TESIS

EKSTRAKSI RUANG FASE KLASIK DARI GRUP LIE SIMETRI

THE EXTRACTION OF CLASSICAL PHASE SPACE FROM SYMMETRY LIE GROUP

CAHAYA ROSYIDAN
10/305713/PPA/03192

PROGRAM STUDI S2 ILMU FISIKA
JURUSAN FISIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS GADJAH MADA
YOGYAKARTA

2012

TESIS

EKSTRAKSI RUANG FASE KLASIK DARI GRUP LIE SIMETRI

THE EXTRACTION OF CLASSICAL PHASE SPACE FROM SYMMETRY LIE GROUP

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh derajat
Master of Science Ilmu Fisika

CAHAYA ROSYIDAN
10/305713/PPA/03192

PROGRAM STUDI S2 ILMU FISIKA
JURUSAN FISIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS GADJAH MADA
YOGYAKARTA

2012

HALAMAN PENGESAHAN

TESIS

EKSTRAKSI RUANG FASE KLASIK DARI GRUP LIE SIMETRI

Telah dipersiapkan dan disusun oleh

CAHAYA ROSYIDAN
10/305713/PPA/03192

Telah dipertahankan di depan Tim Penguji
pada tanggal 31 Juli 2012

Susunan Tim Penguji

Dr. rer. nat. Muhammad Farchani Rosyid Pembimbing Utama/Penguji	Dr. Arief Hermanto Penguji
Dr. Guntur Maruto, S.U Pembimbing Pendamping I	Mirza Satriawan, Ph.D Penguji
	Dr. Rinto Anugraha NQZ Penguji

Tesis ini telah diterima sebagai salah satu persyaratan
Untuk memperoleh gelar *Master of Science* Ilmu Fisika
Tanggal 31 Juli 2012

Prof. Dr. Kusminarto
Pengelola Program Studi S2 Ilmu Fisika

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tesis ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Yogyakarta, 31 Juli 2012

CAHAYA ROSYIDAN

Karya sederhana ini kupersembahkan
untuk Bapak, Ibu, semua Kakak-kakakku tersayang dan
terkasih
dan Calon Istri tercinta

Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal, (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadaan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata) : Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha Suci Engkau, maka peliharalah kami dari siksa neraka.

(Q.S. Ali Imran : 190 - 191)

Bermimpilah setinggi dan sejauh langit biru di angkasa dan jangan takut untuk jatuh, karena dari jatuh tersebut sebenarnya kita sedang belajar dan menganalisis kesalahan kita dimana. Ilmu Allah sangat luas terhampar dari muka bumi hingga miliaran galaksi diluar sana. Berfikir bebas tanpa tekanan akan membuat kita semakin kaya akan ilmu pