beta q^\beta \gamma_\nu + \gamma_\alpha p^\alpha \gamma_\mu \gamma^5 m_e \gamma_\nu \\
&\quad + m_e \gamma_\mu \gamma^5 \gamma_\alpha p^\alpha \gamma_\nu + m_e \gamma_\mu \gamma^5 \gamma_\alpha q^\alpha \gamma_\nu + m_e \gamma_\mu \gamma^5 m_e \gamma_\nu \\
&\quad + \gamma_\alpha p^\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta p^\beta \gamma_\nu \gamma^5 + \gamma_\alpha p^\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta q^\beta \gamma_\nu \gamma^5 + \gamma_\alpha p^\alpha \gamma_\mu m_e \gamma_\nu \gamma^5 \\
&\quad + m_e \gamma_\mu \gamma_\alpha p^\alpha \gamma_\nu \gamma^5 + m_e \gamma_\mu \gamma_\alpha q^\alpha \gamma_\nu \gamma^5 + m_e \gamma_\mu m_e \gamma_\nu \gamma^5).
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan theorema Trace:

$$\begin{aligned}
Tr(\gamma_5 \underbrace{\gamma_\mu \dots \dots}_{\text{kurang dari 4}}) &= 0 \\
\gamma_\mu \gamma_5 &= -\gamma_5 \gamma_\mu,
\end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}^{VA}(p, p+q) &= Tr(\gamma^5 \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu) p^\alpha p^\beta + Tr(\gamma^5 \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu) p^\alpha q^\beta, \\
&= Tr(\gamma^5 \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu) (p^\alpha p^\beta + p^\alpha q^\beta).
\end{aligned}$$

dan theorema Trace lagi:

$$Tr(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta) = 4i \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta},$$

maka:

$$F_{\mu\nu}^{VA}(p, p+q) = 4i \epsilon_{\alpha\mu\beta\nu} (p^\alpha p^\beta + p^\alpha q^\beta),$$

atau

$$F_{\mu\nu}^{VA}(p, p+q) = -4i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(p^\alpha p^\beta + p^\alpha q^\beta).$$

Tensor levi-civita:

$$\begin{aligned}\epsilon_{\alpha\mu\beta\nu}p^\alpha p^\beta &= \frac{1}{2}(\epsilon_{\alpha\mu\beta\nu}p^\alpha p^\beta + \epsilon_{\beta\mu\alpha\nu}p^\beta p^\alpha), \\ &= \frac{1}{2}(\epsilon_{\alpha\mu\beta\nu}p^\alpha p^\beta - \epsilon_{\alpha\mu\beta\nu}p^\beta p^\alpha), \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\mu\beta\nu}(p^\alpha p^\beta - p^\beta p^\alpha), \\ &= 0.\end{aligned}$$

Maka persamaan (B.32) menjadi:

$$F_{\mu\nu}^{VA}(p, p+q) = -4i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}p^\alpha q^\beta. \quad (\text{B.33})$$

Kemudian diketahui,

$$q_\mu = (q_0, q_1, q_2, q_3),$$

karena sumbu z dihimpitkan maka:

$$q_\mu = (q_0, |\vec{q}|, 0, 0),$$

dan

$$\begin{aligned}p_\mu &= (p_0, p_1, p_2, p_3), \\ &= (p_0, |\vec{p}| \cos \theta, |\vec{p}| \sin \theta \cos \varphi, |\vec{p}| \sin \theta \sin \varphi),\end{aligned}$$

fungsi-fungsi ganjil:

$$\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0, \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0,$$

maka:

$$p_\mu = (p_0, |\vec{p}| \cos \theta, 0, 0) = (E_p, |\vec{p}| \cos \theta, 0, 0).$$

Karena,

$$\mu, \nu, \alpha, \beta \quad \text{tidak boleh ada yang sama}$$

maka yang berharga tidak sama dengan nol adalah

$$\alpha = 1, \beta = 0 \quad \text{dan} \quad \alpha = 0, \beta = 1,$$

maka persamaan (B.33) menjadi,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{VA} &= -4i \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\alpha q^\beta = 4i \epsilon_{\alpha\mu\beta\nu} p^\alpha q^\beta, \\ &= 4i \epsilon_{1\mu 0\nu} p^1 q^0 + 4i \epsilon_{0\mu 1\nu} p^0 q^1, \\ &= 4i (\epsilon_{1\mu 0\nu} p^1 q^0 + \epsilon_{0\mu 1\nu} p^0 q^1), \\ &= 4i (\epsilon_{1\mu 0\nu} |\vec{p}| q_0 \cos \theta + \epsilon_{0\mu 1\nu} E_p |\vec{q}|), \\ &= 4i (\epsilon_{1\mu 0\nu} |\vec{p}| q_0 \cos \theta - \epsilon_{1\mu 0\nu} E_p |\vec{q}|), \\ &= 4i \epsilon_{1\mu 0\nu} (|\vec{p}| q_0 \cos \theta - E_p |\vec{q}|). \end{aligned}$$

Substitusi kedalam persamaan (B.32):

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)} &= \frac{1}{16\pi|\vec{q}|} \int dE_p 4i \epsilon_{1\mu 0\nu} (|\vec{p}| q_0 \cos \theta - E_p |\vec{q}|) F(E_p, E_p + q_0), \\ &= \frac{i \epsilon_{1\mu 0\nu}}{4\pi|\vec{q}|} \int dE_p (|\vec{p}| q_0 \cos \theta - E_p |\vec{q}|) F(E_p, E_p + q_0). \end{aligned}$$

Seperti pada polarisasi longitudinal yaitu persamaan (B.18),

$$\cos \theta = \frac{2E_p q_0 + q_\mu^2}{2|\vec{p}||\vec{q}|},$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)} &= \frac{1}{16\pi|\vec{q}|} \int dE_p 4i \epsilon_{1\mu 0\nu} (|\vec{p}| q_0 \cos \theta - E_p |\vec{q}|) F(E_p, E_p + q_0), \\ &= \frac{i \epsilon_{1\mu 0\nu}}{4\pi|\vec{q}|} \int dE_p [|\vec{p}| q_0 (\frac{2E_p q_0 + q_\mu^2}{2|\vec{p}||\vec{q}|}) - E_p |\vec{q}|] F(E_p, E_p + q_0), \\ &= \frac{i \epsilon_{1\mu 0\nu}}{8\pi|\vec{q}|^2} \int dE_p (2E_p q_0^2 + q_\mu^2 q_0 - 2E_p |\vec{q}|^2) F(E_p, E_p + q_0), \\ &= \frac{i \epsilon_{1\mu 0\nu}}{8\pi|\vec{q}|^2} \int dE_p [2E_p (q_0^2 - |\vec{q}|^2) + q_\mu^2 q_0] F(E_p, E_p + q_0), \\ &= \frac{i \epsilon_{1\mu 0\nu}}{8\pi|\vec{q}|^2} \int dE_p (2E_p q_\mu^2 + q_\mu^2 q_0) F(E_p, E_p + q_0), \\ &= i \epsilon_{1\mu 0\nu} |\vec{q}| \left[\frac{q_\mu^2}{8\pi|\vec{q}|^3} \int dE_p (2E_p + q_0) F(E_p, E_p + q_0) \right]. \end{aligned}$$

Secara umum persamaan $\Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)}$ dapat ditulis sebagai,

$$\Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)} = i \epsilon_{1\mu 0\nu} |\vec{q}| \Pi_{VA},$$

dengan,

$$\Pi_{VA} = \frac{q_\mu^2}{8\pi|\vec{q}|^3} \int dE_p (2E_p + q_0) F(E_p, E_p + q_0).$$

Perhitungan persamaan (B.31):

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)} &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3p}{8E_p E_{p+q}} f(E_p)[1 - f(E_{p+q})] F_{\mu\nu}^{VA}(p, p+q) \\ &\quad \times \delta[q_0 - (E_p - E_{p+q})]. \end{aligned}$$

Dengan penurunan seperti pada polarisasi longitudinal yaitu persamaan (B.19) maka persamaan menjadi:

$$\Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)} = \frac{1}{16\pi|\vec{q}|} \int dE_p F(E_p, E_p - q_0) F_{\mu\nu}^{VA}(p, p+q),$$

dan,

$$F_{\mu\nu}^{VA} = -4i \epsilon_{1\mu 0\nu} (|\vec{p}|q_0 \cos \theta + E_p |\vec{q}|),$$

maka,

$$\Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)} = -\frac{1}{16\pi|\vec{q}|} \int dE_p [4i \epsilon_{1\mu 0\nu} (|\vec{p}|q_0 \cos \theta + E_p |\vec{q}|)] F(E_p, E_p - q_0).$$

Juga seperti pada polarisasi longitudinal persamaan (B.19),

$$\cos \theta = \frac{-2E_p q_0 + q_\mu^2}{2|\vec{p}||\vec{q}|},$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)} &= -\frac{i \epsilon_{1\mu 0\nu}}{4\pi|\vec{q}|} \int dE_p \left[|\vec{p}|q_0 \left(\frac{-2E_p q_0 + q_\mu^2}{2|\vec{p}||\vec{q}|} \right) + E_p |\vec{q}| \right] F(E_p, E_p - q_0), \\ &= -\frac{i \epsilon_{1\mu 0\nu}}{8\pi|\vec{q}|^2} \int dE_p (-2E_p q_0^2 + q_0 q_\mu^2 + 2E_p |\vec{q}|^2) F(E_p, E_p - q_0), \\ &= -\frac{i \epsilon_{1\mu 0\nu}}{8\pi|\vec{q}|^2} \int dE_p [-2E_p (q_0^2 - |\vec{q}|^2) + q_0 q_\mu^2] F(E_p, E_p - q_0) \\ &= -\frac{i \epsilon_{1\mu 0\nu}}{8\pi|\vec{q}|^2} \int dE_p (-2E_p q_\mu^2 + q_0 q_\mu^2) F(E_p, E_p - q_0), \\ &= \frac{i \epsilon_{1\mu 0\nu} q_\mu^2}{8\pi|\vec{q}|^2} \int dE_p (2E_p - q_0) F(E_p, E_p - q_0). \end{aligned}$$

Substitusi seperti pada polarisasi longitudinal yaitu persamman (B.19)

$$\Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)} = \frac{i \epsilon_{1\mu 0\nu} q_\mu^2}{8\pi |\vec{q}|^2} \int dE'_p (2E'_p + q_0) F(E'_p + q_0, E'_p),$$

atau

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)} &= \frac{i \epsilon_{1\mu 0\nu} q_\mu^2}{8\pi |\vec{q}|^2} \int dE_p (2E_p + q_0) F(E_p + q_0, E_p), \\ &= i \epsilon_{1\mu 0\nu} |\vec{q}| \left[\frac{q_\mu^2}{8\pi |\vec{q}|^3} \int dE_p (2E_p + q_0) F(E_p + q_0, E_p) \right], \\ &= i \epsilon_{1\mu 0\nu} |\vec{q}| \Pi_{VA}, \end{aligned}$$

Secara umum persamaan $\Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)}$ dapat ditulis sebagai,

$$\Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)}(q) = \epsilon_{\alpha\mu 0\nu} q^\alpha \Pi_{VA} \quad (\text{B.34})$$

dengan,

$$\Pi_{VA} = \frac{q_\mu^2}{8\pi |\vec{q}|^3} \int dE_p (2E_p + q_0) F(E_p + q_0, E_p).$$

Hasil penurunan persamaan (B.30) ditambah persamaan (B.31) adalah

$$\begin{aligned} \Pi_{VA} &= \frac{q_\mu^2}{8\pi |\vec{q}|^3} \int_{e_-}^{\infty} dE_p (2E_p + q_0) \\ &\quad \times [F(E_p, E_p + q_0) + F(E_p + q_0, E_p)]. \quad (\text{B.35}) \\ &= Im \Pi_{VA}(q_0, q). \end{aligned}$$

Lampiran C

Pembuktian

$$F_{\mu\nu}(p, p + q) = F_{\mu\nu}(p, p - q)$$

Misal untuk bagian vektor digunakan persamaan (A.4):

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^V(p, p + q) &= Tr[(\not{p} + m_e)\gamma_\mu(\not{p} + \not{q} + m_e)\gamma_\nu], \\ &= 4(2p_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu - p \cdot q g_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (C.1)$$

Prinsip konservasi arus: $q^\mu F_{\mu\nu} = 0$, maka:

$$\begin{aligned} q^\mu F_{\mu\nu}^V(p, p + q) &= 0, \\ 4q^\mu (2p_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu - p \cdot q g_{\mu\nu}) &= 0, \\ 8p \cdot q p_\nu + 4p \cdot q q_\nu + 4q^2 p_\nu - 4q_\nu p \cdot q &= 0, \\ 8p \cdot q p_\nu + 4q^2 p_\nu &= 0, \\ 2p \cdot q = -q^2 \rightarrow p \cdot q = -\frac{q^2}{2} \quad \text{dan} \quad -2\frac{p \cdot q}{q^2} &= 1. \end{aligned} \quad (C.2)$$

Persamaan (C.2) disubstitusikan ke persamaan (C.1), diperoleh:

$$F_{\mu\nu}^V(p, p + q) = 4 \left[2p_\mu p_\nu - 2\frac{p \cdot q}{q^2} (p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu) + \frac{q^2}{2} g_{\mu\nu} \right]. \quad (C.3)$$

Kemudian $(p, p + q)$ diganti $(p, p - q)$ juga pada persamaan (A.4):

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^V(p, p - q) &= Tr[(\not{p} + m_e)\gamma_\mu(\not{p} - \not{q} + m_e)\gamma_\nu], \\ &= 4(2p_\mu p_\nu - p_\mu q_\nu - p_\nu q_\mu + p \cdot q g_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (C.4)$$

Dengan menggunakan cara yang sama diperoleh:

$$\begin{aligned}
 q^\mu F_{\mu\nu}^V(p, p - q) &= 0, \\
 4q^\mu (2p_\mu p_\nu - p_\mu q_\nu - p_\nu q_\mu + p \cdot q g_{\mu\nu}) &= 0, \\
 8p \cdot q p_\nu - 4p \cdot q q_\nu - 4q^2 p_\nu + 4q_\nu p \cdot q &= 0, \\
 8p \cdot q p_\nu - 4q^2 p_\nu &= 0, \\
 2p \cdot q = q^2 \rightarrow p \cdot q = \frac{q^2}{2} \quad \text{dan} \quad 2\frac{p \cdot q}{q^2} = 1. & \quad (C.5)
 \end{aligned}$$

Juga persamaan (C.5) disubstitusikan ke persamaan (C.4), diperoleh:

$$F_{\mu\nu}^V(p, p + q) = 4 \left[2p_\mu p_\nu - 2\frac{p \cdot q}{q^2} (p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu) + \frac{q^2}{2} g_{\mu\nu} \right]. \quad (C.6)$$

Tampak bahwa persamaan (C.3) sama dengan persamaan (C.6), sehingga dapat disimpulkan bahwa:

$$F_{\mu\nu}(p, p + q) = F_{\mu\nu}(p, p - q).$$

Untuk kontribusi yang lain (vektor-aksial dan aksial) dengan cara yang serupa akan diperoleh hasil yang sama.

Lampiran D

Tensor Neutrino

D.1 Interaksi lemah

Perhitungan tensor neutrino untuk interaksi lemah didapatkan dari persamaan (A.7),

$$L_{\nu}^{\mu\nu(W)} = Tr[(\not{k} + m_{\nu})\gamma^{\mu}(1 + \gamma^5)(\not{k}' + m_{\nu})\gamma^{\nu}(1 + \gamma^5)].$$

Massa neutrino dianggap nol ($m_{\nu} \approx 0$), maka:

$$\begin{aligned} L_{\nu}^{\mu\nu(W)} &= Tr[\not{k}(\gamma^{\mu} + \gamma^{\mu}\gamma^5)\not{k}'(\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^5)], \\ &= Tr[\not{k}\gamma^{\mu}\not{k}'\gamma^{\nu}] + Tr[\not{k}\gamma^{\mu}\gamma^5\not{k}'\gamma^{\nu}] \\ &\quad + Tr[\not{k}\gamma^{\mu}\gamma^5\not{k}'\gamma^{\nu}\gamma^5] + Tr[\not{k}\gamma^{\mu}\not{k}'\gamma^{\nu}\gamma^5] \\ &= 2Tr[\not{k}\gamma^{\mu}\not{k}'\gamma^{\nu}] + 2Tr[\not{k}\gamma^{\mu}\not{k}'\gamma^{\nu}\gamma^5], \end{aligned}$$

karena $\not{k} = k_{\alpha}\gamma^{\alpha} = k^{\alpha}\gamma_{\alpha}$, maka:

$$L_{\nu}^{\mu\nu(W)} = 2k_{\alpha}k'_{\beta}(Tr[\gamma^{\alpha}\gamma^{\mu}\gamma^{\beta}\gamma^{\nu}] + Tr[\gamma^{\alpha}\gamma^{\mu}\gamma^{\beta}\gamma^{\nu}\gamma^5]).$$

Dengan menggunakan theorema Trace:

$$\begin{aligned} Tr[\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}] &= 4[g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}] \\ Tr[\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^5] &= Tr[\gamma^5\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}] = -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \end{aligned}$$

persamaan menjadi:

$$L_{\nu}^{\mu\nu(W)} = 2k_{\alpha}k'_{\beta}[4(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu} - g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}) - 4i\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu}],$$

karena $k_{\alpha}g^{\alpha\mu} = k^{\mu}$ dan $k^{\alpha}k^{\alpha'} = k.k'$, maka:

$$L_{\nu}^{\mu\nu(W)} = 8[k^{\mu}k^{\nu'} + k^{\nu}k^{\mu'} - g^{\mu\nu}(k.k') - i\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu}k_{\alpha}k'_{\beta}],$$

dan karena $k^{\nu'} = k^{\nu} - q^{\nu}$, $k.k' = -k.q$ dan $k.k = k^2 = 0$,

maka didapatkan tensor neutrino interaksi lemah adalah,

$$L_{\nu}^{\mu\nu(W)} = 8[2k^{\mu}k^{\nu} - (k^{\mu}q^{\nu} + k^{\nu}q^{\mu}) + g^{\mu\nu}(k.q) - i\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu}k_{\alpha}k'_{\beta}]. \quad (D.1)$$

D.2 Interaksi Elektromagnetik

Perhitungan tensor neutrino untuk interaksi elektromagnetik didapatkan dari persamaan (A.10),

$$L_{\nu}^{\mu\nu(EM)} = Tr \left\{ (k + m_{\nu}) \left[f_{m\nu}\gamma^{\mu} + g_{1\nu}\gamma_{\mu}\gamma^5 - (f_{2\nu} + ig_{2\nu}\gamma^5) \frac{P_{\mu}}{2m_e} \right] \right. \\ \left. \times (k' + m_{\nu}) \left[f_{m\nu}\gamma^{\mu} + g_{1\nu}\gamma_{\mu}\gamma^5 - (f_{2\nu} + ig_{2\nu}\gamma^5) \frac{P_{\nu}}{2m_e} \right] \right\}.$$

Massa neutrino dianggap nol ($m_{\nu} \approx 0$), maka:

$$L_{\nu}^{\mu\nu(EM)} = Tr \left\{ k \left[f_{m\nu}\gamma^{\mu} + g_{1\nu}\gamma_{\mu}\gamma^5 - (f_{2\nu} + ig_{2\nu}\gamma^5) \frac{P_{\mu}}{2m_e} \right] \right. \\ \left. \times k' \left[f_{m\nu}\gamma^{\mu} + g_{1\nu}\gamma_{\mu}\gamma^5 - (f_{2\nu} + ig_{2\nu}\gamma^5) \frac{P_{\nu}}{2m_e} \right] \right\}.$$

Dengan menggunakan theorema Trace:

$$\underbrace{Tr[\gamma_{\mu} \dots \gamma_{\nu}]}_{\text{ganjil}} = 0 \\ Tr[\gamma_5 \underbrace{\gamma_{\mu} \dots}_{\text{kurang dari 4}}] = 0,$$

maka persamaan menjadi,

$$\begin{aligned}
L_{\nu}^{\mu\nu(EM)} &= f_{m\nu}^2 Tr[k\gamma^{\mu} \not{k}'\gamma^{\nu}] + g_{1\nu}^2 Tr[\not{k}\gamma^{\mu}\gamma^5 \not{k}'\gamma^{\nu}\gamma^5] \\
&\quad + f_{m\nu}g_{1\nu} Tr[\not{k}\gamma^{\mu} \not{k}'\gamma^{\nu}\gamma^5] + f_{m\nu}g_{1\nu} Tr[\not{k}\gamma^{\mu}\gamma^5 \not{k}'\gamma^{\nu}] \\
&\quad + f_{2\nu}^2 \frac{P^{\mu}P^{\nu}}{4m_e^2} Tr[\not{k} \not{k}'] - g_{2\nu}^2 \frac{P^{\mu}P^{\nu}}{4m_e^2} Tr[\not{k}\gamma^5 \not{k}'\gamma^5] \\
&= (f_{m\nu}^2 + g_{1\nu}^2) Tr[\not{k}\gamma^{\mu} \not{k}'\gamma^{\nu}] \\
&\quad + \frac{f_{2\nu}^2 + g_{2\nu}^2}{4m_e^2} P^{\mu}P^{\nu} Tr[\not{k} \not{k}'] \\
&\quad + 2f_{m\nu}g_{1\nu} Tr[\not{k}\gamma^{\mu} \not{k}'\gamma^{\nu}\gamma^5].
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan $P^{\mu} = 2k^{\mu} - q^{\mu}$,

$$\begin{aligned}
L_{\nu}^{\mu\nu(EM)} &= 4(f_{m\nu}^2 + g_{1\nu}^2)[2k^{\mu}k^{\nu} - (k^{\mu}q^{\nu} + k^{\nu}q^{\mu}) \\
&\quad + g^{\mu\nu}(k.q)] - i 8f_{m\nu}g_{1\nu}\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu}k_{\alpha}k'_{\beta} \\
&\quad - \frac{f_{2\nu}^2 + g_{2\nu}^2}{4m_e^2} 4(2k^{\mu} - q^{\mu})(2k^{\nu} - q^{\nu})(k.q),
\end{aligned}$$

maka didapatkan tensor neutrino interaksi elektromagnetik adalah,

$$\begin{aligned}
L_{\nu}^{\mu\nu(EM)} &= 4(f_{m\nu}^2 + g_{1\nu}^2)[2k^{\mu}k^{\nu} - (k^{\mu}q^{\nu} + k^{\nu}q^{\mu}) \\
&\quad + g^{\mu\nu}(k.q)] - i 8f_{m\nu}g_{1\nu}\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu}k_{\alpha}k'_{\beta} \\
&\quad - \frac{f_{2\nu}^2 + g_{2\nu}^2}{m_e^2}(k.q)[4k^{\mu}k^{\nu} - 2(k^{\mu}q^{\nu} + k^{\nu}q^{\mu}) + q^{\mu}q^{\nu}]. \quad (D.2)
\end{aligned}$$

D.3 Interferensi

Perhitungan tensor neutrino untuk interferensi antara interaksi lemah dan elektromagnetik didapatkan dari persamaan (A.14),

$$\begin{aligned}
L_{\nu}^{\mu\nu(INT)} &= Tr \left\{ (\not{k} + m_{\nu})\gamma^{\mu}(1 + \gamma^5)(\not{k}' + m_{\nu}) \right. \\
&\quad \times \left. \left[f_{m\nu}\gamma^{\nu} + g_{1\nu}\gamma^{\nu}\gamma^5 - (f_{2\nu} + ig_{2\nu}\gamma^5)\frac{P_{\nu}}{2m_e} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Massa neutrino dianggap nol ($m_\nu \approx 0$), maka:

$$L_\nu^{\mu\nu(INT)} = Tr \left\{ \not{k}(\gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^5) \not{k}' \right. \\ \left. \times \left[f_{m\nu} \gamma^\nu + g_{1\nu} \gamma^\nu \gamma^5 - (f_{2\nu} + i g_{2\nu} \gamma^5) \frac{P_\nu}{2m_e} \right] \right\}.$$

Dengan menggunakan theorema Trace seperti pada interaksi lemah dan elektromagnetik didapatkan,

$$L_\nu^{\mu\nu(INT)} = f_{m\nu} Tr[\not{k} \gamma^\mu \not{k}' \gamma^\nu] + g_{1\nu} Tr[\not{k} \gamma^\mu \gamma^5 \not{k}' \gamma^\nu \gamma^5] \\ + (f_{m\nu} + g_{1\nu}) Tr[\gamma^5 \not{k} \gamma^\mu \not{k}' \gamma^\nu], \\ = (f_{m\nu} + g_{1\nu}) \{ Tr[\not{k} \gamma^\mu \not{k}' \gamma^\nu] + Tr[\gamma^5 \not{k} \gamma^\mu \not{k}' \gamma^\nu] \},$$

maka didapatkan tensor neutrino untuk interferensi adalah,

$$L_\nu^{\mu\nu(INT)} = 4(f_{m\nu} + g_{1\nu}) [2k^\mu k^\nu - (k^\mu q^\nu + k^\nu q^\mu) + g^{\mu\nu} (k \cdot q) \\ - i \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} k_\alpha k'_\beta]. \quad (D.3)$$

Lampiran E

Kontraksi Bagian Vektor, Vektor-Aksial dan Aksial

Untuk mempermudah perhitungan kontraksi interaksi lemah, elektromagnetik dan interferensi dihitung terlebih dahulu kontraksi bagian vektor, vektor-aksial dan aksial.

E.1 Bagian Vektor

Dari matrik (B.16) diketahui suku-suku yang memberi kontribusi pada polarisasi yaitu:

$$\Pi_{00}, \Pi_{01}, \Pi_{10}, \Pi_{11}, \Pi_{22} \quad \text{dan} \quad \Pi_{33}.$$

Dengan demikian kontraksinya adalah:

$$L_{\nu}^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(V)} = L^{00} \Pi_{00} + L^{01} \Pi_{01} + L^{10} \Pi_{10} + L^{11} \Pi_{11} + L^{22} \Pi_{22} + L^{33} \Pi_{33}, \quad (\text{E.1})$$

karena $L^{01} = L^{10}$, $\Pi^{01} = \Pi^{10}$, $L^{22} = L^{33}$ dan $\Pi^{22} = \Pi^{33}$, maka

$$L_{\nu}^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(V)} = L^{00} \Pi_{00} + 2L^{10} \Pi_{10} + L^{11} \Pi_{11} + 2L^{22} \Pi_{22}.$$

Juga untuk memudahkan perhitungan, tanpa mengurangi keumuman, dipilih kerangka dimana salah satu sumbunya dihimpitkan:

$$q^{\mu} = (q^0, q^1, q^2, q^3) = (q_0, |\vec{q}|, 0, 0),$$

dan dari konservasi arus elektron $q^\mu \Pi_{\mu\nu} = 0$,
serta konservasi arus neutrino $q^\mu L_{\mu\nu} = 0$,
didapatkan,

$$\begin{aligned}\Pi_{11} &= \frac{q_0^2}{|\vec{q}|^2} \Pi_{00}, L^{11} = \frac{q_0^2}{|\vec{q}|^2} L^{00}, \\ \Pi_{10} &= -\frac{q_0}{|\vec{q}|} \Pi_{00}, L^{10} = -\frac{q_0}{|\vec{q}|} L^{00}, \\ \Pi_L &= -\frac{q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \Pi_{00}, L_L = -\frac{q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} L^{00},\end{aligned}\tag{E.2}$$

dan dari definisi:

$$\begin{aligned}\Pi_L &= \Pi_{00} - \Pi_{11}, L_L = L^{00} - L^{11} \\ \Pi_T &= \frac{\Pi_{22} + \Pi_{33}}{2}, L_T = \frac{L^{22} + L^{33}}{2},\end{aligned}\tag{E.3}$$

persamaan (E.1) menjadi,

$$\begin{aligned}L_\nu^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(V)} &= \left(1 + 2\frac{q_0^2}{|\vec{q}|^2} + \frac{q_0^4}{|\vec{q}|^4}\right) L^{00} \Pi_{00} + 2L^{22} \Pi_{22}, \\ &= \left(1 + \frac{q_0^2}{|\vec{q}|^2}\right)^2 L^{00} \Pi_{00} + 2L^{22} \Pi_{22}, \\ &= -\frac{q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} L^{00} \Pi_L + 2L_T \Pi_T\end{aligned}$$

Sehingga kontraksi bagian vektor adalah,

$$L_\nu^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(V)} = -\frac{q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} L^{00} \Pi_L + 2L_T \Pi_T\tag{E.4}$$

atau

$$L_\nu^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(V)} = L_L \Pi_L + 2L_T \Pi_T$$

E.2 Bagian Vektor-Aksial

Dari persamaan (B.35) didapatkan:

$$\Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)}(q) = \epsilon_{\alpha\mu 0\nu} q^\alpha \Pi_{VA}.$$

Dan dipilih kerangka,

$$q^\alpha = (q^0, q^1, q^2, q^3) = (q_0, |\vec{q}|, 0, 0),$$

kemudian diselidiki harga-harga Π yang memberi kontribusi untuk,

$$\mu, \nu = 0, \dots, 3$$

yaitu yang tidak ada faktor q^2 dan q^3 , dan tidak ada indeks yang sama,

$$\Pi_{00}, \Pi_{01}, \Pi_{02}, \Pi_{03}, \Pi_{10}, \Pi_{11}, \Pi_{12}, \Pi_{13}, \Pi_{20}, \Pi_{21}, \Pi_{22}, \Pi_{30}, \Pi_{31}, \Pi_{33} = 0.$$

Sedangkan,

$$\begin{aligned} \Pi_{23}^{Im(VA)} &= i\epsilon_{\alpha 203} q^\alpha \Pi_{VA}, \\ &= i(\underbrace{\epsilon_{0203} q^0}_{=0} + \epsilon_{1203} q^1 + \underbrace{\epsilon_{2203} q^2}_{=0} + \underbrace{\epsilon_{3203} q^3}_{=0}) \Pi_{VA}, \\ &= i\epsilon_{1203} q^1 \Pi_{VA}, \end{aligned}$$

secara umum $\Pi_{23}^{Im(VA)} = i\epsilon_{\alpha 203} q^\alpha \Pi_{VA}$,

dan

$$\begin{aligned} \Pi_{32}^{Im(VA)} &= i\epsilon_{\alpha 302} q^\alpha \Pi_{VA}, \\ &= i(\underbrace{\epsilon_{0302} q^0}_{=0} + \epsilon_{1302} q^1 + \underbrace{\epsilon_{2302} q^2}_{=0} + \underbrace{\epsilon_{3302} q^3}_{=0}) \Pi_{VA}, \\ &= i\epsilon_{1302} q^1 \Pi_{VA} = -i\epsilon_{1203} q^1 \Pi_{VA}, \end{aligned}$$

atau $\Pi_{32}^{Im(VA)} = i\epsilon_{\alpha 302} q^\alpha \Pi_{VA} = -i\epsilon_{\alpha 203} q^\alpha \Pi_{VA}$,

sehingga,

$$\Pi_{23}^{Im(VA)} = -\Pi_{32}^{Im(VA)},$$

dan,

$$L_\nu^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)} = L^{23} \Pi_{23}^{Im(VA)} + L^{32} \Pi_{32}^{Im(VA)},$$

Maka kontraksi bagian vektor-aksial adalah,

$$L_\nu^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)} = (L^{23} - L^{32}) \Pi_{23}^{Im(VA)}. \quad (E.5)$$

E.3 Bagian Aksial

Seperti pada persamaan (E.1) pada bagian vektor, bagian aksial yang memberi kontribusi adalah:

$$L_{\nu}^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu}^{Im(A)} = L^{00}\Pi_{00} + L^{01}\Pi_{01} + L^{10}\Pi_{10} + L^{11}\Pi_{11} + L^{22}\Pi_{22} + L^{33}\Pi_{33}. \quad (E.6)$$

Dari persamaan (B.26) didapatkan,

$$\Pi_{\mu\nu}^{Im(A)}(q) = \Pi_{\mu\nu}^{Im(V)}(q) + g_{\mu\nu}\Pi_A,$$

dapat diperoleh,

$$\begin{aligned} \Pi_{00}^{Im(A)}(q) &= \Pi_{00}^{Im(V)}(q) + g_{00} = \Pi_{00}^{Im(V)}(q) + \Pi_A, \\ \Pi_{01}^{Im(A)}(q) &= \Pi_{01}^{Im(V)}(q) + g_{01} = \Pi_{01}^{Im(V)}(q), \\ \Pi_{10}^{Im(A)}(q) &= \Pi_{10}^{Im(V)}(q) + g_{10} = \Pi_{10}^{Im(V)}(q), \\ \Pi_{11}^{Im(A)}(q) &= \Pi_{11}^{Im(V)}(q) + g_{11} = \Pi_{11}^{Im(V)}(q) - \Pi_A, \\ \Pi_{22}^{Im(A)}(q) &= \Pi_{22}^{Im(V)}(q) + g_{22} = \Pi_{22}^{Im(V)}(q) - \Pi_A, \\ \Pi_{33}^{Im(A)}(q) &= \Pi_{33}^{Im(V)}(q) + g_{33} = \Pi_{33}^{Im(V)}(q) - \Pi_A. \end{aligned} \quad (E.7)$$

Persamaan (E.7) disubstitusi kedalam persamaan (E.6), didapatkan:

$$\begin{aligned} L_{\nu}^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu}^{Im(A)} &= L^{00}\Pi_{00}^{Im(A)} + L^{01}\Pi_{01}^{Im(A)} + L^{10}\Pi_{10}^{Im(A)} \\ &\quad + L^{11}\Pi_{11}^{Im(A)} + L^{22}\Pi_{22}^{Im(A)} + L^{33}\Pi_{33}^{Im(A)}, \\ &= L^{00}(\Pi_{00}^{Im(V)} + \Pi_A) + L^{01}\Pi_{01}^{Im(V)} + L^{10}\Pi_{10}^{Im(V)} \\ &\quad + L^{11}(\Pi_{11}^{Im(V)} - \Pi_A) + L^{22}(\Pi_{22}^{Im(V)} - \Pi_A) + L^{33}(\Pi_{33}^{Im(V)} - \Pi_A), \\ &= L^{00}\Pi_{00}^{Im(V)} + L^{01}\Pi_{01}^{Im(V)} + L^{10}\Pi_{10}^{Im(V)} + L^{11}\Pi_{11}^{Im(V)} \\ &\quad + L^{22}\Pi_{22}^{Im(V)} + L^{33}\Pi_{33}^{Im(V)} + (L^{00} - L^{11} - L^{22} - L^{33})\Pi_A, \\ &= L_{\nu}^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu}^{Im(V)} + (L^{00} - L^{11} - L^{22} - L^{33})\Pi_A. \end{aligned} \quad (E.8)$$

Dari persamaan (E.2) dan (E.3) diketahui,

$$\begin{aligned} L_T &= \frac{L^{22} + L^{33}}{2} \rightarrow L^{22} + L^{33} = 2L_T, \\ L^{11} &= \frac{q_0^2}{|\vec{q}|^2}L^{00} \rightarrow L^{00} - L^{11} = -\frac{q_\mu}{|\vec{q}|^2}L^{00}. \end{aligned}$$

Persamaan (E.8) menjadi,

$$\begin{aligned}
 L_{\nu}^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(A)} &= L_{\nu}^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(V)} + \left(-\frac{q_{\mu}^2}{|\vec{q}|^2} L^{00} - 2L_T \right) \Pi_A, \\
 &= L_{\nu}^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(V)} + \left\{ -\frac{q_{\mu}^2}{|\vec{q}|^2} 8[2E(E - q_0) + \frac{1}{2}q_{\mu}^2] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{q_{\mu}^2}{|\vec{q}|^2} 8[2E(E - q_0) + \frac{1}{2}q_{\mu}^2 + |\vec{q}|^2] \right\} \Pi_A, \\
 &= L_{\nu}^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(V)} + \frac{q_{\mu}^2}{|\vec{q}|^2} 8|\vec{q}|^2 \Pi_A,
 \end{aligned}$$

Sehingga kontraksi bagian aksial adalah,

$$L_{\nu}^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(A)} = L_{\nu}^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(V)} + 8q_{\mu}^2 \Pi_A. \quad (E.9)$$

Lampiran F

Kontraksi Interaksi Lemah

Total kontraksi untuk interaksi lemah, terdiri dari kontraksi bagian vektor, vektor-aksial dan aksial. Diketahui dari persamaan (A.3) dan (B.13)

$$L_\nu^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(W)} = C_V^2 L_\nu^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(V)} + 2C_V C_A L_\nu^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)} + C_A^2 L_\nu^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(A)}. \quad (F.1)$$

F.1 Bagian Vektor

Kontraksi bagian vektor diketahui dari persamaan (E.3) dan (E.4),

$$L_\nu^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(V)} = -\frac{q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} L^{00} \Pi_L + 2L_T \Pi_T, \quad \text{dengan} \quad L_T = \frac{L^{22} + L^{33}}{2}.$$

Dengan menggunakan tensor neutrino interaksi lemah pada persamaan (D.1),

$$L_\nu^{\mu\nu(W)} = 8[2k^\mu k^\nu - (k^\mu q^\nu + k^\nu q^\mu) + g^{\mu\nu}(k.q) - i \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} k_\alpha k'_\beta].$$

Kemudian dihitung L^{00} dan L_T , dengan ketentuan:
kerangka yang dipakai adalah,

$$\begin{aligned} (q^0, q^1, q^2, q^3) &= (q_0, |\vec{q}|, 0, 0), \\ (k^0, k^1, k^2, k^3) &= (E, |\vec{k}| \cos \theta, |\vec{k}| \sin \theta \cos \varphi, |\vec{k}| \sin \theta \sin \varphi), \end{aligned}$$

dan untuk neutrino

$$\begin{aligned} k \cdot q &= \frac{1}{2} q_\mu^2, \\ \cos \theta &= \frac{Eq_0 - \frac{1}{2} q_\mu^2}{|\vec{k}||\vec{q}|} = \frac{2Eq_0 - q_\mu^2}{2|\vec{k}||\vec{q}|}. \end{aligned}$$

$$L^{00} = 8[2(k^0 k^0 - (k^0 q^0 + k^0 q^0) + g^{00} k \cdot q - i\epsilon^{\alpha 0 \beta 0} k_\alpha k'_\beta],$$

dengan $g^{00} = 1$ dan $\epsilon^{\alpha 0 \beta 0} = 0$, maka

$$\begin{aligned} L^{00} &= 8[2E^2 - 2Eq_0 + \frac{1}{2} q_\mu^2], \\ &= 8[2E(E - q_0) + \frac{1}{2} q_\mu^2]. \end{aligned}$$

Dan,

$$L^{22} = 8(2k^2 k^2 - (k^2 q^2 + k^2 q^2) + g^{22} k \cdot q - i\epsilon^{\alpha 2 \beta 2} k_\alpha k'_\beta),$$

dengan $q^3 = 0$, $g^{22} = -1$ dan $\epsilon^{\alpha 2 \beta 2} = 0$, maka

$$L^{22} = 8[2(k^2)^2 - k \cdot q].$$

$$L^{33} = 8[2k^3 k^3 - (k^3 q^3 + k^3 q^3) + g^{33} k \cdot q - i\epsilon^{\alpha 3 \beta 3} k_\alpha k'_\beta],$$

dengan $q^3 = 0$, $g^{33} = -1$ dan $\epsilon^{\alpha 3 \beta 3} = 0$, maka

$$L^{33} = 8[2(k^3)^2 - k \cdot q].$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} L_T &= \frac{L^{22} + L^{33}}{2}, \\ L_T &= 8[(k^2)^2 + (k^3)^2 - k \cdot q], \\ &= 8[|\vec{k}|^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + |\vec{k}|^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} q_\mu^2], \\ &= 8[|\vec{k}|^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - \frac{1}{2} q_\mu^2], \end{aligned}$$

dengan $\sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$, maka

$$L_T = 8 \left\{ |\vec{k}|^2 \left[1 - \left(\frac{Eq_0 - \frac{1}{2} q_\mu^2}{|\vec{k}||\vec{q}|} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} q_\mu^2 \right\},$$

karena

$$\begin{aligned} k_\mu^2 &= k_0^2 - |\vec{k}|^2, \\ k_\mu^2 &= m_\nu^2 = 0 \quad \text{karena massa neutrino dianggap nol, maka} \\ |\vec{k}|^2 &= k_0^2 = E^2. \end{aligned}$$

Persamaan menjadi,

$$\begin{aligned} L_T &= 8 \left(E^2 - \frac{E^2 q_0^2}{|\vec{q}|^2} + \frac{E q_0 q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} - \frac{q_\mu^4}{4|\vec{q}|^2} - \frac{1}{2} q_\mu^2 \right), \\ &= 8 \left(-\frac{E^2 q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} + \frac{E q_0 q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} - \frac{q_\mu^4}{4|\vec{q}|^2} - \frac{1}{2} q_\mu^2 \right), \\ &= -8 \frac{q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \left(E^2 - E q_0 + \frac{1}{4} q_\mu^2 + \frac{1}{2} |\vec{q}|^2 \right), \\ &= -4 \frac{q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \left[2E(E - q_0) + \frac{1}{2} q_\mu^2 + |\vec{q}|^2 \right]. \end{aligned}$$

Dan,

$$2L_T = -8 \frac{q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \left[2E(E - q_0) + \frac{1}{2} q_\mu^2 + |\vec{q}|^2 \right].$$

Dengan demikian maka,

$$\begin{aligned} L_\nu^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(V)} &= \\ &= -8 \frac{q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \left[2E(E - q_0) + \frac{1}{2} q_\mu^2 + |\vec{q}|^2 \right] \Pi_L - 8 \frac{q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \left[2E(E - q_0) + \frac{1}{2} q_\mu^2 + |\vec{q}|^2 \right] \Pi_T, \\ &= -8 q_\mu^2 \frac{2E(E - q_0) + \frac{1}{2} q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \Pi_L - 8 q_\mu^2 \left[\frac{2E(E - q_0) + \frac{1}{2} q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} + \frac{|\vec{q}|^2}{|\vec{q}|^2} \right] \Pi_T, \\ &= -8 q_\mu^2 \underbrace{\frac{2E(E - q_0) + \frac{1}{2} q_\mu^2}{|\vec{q}|^2}}_{= A_W} (\Pi_L + \Pi_T) - 8 q_\mu^2 \Pi_T. \end{aligned}$$

Sehingga bagian vektor kontraksi interaksi lemah adalah

$$L_\nu^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(V)} = -8 q_\mu^2 A_W (\Pi_L + \Pi_T) - 8 q_\mu^2 \Pi_T \quad (\text{F.2})$$

F.2 Bagian Vektor-Aksial

Bagian vektor-aksial didapat dari persamaan (E.5),

$$\begin{aligned} L_{\nu}^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)} &= L^{23} \Pi_{23}^{Im(VA)} + L^{32} \Pi_{32}^{Im(VA)} \\ &= (L^{23} - L^{32}) \Pi_{23}^{VA}. \end{aligned}$$

Sama dengan bagian vektor, digunakan tensor neutrino interaksi lemah yaitu persamaan (D.1),

$$L_{\nu}^{\mu\nu(W)} = 8[2k^{\mu}k^{\nu} - (k^{\mu}q^{\nu} + k^{\nu}q^{\mu}) + g^{\mu\nu}(k.q) - i \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} k_{\alpha}k'_{\beta}].$$

Kemudian dihitung L^{23} dan L^{32} ,

$$\begin{aligned} L^{23} &= 8[2k^2k^3 - (k^2q^3 + k^3q^2) + g^{23}k.q - i \epsilon^{\alpha 2 \beta 3} k_{\alpha}k'_{\beta}], \\ L^{32} &= 8[2k^3k^2 - (k^3q^2 + k^2q^3) + g^{32}k.q - i \epsilon^{\alpha 3 \beta 2} k_{\alpha}k'_{\beta}], \end{aligned}$$

karena $g^{23} = 0$, $g^{32} = 0$ dan $q^2 = q^3 = 0$, maka

$$\begin{aligned} L^{23} &= 8[2k^2k^3 - i \epsilon^{\alpha 2 \beta 3} k_{\alpha}k'_{\beta}], \\ L^{32} &= 8[2k^3k^2 - i \epsilon^{\alpha 3 \beta 2} k_{\alpha}k'_{\beta}]. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} L_{\nu}^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)} &= (L^{23} - L^{32}) \Pi^{VA}, \\ &= 8[2k^2k^3 - i \epsilon^{\alpha 2 \beta 3} k_{\alpha}k'_{\beta} - (2k^3k^2 - i \epsilon^{\alpha 3 \beta 2} k_{\alpha}k'_{\beta})] \Pi_{23}^{VA}, \\ &= 8i k_{\alpha}k'_{\beta} (-i \epsilon^{\alpha 2 \beta 3} + i \epsilon^{\alpha 3 \beta 2} k_{\alpha}k'_{\beta}) \Pi_{23}^{VA}, \\ &= 8i k_{\alpha}k'_{\beta} (\epsilon^{\alpha 3 \beta 2} + \epsilon^{\alpha 3 \beta 2} k_{\alpha}k'_{\beta}) \Pi_{23}^{VA}, \\ &= 16i k_{\alpha}k'_{\beta} \epsilon^{\alpha 3 \beta 2} \Pi_{23}^{VA}, \\ &= 16i k_{\alpha}k'_{\beta} \epsilon^{\alpha 3 \beta 2} (i \epsilon_{23\alpha 0} q^{\alpha} \Pi_{VA}), \end{aligned}$$

dengan ketentuan,

$$\begin{aligned}\epsilon_{23\alpha 0} q^\alpha &= \epsilon_{23\sigma 0} q^\sigma, \\ 0 &\rightarrow \rho \delta \rho_0, \\ \epsilon^{23\alpha\beta} \epsilon_{23\sigma\rho} &= g_\sigma^\alpha g_\rho^\beta - g_\rho^\alpha g_\sigma^\beta,\end{aligned}$$

persamaan menjadi,

$$\begin{aligned}L_\nu^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)} &= -16 q^\sigma k_\alpha k'_\beta \Pi_{VA} \epsilon^{\alpha\beta 2} \epsilon_{23\sigma 0}, \\ &= -16 q^\sigma k_\alpha k'_\beta \Pi_{VA} \epsilon^{23\alpha\beta} \epsilon_{23\sigma 0}, \\ &= -16 q^\sigma k_\alpha k'_\beta \Pi_{VA} \epsilon^{23\alpha\beta} \epsilon_{23\sigma\rho} \delta \rho_0, \\ &= -16 q^\sigma k_\alpha k'_\beta \Pi_{VA} (g_\sigma^\alpha g_\rho^\beta - g_\rho^\alpha g_\sigma^\beta) \delta \rho_0, \\ &= -16 q^\sigma (k_\alpha k'_\rho \Pi_{VA} g_\sigma^\alpha - k_\rho k'_\beta \Pi_{VA} g_\sigma^\beta) \delta \rho_0, \\ &= -16 q^\sigma (k_\sigma k'_\rho \Pi_{VA} - k_\rho k'_\sigma \Pi_{VA}) \delta \rho_0, \\ &= -16 \Pi_{VA} (q^\sigma k_\sigma k'_\rho - q^\sigma k_\rho k'_\sigma) \delta \rho_0, \\ &= -16 \Pi_{VA} (q.k k'_\rho - q.k' k_\rho) \delta \rho_0, \\ &= -16 \Pi_{VA} (q.k k'_0 - q.k' k_0), \\ &= -16 \Pi_{VA} [q.k (k_0 - q_0) - q.(k - q) k_0], \\ &= -16 \Pi_{VA} (q.k k_0 - q.k q_0 - q.k k_0 + q^2 k_0), \\ &= -16 \Pi_{VA} (-q.k q_0 + q^2 k_0), \\ &= -16 \Pi_{VA} \left(-\frac{q_\mu^2}{2} q_0 + q_\mu^2 E\right),\end{aligned}$$

Sehingga bagian vektor-aksial kontraksi interaksi lemah adalah,

$$L_\nu^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)} = -8 q_\mu^2 (2E - q_0) \Pi_{VA}. \quad (\text{F.3})$$

F.3 Bagian Aksial

Telah diketahui dari persamaan (E.9), bagian aksial kontraksi interaksi lemah,

$$L_\nu^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(A)} = L_\nu^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(V)} + 8 q_\mu^2 \Pi_A. \quad (\text{F.4})$$

F.4 Total Kontraksi Interaksi Lemah

Substitusi persamaan-persamaan (F.2), (F.3) dan (F.4) ke persamaan (F.1), menghasilkan:

$$\begin{aligned}
 L_{\nu}^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(W)} &= C_V^2 L_{\nu}^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(V)} + 2C_V C_A L_{\nu}^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)} + C_A^2 L_{\nu}^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(A)}, \\
 &= C_V^2 L_{\nu}^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(V)} + 2C_V C_A [-8 q_{\mu}^2 (2E - q_0) \Pi_{VA}] \\
 &\quad + C_A^2 [L_{\nu}^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(V)} + 8q_{\mu}^2 \Pi_A], \\
 &= (C_V^2 + C_A^2) L_{\nu}^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(V)} + 2C_V C_A [-8 q_{\mu}^2 (2E - q_0) \Pi_{VA}] \\
 &\quad + C_A^2 8q_{\mu}^2 \Pi_A,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{\nu}^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(W)} &= (C_V^2 + C_A^2) [-8q_{\mu}^2 A_W (\Pi_L + \Pi_T) - 8q_{\mu}^2 \Pi_T] \\
 &\quad + 2C_V C_A [-8 q_{\mu}^2 (2E - q_0) \Pi_{VA}] + C_A^2 8q_{\mu}^2 \Pi_A, \\
 &= -8 q_{\mu}^2 [A_W (C_V^2 + C_A^2) (\Pi_L + \Pi_T) + (C_V^2 + C_A^2) \Pi_T \\
 &\quad + 2C_V C_A \Pi_{VA} (2E - q_0) - C_A^2 \Pi_A], \\
 &= -8 q_{\mu}^2 [A_W \underbrace{(C_V^2 + C_A^2) (\Pi_L + \Pi_T)}_{= R_{W_1}} + \underbrace{C_V^2 \Pi_T + C_A^2 (\Pi_T - \Pi_A)}_{= R_{W_2}} \\
 &\quad + \underbrace{2C_V C_A \Pi_{VA}}_{= R_{W_3}} \underbrace{(2E - q_0)}_{= B_W}].
 \end{aligned}$$

Jadi total kontraksi interaksi lemah adalah,

$$L_{\nu}^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(W)} = -8 q_{\mu}^2 (A_W R_{W_1} + R_{W_2} + R_{W_3} B_W), \quad (\text{F.5})$$

dengan

$$\begin{aligned}
 A_W &= \frac{2E(E - q_0) + \frac{1}{2}q_{\mu}^2}{|\vec{q}|^2}, \\
 B_W &= 2E - q_0, \\
 R_{W_1} &= (C_V^2 + C_A^2) (\Pi_L + \Pi_T), \\
 R_{W_2} &= C_V^2 \Pi_T + C_A^2 (\Pi_T - \Pi_A), \\
 R_{W_3} &= 2C_V C_A \Pi_{VA}.
 \end{aligned}$$

Lampiran G

Kontraksi Interaksi Elektromagnetik

Kontraksi interaksi elektromagnetik hanya terdiri dari bagian vektor saja. Kontraksi bagian vektor dapat dilihat pada persamaan (E.3) dan (E.4),

$$L_{\nu}^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu}^{Im(EM)} = L_{\nu}^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu}^{Im(V)} = -\frac{q_{\mu}^2}{|\vec{q}|^2}L^{00}\Pi_L + 2L_T\Pi_T, \\ , \quad \text{dengan} \quad L_T = \frac{L^{22} + L^{33}}{2}.$$

Dengan menggunakan persamaan tensor neutrino interaksi elektromagnetik pada persamaan (D.2), maka diperoleh

$$L_{\nu}^{\mu\nu(EM)} = 4(f_{m\nu}^2 + g_{1\nu}^2)[2k^{\mu}k^{\nu} - (k^{\mu}q^{\nu} + k^{\nu}q^{\mu}) \\ + g^{\mu\nu}(k.q)] - i8f_{m\nu}g_{1\nu}\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu}k_{\alpha}k'_{\beta} \\ - \frac{f_{2\nu}^2 + g_{2\nu}^2}{m_e^2}(k.q)[4k^{\mu}k^{\nu} - 2(k^{\mu}q^{\nu} + k^{\nu}q^{\mu}) + q^{\mu}q^{\nu}].$$

Misalkan,

$$a = 4(f_{m\nu}^2 + g_{1\nu}^2), \\ b = \frac{f_{2\nu}^2 + g_{2\nu}^2}{m_e^2},$$

Kemudian dihitung L^{00} , $-\frac{q_\mu^2}{|\vec{q}|^2}L^{00}\Pi_L$, L^{22} , L^{33} dan $L^{22} + L^{33}$,

$$\begin{aligned}
L^{00} &= a[2k^0k^0 - (k^0q^0 + k^0q^0) + g^{00}k.q] - 8i f_{m\nu}g_{1\nu}\epsilon^{\alpha 0\beta 0}k_\alpha k'_\beta \\
&\quad - b(k.q)[4k^0k^0 - 2(k^0q^0 + q^0k^0) + q^0q^0], \\
&= a(2E^2 - 2Eq_0 + \frac{1}{2}q_\mu^2) - \frac{1}{2}bq_\mu^2(4E^2 - 4Eq_0 + q_0^2), \\
&= a(2E^2 - 2Eq_0 + \frac{1}{2}q_\mu^2) - bq_\mu^2(2E^2 - 2Eq_0 + \frac{1}{2}q_\mu^2) - \frac{1}{2}b|\vec{q}|^2q_\mu^2, \\
&= -(bq_\mu^2 - a)[2E(E - q_0) + \frac{1}{2}q_\mu^2] - \frac{1}{2}b|\vec{q}|^2q_\mu^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{q_\mu^2}{|\vec{q}|^2}L^{00}\Pi_L &= [q_\mu^2(bq_\mu^2 - a) \underbrace{\frac{2E(E - q_0) + \frac{1}{2}q_\mu^2}{|\vec{q}|^2}}_{= A_W} + \frac{1}{2}bq_\mu^2q_\mu^2]\Pi_L, \\
&= \underbrace{[(bq_\mu^2 - a)A_W + \frac{1}{2}bq_\mu^2q_\mu^2]}_{= A_{EM}}\Pi_L.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L^{22} &= a[2k^2k^2 - (k^2q^2 + k^2q^2) + g^{22}k.q] - 8i f_{m\nu}g_{1\nu}\epsilon^{\alpha 2\beta 2}k_\alpha k'_\beta \\
&\quad - b(k.q)[4k^2k^2 - 2(k^2q^2 + q^2k^2) + q^2q^2], \\
&= a[2(k^2)^2 - \frac{1}{2}q_\mu^2] - \frac{1}{2}bq_\mu^2[4(k^2)^2], \\
&= a[2|\vec{k}|^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - \frac{1}{2}q_\mu^2] - bq_\mu^2(2|\vec{k}|^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi), \\
&= [2|\vec{k}|^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi](a - bq_\mu^2) - \frac{1}{2}aq_\mu^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L^{33} &= a[2(k^3)^2 - \frac{1}{2}q_\mu^2] - \frac{1}{2}bq_\mu^2[4(k^3)^2], \\
&= a[2|\vec{k}|^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi - \frac{1}{2}q_\mu^2] - bq_\mu^2(2|\vec{k}|^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi), \\
&= [2|\vec{k}|^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi](a - bq_\mu^2) - \frac{1}{2}aq_\mu^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L^{22} + L^{33} &= (a - bq_\mu^2)[2|\vec{k}|^2 \sin^2 \theta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)] - aq_\mu^2, \\
&= -(bq_\mu^2 - a)[2|\vec{k}|^2 (1 - \cos^2 \theta)] - aq_\mu^2, \\
&= -(bq_\mu^2 - a) \left[2|\vec{k}|^2 - 2|\vec{k}|^2 \left(\frac{2Eq_0 - q_\mu^2}{2|\vec{k}||\vec{q}|} \right)^2 \right] - aq_\mu^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L^{22} + L^{33} &= -(bq_\mu^2 - a) \left(2E^2 - \frac{4E^2 q_0^2}{2|\vec{q}|^2} + \frac{4Eq_0 q_\mu^2}{2|\vec{q}|^2} - \frac{q_\mu^4}{2|\vec{q}|^2} \right) - aq_\mu^2, \\
&= -(bq_\mu^2 - a) \left(-2E^2 \frac{q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} + 2Eq_0 \frac{q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} - \frac{q_\mu^4}{2|\vec{q}|^2} \right) - aq_\mu^2, \\
&= (bq_\mu^2 - a) q_\mu^2 \left(\frac{2E^2}{|\vec{q}|^2} - \frac{2Eq_0}{|\vec{q}|^2} + \frac{q_\mu^2}{2|\vec{q}|^2} \right) - aq_\mu^2, \\
&= (bq_\mu^2 - a) q_\mu^2 \underbrace{\frac{2E(E - q_0) + \frac{1}{2}q_\mu^2}{|\vec{q}|^2}}_{= A_W} - aq_\mu^2, \\
&= \underbrace{\left[(bq_\mu^2 - a)A_W + \frac{1}{2}bq_\mu^2 \right] q_\mu^2}_{= A_{EM}} - \underbrace{\left(\frac{1}{2}bq_\mu^2 + a \right) q_\mu^2}_{= B_{EM}}, \\
&= A_{EM} - B_{EM}.
\end{aligned}$$

Dan selanjutnya,

$$\begin{aligned}
L_\nu^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(EM)} &= -\frac{q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} L^{00} \Pi_L + (L^{22} + L^{33}) \Pi_T, \\
&= A_{EM} \Pi_L + (A_{EM} - B_{EM}) \Pi_T, \\
&= A_{EM} \underbrace{(\Pi_L + \Pi_T)}_{= R_{EM1}} - B_{EM} \underbrace{\Pi_T}_{= R_{EM2}},
\end{aligned}$$

Jadi kontraksi interaksi elektromagnetik adalah,

$$L_\nu^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(EM)} = A_{EM} R_{EM1} - B_{EM} R_{EM2}, \quad (G.1)$$

dengan,

$$\begin{aligned}
a &= 4(f_{m\nu}^2 + g_{1\nu}^2), \\
b &= \frac{f_{2\nu}^2 + g_{2\nu}^2}{m_e^2}, \\
A_W &= \frac{2E(E - q_0) + \frac{1}{2}q_\mu^2}{|\vec{q}|^2}, \\
A_{EM} &= \left[(bq_\mu^2 - a)A_W + \frac{1}{2}bq_\mu^2 \right] q_\mu^2, \\
B_{EM} &= \left(\frac{1}{2}bq_\mu^2 + a \right) q_\mu^2, \\
R_{EM1} &= \Pi_L + \Pi_T, \\
R_{EM2} &= \Pi_T.
\end{aligned}$$

Lampiran H

Kontraksi Interferensi

Telah diketahui bahwa kontraksi untuk interferensi terdiri dari bagian vektor dan bagian vektor-aksial, dapat dilihat pada persamaan (A.14) dan (B.13),

$$L_{\nu}^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu}^{Im(INT)} = C_V L_{\nu}^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu}^{Im(V)} + C_A L_{\nu}^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)}. \quad (\text{H.1})$$

H.1 Bagian Vektor

Kontraksi bagian vektor diketahui dari persamaan (E.3) dan (E.4),

$$L_{\nu}^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu}^{Im(V)} = -\frac{q_{\mu}^2}{|\vec{q}|^2}L^{00}\Pi_L + 2L_T\Pi_T, \quad \text{dengan} \quad L_T = \frac{L^{22} + L^{33}}{2}.$$

Dengan menggunakan tensor neutrino untuk interferensi seperti pada persamaan (D.3),

$$\begin{aligned} L_{\nu}^{\mu\nu(INT)} &= 4(f_{m\nu} + g_{1\nu})[2k^{\mu}k^{\nu} - (k^{\mu}q^{\nu} + k^{\nu}q^{\mu}) + g^{\mu\nu}(k.q) \\ &\quad - i \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu}k_{\alpha}k'_{\beta}. \end{aligned}$$

Misalkan,

$$\tilde{a} = f_{m\nu} + g_{1\nu},$$

Kemudian dihitung L^{00} , $-\frac{q_\mu^2}{|\vec{q}|^2}L^{00}\Pi_L$, L^{22} , L^{33} dan $L^{22} + L^{33}$,

$$\begin{aligned} L^{00} &= 4\tilde{a}[2k^0k^0 - (k^0q^0 + k^0q^0) + g^{00}k.q - i\epsilon^{\alpha 0\beta 0}k_\alpha k'_\beta], \\ &= 4\tilde{a}(2E^2 - 2Eq_0 + \frac{1}{2}q_\mu^2), \\ &= 4\tilde{a}(2E(E - q_0) + \frac{1}{2}q_\mu^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{q_\mu^2}{|\vec{q}|^2}L^{00}\Pi_L &= -4\tilde{a}q_\mu^2 \underbrace{\frac{2E(E - q_0) + \frac{1}{2}q_\mu^2}{|\vec{q}|^2}}_{= A_{INT} = A_W} \Pi_L, \\ &= -4\tilde{a}q_\mu^2 A_{INT} \Pi_L. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^{22} &= 4\tilde{a}[2k^2k^2 - (k^2q^2 + k^2q^2) + g^{22}k.q - i\epsilon^{\alpha 2\beta 2}k_\alpha k'_\beta], \\ &= 4\tilde{a}[2(k^2)^2 - \frac{1}{2}q_\mu^2] = 4\tilde{a}(2|\vec{k}|^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - \frac{1}{2}q_\mu^2), \\ L^{33} &= 4\tilde{a}[2(k^3)^2 - \frac{1}{2}q_\mu^2] = 4\tilde{a}(2|\vec{k}|^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi - \frac{1}{2}q_\mu^2). \end{aligned}$$

Dengan perhitungan yang sejenis dengan bagian vektor kontraksi interaksi lemah dan elektromagnetik, didapatkan:

$$\begin{aligned} L^{22} + L^{33} &= 4\tilde{a}(2|\vec{k}|^2 \sin^2 \theta - q_\mu^2), \\ &= 4\tilde{a}[2|\vec{k}|^2(1 - \cos^2 \theta) - q_\mu^2], \\ &= 4\tilde{a}[2|\vec{k}|^2(1 - \cos^2 \theta) - q_\mu^2], \\ &= 4\tilde{a}\left[2k^2 - 2k^2\left(\frac{2Eq_0 - q_\mu^2}{2|\vec{k}||\vec{q}|}\right)^2 - q_\mu^2\right], \\ &= -4\tilde{a}q_\mu^2 \underbrace{\frac{2E(E - q_0) + \frac{1}{2}q_\mu^2}{|\vec{q}|^2}}_{= A_{INT} = A_W} + 1, \\ &= -4\tilde{a}q_\mu^2(A_{INT} + 1) \end{aligned}$$

Kemudian dihitung,

$$\begin{aligned}
L_{\nu}^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu}^{Im(V)} &= -\frac{q_{\mu}^2}{|\vec{q}|^2}L^{00}\Pi_L + (L^{22} + L^{33})\Pi_T, \\
&= -4\tilde{a} q_{\mu}^2 A_{INT}\Pi_L - 4\tilde{a} q_{\mu}^2 (A_{INT} + 1)\Pi_T, \\
&= -4\tilde{a} q_{\mu}^2 A_{INT}\Pi_L - 4\tilde{a} q_{\mu}^2 A_{INT}\Pi_T - 4\tilde{a} q_{\mu}^2 \Pi_T, \\
&= -4\tilde{a} q_{\mu}^2 A_{INT}(\Pi_L + \Pi_T) - 4\tilde{a} q_{\mu}^2 \Pi_T.
\end{aligned}$$

Sehingga bagian vektor kontraksi interferensi adalah,

$$L_{\nu}^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu}^{Im(V)} = -4\tilde{a} q_{\mu}^2 A_{INT}(\Pi_L + \Pi_T) - 4\tilde{a} q_{\mu}^2 \Pi_T. \quad (H.2)$$

H.2 Bagian Vektor-Aksial

Kontraksi bagian vektor-aksial didapat dari persamaan (E.5),

$$\begin{aligned}
L_{\nu}^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)} &= L^{23}\Pi_{23}^{Im(VA)} + L^{32}\Pi_{32}^{Im(VA)} \\
&= (L^{23} - L^{32})\Pi_{23}^{VA}.
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan tensor neutrino untuk interferensi seperti pada persamaan (D.3),

$$\begin{aligned}
L_{\nu}^{\mu\nu(INT)} &= 4(f_{m\nu} + g_{1\nu})[2k^{\mu}k^{\nu} - (k^{\mu}q^{\nu} + k^{\nu}q^{\mu}) + g^{\mu\nu}(k.q) \\
&\quad - i\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu}k_{\alpha}k'_{\beta}.
\end{aligned}$$

Misalkan,

$$\tilde{a} = f_{m\nu} + g_{1\nu},$$

Dihitung $L_{\nu}^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)}$, dengan perhitungan yang sejenis dengan bagian vektor-aksial interaksi lemah,

$$\begin{aligned}
L^{23} &= 4\tilde{a}(2k^2k^3 - i\epsilon^{\alpha 2\beta 3}k_{\alpha}k'_{\beta}), \\
L^{32} &= 4\tilde{a}(2k^3k^2 - i\epsilon^{\alpha 3\beta 2}k_{\alpha}k'_{\beta}), \\
L^{23} - L^{32} &= 4i\tilde{a}k_{\alpha}k'_{\beta}(-\epsilon^{\alpha 2\beta 3} + \epsilon^{\alpha 3\beta 2}),
\end{aligned}$$

kontraksi bagian vektor-aksial didapat dari persamaan (E.5), dan polarisasi vektor-aksial didapat dari persamaan (B.34),

$$\begin{aligned} L_\nu^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)} &= (L^{23} - L^{32}) \Pi_{23}^{VA}, \\ \Pi_{23}^{VA} &= i\epsilon_{\alpha 203} q^\alpha \Pi_{VA}, \end{aligned}$$

sehingga bagian vektor-aksial kontraksi interferensi adalah,

$$L_\nu^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)} = -4\tilde{a} q_\mu^2 (2E - q_0) \Pi_{VA}, \quad (\text{H.3})$$

H.3 Total Kontraksi Interferensi

Total kontraksi interferensi didapatkan dengan mensubstitusi persamaan (H.2) dan (H.3) ke persamaan (H.1),

$$\begin{aligned} L_\nu^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(INT)} &= C_V L_\nu^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(V)} + C_A L_\nu^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(VA)}, \\ &= C_V [-4\tilde{a} q_\mu^2 A_{INT} (\Pi_L + \Pi_T) - 4\tilde{a} q_\mu^2 \Pi_T] \\ &\quad + C_A [-4\tilde{a} q_\mu^2 (2E - q_0) \Pi_{VA}], \\ &= -4\tilde{a} q_\mu^2 [A_{INT} \underbrace{C_V (\Pi_L + \Pi_T)}_{=R_{INT_1}} + \underbrace{C_V \Pi_T}_{=R_{INT_2}} + \underbrace{(2E - q_0)}_{=B_{INT}} \underbrace{C_A \Pi_{VA}}_{=R_{INT_3}}]. \end{aligned}$$

Jadi total kontraksi interferensi adalah,

$$L_\nu^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{Im(INT)} = -4\tilde{a} q_\mu^2 (A_{INT} R_{INT_1} + R_{INT_2} + B_{INT} R_{INT_3}), \quad (\text{H.4})$$

dengan

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= f_{m\nu} + g_{1\nu}, \\ A_{INT} &= A_W = \frac{2E(E - q_0) + \frac{1}{2}q_\mu^2}{|\vec{q}|^2}, \\ B_{INT} &= B_W = 2E - q_0, \\ R_{INT_1} &= C_V (\Pi_L + \Pi_T), \\ R_{INT_2} &= C_V \Pi_T, \\ R_{INT_3} &= C_A \Pi_{VA}. \end{aligned}$$

Lampiran I

Random Phase Approximation (RPA)

I.1 Polarisasi Transversal

Persamaan Dyson untuk polarisasi transversal:

$$\tilde{\Pi}_T = \Pi_T + \tilde{\Pi}_T D_T \Pi_T,$$

dengan solusi:

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\Pi}_T &= \tilde{\Pi}_T - \Pi_T = \Pi_T(1 - D_T \Pi_T)^{-1} D_T \Pi_T, \\ &= \Pi_T(1 + \chi_\gamma \Pi_T)^{-1} (-\chi_\gamma \Pi_T), \\ D_T &= -\chi_\gamma, \\ \chi_\gamma &= -\frac{e^2}{q_\mu^2},\end{aligned}$$

Ditambahkan koreksi massa photon efektif maka

$$-\frac{e^2}{q_\mu^2} \rightarrow -\frac{e^2}{q_\mu^2 + m_t^2}, \quad (\text{I.1})$$

dengan m_t^2 adalah massa photon efektif seperti pada persamaan (2.21).

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{\Pi}_T &= \Pi_T(1 + \chi_\gamma\Pi_T)^{-1}(-\chi_\gamma)\Pi_T, \\
&= -\chi_\gamma(1 + \chi_\gamma\Pi_T^R + i\chi_\gamma\Pi_T^I)^{-1}(\Pi_T^R + i\Pi_T^I)^2, \\
&= -\frac{1}{\epsilon_T}\chi_\gamma(1 + \chi_\gamma\Pi_T^R - i\chi_\gamma\Pi_T^I)(\Pi_T^{R^2} - \Pi_T^{I^2} + i2\Pi_T^R\Pi_T^I), \\
&= -\frac{1}{\epsilon_T}\chi_\gamma(1 + \chi_\gamma\Pi_T^R)(\Pi_T^{R^2} - \Pi_T^{I^2}) - \frac{i}{\epsilon_T}\chi_\gamma(1 + \chi_\gamma\Pi_T^R)(2\Pi_T^R\Pi_T^I) \\
&\quad - \frac{2}{\epsilon_T}\chi_\gamma^2\Pi_T^R\Pi_T^{I^2} + \frac{i}{\epsilon_T}\chi_\gamma^2\Pi_T^I(\Pi_T^{R^2} - \Pi_T^{I^2}),
\end{aligned}$$

dan

$$Im\delta\tilde{\Pi}_T = \frac{1}{\epsilon_T}[-2(1 + \chi_\gamma\Pi_T^R)\chi_\gamma\Pi_T^R\Pi_T^I + \chi_\gamma^2\Pi_T^I(\Pi_T^{R^2} - \Pi_T^{I^2})].$$

Sehingga korelasi RPA untuk polarisasi transversal dapat ditulis,

$$Im\delta\tilde{\Pi}_T = -\frac{1}{\epsilon_T}\chi_\gamma\Pi_T^I[2\Pi_T^R + \chi_\gamma(\Pi_T^{R^2} + \Pi_T^{I^2})], \quad (I.2)$$

dengan,

$$\epsilon_T = (1 + \chi_\gamma\Pi_T^R)^2 + \chi_\gamma^2\Pi_T^{I^2}.$$

I.2 Polarisasi Vektor-Aksial

Persamaan Dyson untuk polarisasi vektor-aksial adalah

$$\tilde{\Pi}_{VA} = \Pi_{VA} + \tilde{\Pi}_{VA}D_T\Pi_T,$$

dengan solusi

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{\Pi}_{VA} &= \tilde{\Pi}_{VA} - \Pi_{VA} = \Pi_{VA}(1 - D_T\Pi_T)^{-1}D_T\Pi_T, \\
&= \Pi_{VA}(1 + \chi_\gamma\Pi_T)^{-1}(-\chi_\gamma)\Pi_T, \\
&= \frac{1}{\epsilon_T}(-\chi_\gamma)(1 + \chi_\gamma\Pi_T^R - i\chi_\gamma\Pi_T^I)[(\Pi_{VA}^R + i\Pi_{VA}^I)(\Pi_T^R + i\Pi_T^I)], \\
&= \frac{1}{\epsilon_T}(-\chi_\gamma)(1 + \chi_\gamma\Pi_T^R)[(\Pi_{VA}^R\Pi_T^R - \Pi_{VA}^I\Pi_T^I) \\
&\quad + i(\Pi_{VA}^I\Pi_T^R + \Pi_{VA}^R\Pi_T^I)](1 + \chi_\gamma\Pi_T^R) \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon_T}\chi_\gamma^2\Pi_T^I[i(\Pi_{VA}^R\Pi_T^R - \Pi_{VA}^I\Pi_T^I) - (\Pi_{VA}^I\Pi_T^R + \Pi_{VA}^R\Pi_T^I)],
\end{aligned}$$

dan,

$$\begin{aligned} Im \delta \tilde{\Pi}_{VA} &= \frac{1}{\epsilon_T} (-\chi_\gamma) (1 + \chi_\gamma \Pi_T^R) (\Pi_{VA}^I \Pi_T^R + \Pi_{VA}^R \Pi_T^I) \\ &+ \frac{1}{\epsilon_T} \chi_\gamma^2 \Pi_T^I (\Pi_{VA}^R \Pi_T^R - \Pi_{VA}^I \Pi_T^I). \end{aligned}$$

Sehingga korelasi RPA untuk polarisasi vektor-aksial dapat ditulis,

$$Im \delta \tilde{\Pi}_{VA} = \frac{1}{\epsilon_T} (-\chi_\gamma) [(\Pi_{VA}^I \Pi_T^R + \Pi_{VA}^R \Pi_T^I) + \chi_\gamma \Pi_{VA}^I (\Pi_T^{R^2} + \Pi_T^{I^2})], \quad (I.3)$$

dengan,

$$\epsilon_T = (1 + \chi_\gamma \Pi_T^R)^2 + \chi_\gamma^2 \Pi_T^{I^2}.$$

I.3 Polarisasi Aksial

persamaan Dyson untuk polarisasi aksial

$$\tilde{\Pi}_A = \Pi_A + \Pi_{VA} D_T \tilde{\Pi}_{VA},$$

dengan solusi

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\Pi}_A &= \tilde{\Pi}_A - \Pi_A = \Pi_{VA} D_T \tilde{\Pi}_{VA}, \\ &= \Pi_{VA} D_T (1 - D_T \Pi_T)^{-1} \Pi_{VA}, \\ &= \Pi_{VA} (-\chi_\gamma) (1 + \chi_\gamma \Pi_T)^{-1} \Pi_{VA}, \\ &= -\chi_\gamma \Pi_{VA}^2 (1 + \chi_\gamma \Pi_T)^{-1}, \\ &= -\frac{1}{\epsilon_T} \chi_\gamma (1 + \chi_\gamma \Pi_T^R - i \chi_\gamma \Pi_T^I) (\Pi_{VA}^{R^2} - \Pi_{VA}^{I^2} + i 2 \Pi_{VA}^R \Pi_{VA}^I), \\ &= -\frac{1}{\epsilon_T} \chi_\gamma [(1 + \chi_\gamma \Pi_T^R) (\Pi_{VA}^{R^2} - \Pi_{VA}^{I^2}) + 2 \chi_\gamma \Pi_{VA}^R \Pi_{VA}^I \Pi_T^I \\ &\quad + i (-\chi_\gamma \Pi_T^I (\Pi_{VA}^{R^2} - \Pi_{VA}^{I^2}) + 2 (1 + \chi_\gamma \Pi_T^R) \Pi_{VA}^R \Pi_{VA}^I)]. \end{aligned}$$

Sehingga korelasi RPA untuk polarisasi aksial dapat ditulis,

$$Im \delta \tilde{\Pi}_A = -\frac{2}{\epsilon_T} (1 + \chi_\gamma \Pi_T^R) \chi_\gamma \Pi_{VA}^R \Pi_{VA}^I + \frac{1}{\epsilon_T} \chi_\gamma^2 \Pi_T^I (\Pi_{VA}^{R^2} - \Pi_{VA}^{I^2}), \quad (I.4)$$

dengan,

$$\epsilon_T = (1 + \chi_\gamma \Pi_T^R)^2 + \chi_\gamma^2 \Pi_T^{I^2}.$$

I.4 Polarisasi Longitudinal

persamaan Dyson untuk polarisasi longitudinal

$$\tilde{\Pi}_L = \Pi_L + \tilde{\Pi}_L D_L \Pi_L,$$

dengan solusi

$$\delta \tilde{\Pi}_L = \tilde{\Pi}_L - \Pi_L = \Pi_L (1 - D_L \Pi_L)^{-1} D_L \Pi_L,$$

$$D_L = -\tilde{\chi}_\gamma = -\frac{q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} (\chi_\gamma) = -\frac{q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \left(-\frac{e^2}{q_\mu^2}\right) = \frac{e^2}{|\vec{q}|^2} = \bar{\chi}_\gamma,$$

Ditambahkan koreksi massa photon efektif maka bentuknya menjadi,

$$-\frac{e^2}{|\vec{q}|^2} \rightarrow -\frac{e^2}{|\vec{q}|^2 + m_t^2} \quad (\text{I.5})$$

dengan m_t^2 adalah massa photon efektif seperti pada persamaan (2.21).

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\Pi}_L &= \Pi_L (1 - \bar{\chi}_\gamma \Pi_L)^{-1} \bar{\chi}_\gamma \Pi_L, \\ &= \bar{\chi}_\gamma (1 - \bar{\chi}_\gamma \Pi_L^R - i \bar{\chi}_\gamma \Pi_L^I)^{-1} (\Pi_L^R + i \Pi_L^I)^2, \\ &= \frac{1}{\epsilon_L} \bar{\chi}_\gamma (1 - \bar{\chi}_\gamma \Pi_L^R + i \bar{\chi}_\gamma \Pi_L^I) (\Pi_L^{R^2} - \Pi_L^{I^2} + i 2 \Pi_L^R \Pi_L^I), \\ &= \frac{1}{\epsilon_L} [\bar{\chi}_\gamma (1 - \bar{\chi}_\gamma \Pi_L^R) (\Pi_L^{R^2} - \Pi_L^{I^2}) - \bar{\chi}_\gamma^2 \Pi_L^R \Pi_L^{I^2}], \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon_L} [i 2 \bar{\chi}_\gamma (1 - \bar{\chi}_\gamma \Pi_L^R) \Pi_L^R \Pi_L^I + i \bar{\chi}_\gamma \Pi_L^I (\Pi_L^{R^2} - \Pi_L^{I^2})], \end{aligned}$$

dan

$$\text{Im } \delta \tilde{\Pi}_L = \frac{1}{\epsilon_L} [2 \bar{\chi}_\gamma (1 - \bar{\chi}_\gamma \Pi_L^R) \Pi_L^R \Pi_L^I + \bar{\chi}_\gamma \Pi_L^I (\Pi_L^{R^2} - \Pi_L^{I^2})]$$

Sehingga korelasi RPA untuk polarisasi longitudinal dapat ditulis,

$$\text{Im } \delta \tilde{\Pi}_L = \frac{1}{\epsilon_L} \bar{\chi}_\gamma \Pi_L^I [2 \Pi_L^R - \bar{\chi}_\gamma (\Pi_L^{R^2} + \Pi_L^{I^2})], \quad (\text{I.6})$$

dengan,

$$\epsilon_L = (1 - \bar{\chi}_\gamma \Pi_L^R)^2 + \bar{\chi}_\gamma^2 \Pi_L^{I^2}.$$

Bentuk eksplisit dari komponen real dan imajiner polarisasi untuk temperatur nol didapat dari referensi (Lim & Horowitz 1989, Horowitz & Wehrberg-

er 1991a) adalah,

$$\begin{aligned}
 Re \Pi_L = & \frac{q_\mu^2}{\pi^2 |\vec{q}|^2} \left[\frac{2}{3} k_F E_F - \frac{1}{6} |\vec{q}|^2 \ln \left(\frac{k_F + E_F}{m_e} \right) \right. \\
 & + \frac{q_0}{4 |\vec{q}|} \left(E_F^2 + \frac{q_0^2 - 3 |\vec{q}|^2}{12} \right) \ln |\alpha| - \frac{E_F (3 q_\mu^2 + 4 E_F^2)}{24 |\vec{q}|} \ln |\beta| \\
 & \left. + \frac{|\vec{q}|^2}{12 q_\mu^2} (2 m_e^2 + q_\mu^2) (4 m_e^2 - q_\mu^2) \Lambda \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Re \Pi_T = & \frac{1}{2 \pi^2} \left[\frac{1}{3} k_F E_F \left(1 + \frac{2 q_0^2}{|\vec{q}|^2} \right) + \frac{1}{3} q_\mu^2 \ln \left(\frac{k_F + E_F}{m_e} \right) \right. \\
 & + \frac{q_0 q_\mu^2}{4 |\vec{q}|^3} \left(\frac{q_0^2 + 3 |\vec{q}|^2}{12} + \frac{|\vec{q}|^2 m_e^2}{q_\mu^2} + E_F^2 \right) \ln |\alpha| \\
 & + \frac{E_F}{|\vec{q}|} \left(\frac{|\vec{q}|^4 - q_0^4}{8 |\vec{q}|^2} - \frac{m_e^2}{2} - \frac{q_\mu^2 E_F^2}{6 |\vec{q}|^2} \right) \ln |\beta| \\
 & \left. - \frac{1}{6} (2 m_e^2 + q_\mu^2) (4 m_e^2 - q_\mu^2) \Lambda \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Re \Pi_{VA} = & \frac{q_\mu^2}{2 |\vec{q}|^2 m_e} \left\{ \frac{m_e}{2 \pi^2 |\vec{q}|} \left[|\vec{q}| k_F + \frac{1}{2} q_0 E_F \ln |\alpha| \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left(\frac{q_\mu^2}{8} + \frac{E_F^2}{2} + \frac{|\vec{q}|^2 m_e^2}{2 q_\mu^2} \right) \ln |\beta| \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

dengan,

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{q_\mu^4 - 4(q_0 E_F - |\vec{q}| k_F)^2}{q_\mu^4 - 4(q_0 E_F + |\vec{q}| k_F)^2}, \\
 \beta &= \frac{(q_\mu^2 + 2 |\vec{q}| k_F)^2 - 4 q_0^2 E_F^2}{(q_\mu^2 - 2 |\vec{q}| k_F)^2 - 4 q_0^2 E_F^2}, \\
 \Lambda &= \frac{1}{2 \xi} \ln \left| \frac{q_\mu^4 E_F - 4 q_0 m_e^2 (q_0 E_F - |\vec{q}| k_F) - k_F q_\mu^2 \xi}{q_\mu^4 E_F - 4 q_0 m_e^2 (q_0 E_F + |\vec{q}| k_F) + k_F q_\mu^2 \xi} \right| \\
 &+ \frac{1}{2 \xi} \ln \left| \frac{q_\mu^4 E_F - 4 q_0 m_e^2 (q_0 E_F + |\vec{q}| k_F) - k_F q_\mu^2 \xi}{q_\mu^4 E_F - 4 q_0 m_e^2 (q_0 E_F - |\vec{q}| k_F) + k_F q_\mu^2 \xi} \right|, \\
 \xi &= \sqrt{q_\mu^2 (q_\mu^2 - 4 m_e^2)}.
 \end{aligned}$$

Dan,

$$\begin{aligned}
Im \Pi_L &= \frac{q_\mu^2}{2\pi|\vec{q}|^3} \left[\frac{q_\mu^2}{4}(E_F - E) + \frac{q_0}{2}(E_F^2 - E^2) + \frac{1}{3}(E_F^3 - E^3) \right]. \\
Im \Pi_T &= \frac{1}{4\pi|\vec{q}|} \left[\left(m_e^2 + \frac{q_\mu^2}{2} + \frac{q_\mu^4}{4|\vec{q}|^2} \right) (E_F - E) + \frac{q_0 q_\mu^2}{2|\vec{q}|^2} (E_F^2 - E^2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{q_\mu^2}{3|\vec{q}|^2} (E_F^3 - E^3) \right]. \\
Im \Pi_{VA} &= \frac{q_\mu^2}{8\pi|\vec{q}|^3} [q_0(E_F - E) + (E_F^2 - E^2)]. \\
Im \Pi_A &= \frac{m_e^2}{2\pi|\vec{q}|} (E_F - E).
\end{aligned}$$

Untuk komponen polarisasi yang riil perhitungannya serupa, tetapi karena keterbatasan waktu kami hanya mengambil hasil yang diperoleh dari referensi (Horowitz & Wehrberger 1991b).

Bentuk eksplisit dari komponen riil polarisasi untuk temperatur berhingga adalah,

$$\begin{aligned}
Re \Pi_L &= \frac{2q_\mu^2}{\pi^2|\vec{q}|^3} \int_0^\infty \frac{kdk}{E_K} \left[(1 + e^{\beta E_K - \alpha})^{-1} + (1 + e^{\beta E_K + \alpha})^{-1} \right] \\
&\times \left[|\vec{k}||\vec{q}| - \frac{1}{2}(E_K^2 - E_K q_0 + \frac{1}{4}q_\mu^2)L(E_K) - \frac{1}{2}(E_K^2 + E_K q_0 + \frac{1}{4}q_\mu^2)L(-E_K) \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Re \Pi_T &= \frac{2}{\pi^2|\vec{q}|^3} \int_0^\infty \frac{kdk}{E_K} \left[(1 + e^{\beta E_K - \alpha})^{-1} + (1 + e^{\beta E_K + \alpha})^{-1} \right] \\
&\times \left\{ \frac{1}{2}|\vec{k}||\vec{q}|(q_0^2 + |\vec{q}|^2) - \frac{1}{4} \left[m_e^2|\vec{q}|^2 + q_\mu^2(E_K - \frac{1}{2}q_0)^2 + \frac{1}{4}q_\mu^2|\vec{q}|^2 \right] L(E_K) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} \left[m_e^2|\vec{q}|^2 + q_\mu^2(E_K + \frac{1}{2}q_0)^2 + \frac{1}{4}q_\mu^2|\vec{q}|^2 \right] L(-E_K) \right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Re \Pi_{VA} &= \frac{q_\mu^2}{2|\vec{q}|^2 m_e} \left\{ \frac{-2m_e}{2\pi^2|\vec{q}|} \int_0^\infty \frac{kdk}{E_k} \left[(1 + e^{\beta E_k - \alpha})^{-1} - (1 + e^{\beta E_k + \alpha})^{-1} \right] \right. \\
&\times \left. \left[(E_k - \frac{1}{2}q_0)L(E_k) + (E_k + \frac{1}{2}q_0)L(-E_k) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

dengan,

$$\begin{aligned}
L(x) &= \ln \left| \frac{2xq_0 - q_\mu^2 - 2|\vec{k}||\vec{q}|}{2xq_0 - q_\mu^2 + 2|\vec{k}||\vec{q}|} \right|, \\
E_k &= \sqrt{m_e^2 + \vec{k}^2}.
\end{aligned}$$

Bentuk eksplisit dari komponen imajiner Polarisasi untuk temperatur berhingga didapat dari persamaan (B.17), (B.20), (B.21) dan (B.25):

$$\begin{aligned}
 Im \Pi_L &= \frac{q_\mu^2}{2\pi|\vec{q}|^3} \int_{e_-}^{\infty} dE \left[\left(E + \frac{1}{2}q_0 \right)^2 - \frac{1}{4}|\vec{q}|^2 \right] \times [F(E, E + q_0) + F(E + q_0, E)]. \\
 Im \Pi_T &= \frac{q_\mu^2}{4\pi|\vec{q}|^3} \int_{e_-}^{\infty} dE \left[\left(E + \frac{1}{2}q_0 \right)^2 + \frac{1}{4}|\vec{q}|^2 + \frac{|\vec{q}|^2 m_e^2}{q_\mu^2} \right] \\
 &\quad \times [F(E, E + q_0) + F(E + q_0, E)]. \\
 Im \Pi_{VA} &= \frac{q_\mu^2}{8\pi|\vec{q}|^3} \int_{e_-}^{\infty} dE [2E + q_0] \times [F(E, E + q_0) - F(E + q_0, E)]. \\
 Im \Pi_A &= \frac{m_e^2}{2\pi|\vec{q}|} \int_{e_-}^{\infty} dE \times [F(E, E + q_0) + F(E + q_0, E)].
 \end{aligned}$$

Daftar Acuan

- [1] Balantekin, A. B., Volpe, C., dan Welzel, J. (2007). Impact of the neutrino magnetic moment on supernova r-process nucleosynthesis. *Journal of Cosmologi Astroparticle Physics* 0709, 016. *arXiv:0706.3023v1[astro-ph]*.
- [2] Braaten, E., dan Segel, D. (1993). Neutrino energy loss from the plasma process at all temperatur and densities. *Physical Review D* 48,1478. *arXiv: hep-ph/9302213v1*.
- [3] Burrows, A., Reddy, S. dan Thompson, T. A. (2006). Neutrino opacities in nuclear matter. *Nuclear Physics A* 777, 356. *arXiv: astro-ph/0404432v1*.
- [4] Caroline (2004). *Efek faktor bentuk elektromagnetik neutrino pada interaksi neutrino dengan materi mampat*. Thesis. Universitas Indonesia. Depok.
- [5] Chin, S. A. (1977). A Relativistic many-body theory of high density matter. *Annals of physics* 108, 301.
- [6] Daraktchieva, Z., et al. (2003). Limits on the neutrino magnetic moment from MUNU experiment. *Physics Letter B* 564, 190. *arXiv:hep-ex/030411v2*.
- [7] Davidov, A. S. (1976). *Quantum Mechanics*. Oxford: Pergamon Press
- [8] Fetter, A. L., dan Walecka, J. D. (1971), *Quantum theory of many-particle systems*. New York: McGraw-Hill Book Company
- [9] Glandenning, N. K. (2000), *Compact stars nuclear physics, particle physics, and general relativity*. New York: Springer.
- [10] Giunti, C., dan Chung, W. K.(2007). *Fundamentals of neutrino physics and astrophysics*. New York: Oxford University Press.

-
- [11] Giunti, C., dan Studenikin, A. (2009). Neutrino electromagnetic properties. *Physics Atom Nuclear* 72 2089. *arXiv:0812.3646v5*.
 - [12] Halzen, F., dan Martin, A.D. (1984). *Quarks and Leptons: an introductory course in modern particle physics*. New York: John Wiley & Sons.
 - [13] Horowitz, C. J., dan Wehrberger, K. (1991a). Neutrino neutral current interactions in nuclear matter. *Nuclear Physics* A531, 665.
 - [14] Horowitz, C. J., dan Wehrberger, K. (1991b). Neutrino neutral current interactions in hot dense matter. *Physics Letter* B266, 236.
 - [15] Horowitz, C. J., dan Pérez-García, M. A. (2003). Realistic neutrino opacities for supernova simulations with correlations and weak magnetism. *Physical Review C* 68, 025803.
 - [16] Hutaauruk, P. T. P. (2004). *Lintasan bebas rata-rata neutrino di bintang neutron*. Thesis. Universitas Indonesia. Depok.
 - [17] Keil, M. T. (2003). *Supernova neutrino spectra and applications to flavor oscillations*. Dissertation. Institut für Theoretische Physik T30. Univ.-Prof. Dr. Manfred Lindner. München *arXiv:astro-ph/0308228v1*.
 - [18] Keil, M. T., Raffelt, G. G., dan Janka, H. T. (2003). Monte Carlo study of supernova neutrino spectra formation. *Astrophysics* J590, 971. *arXiv:astro-ph/0208035*.
 - [19] Kerimov, B. K., Safin, M. Ya., dan Nazih, H. (1988). Neutrino electromagnetic moments and elastic neutrino and reactor-antineutrino scattering at electrons. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Fizicheskaya* 52, 136.
 - [20] Kumerički, K. (2001). *Feynman diagrams for beginners*. Notes. University of Zagreb. Split.
 - [21] Lim, K. dan Horowitz, C.J. (1989). Collective modes in a relativistic meson-nucleon system. *Nuclear Physics* A501, 729.

-
- [22] Nardi, E. (2003). On the neutrino vector and axial vector charge radius. *American Institut of Physics Conference Proceedings* 670, 118. *arXiv:hep-ph/0212266v1*.
- [23] Nasa (2011). Cooling neutron star. *Astronomy picture of the day*, http://apod.nasa.gov/apod/ap_110305.html.
- [24] Niembro, R., et al. (2001). Neutrino cross section and mean free path in neutron star in the framework of the Dirac-Hartree-Fock approximation. *Physical Review C* 64, 055802.
- [25] Nuccioti, A. (2010). Neutrino mass calorimetric searches in the MARE experiment. *Nuclear Physics B proceedings Supplement* 00, 1. *arXiv:1012.2290v1 [hep-ex]*.
- [26] Reddy, S., Prakash, M., dan Lattimer, J. M. (1998). Neutrino interactions in hot and dense matter. *Physical Review D* 58, 013009.
- [27] Reddy, S., dan Prakash, M. (1996). Neutrino scattering in a newly born neutron star. *The Astrophysical Journal* 478, 689. *arXiv:astro-ph/9610115v2*.
- [28] Reddy, S., et al. (1999). Effects of strong and electromagnetic correlations on neutrino interactions in dense matter. *Physical Review C* 59, 2888.
- [29] Saito, K., Maruyama, T., dan Soutome, K. (1989). Collective modes in hot and dense matter. *Physical Review C* 40, 407.
- [30] Sulaksono, A., Hutaauruk, P. T. P., dan Mart, T. (2005). Isovector channel role of relativistic mean field models in the neutrino mean free path. *Physical Review C* 72, 065801. *arXiv:nucl-th/0512093v1*.
- [31] Sulaksono, A., et al. (2006). Neutrino electromagnetic form factors effect on the Neutrino cross section in dense matter. *Physical Review C* 73, 025803. *arXiv:nucl-th/0601002v1*.
- [32] Vogel, P., dan Engel, J., (1988). Neutrino electromagnetic form factor. *Physical Review D* 39, 3378.

[33] *Wikipedia* (2010a). Supernova. [http//en.wikipedia.org/wiki/Supernova](http://en.wikipedia.org/wiki/Supernova).

[34] *Wikipedia* (2010b). Neutrino. [http//en.wikipedia.org/wiki/Neutrino](http://en.wikipedia.org/wiki/Neutrino).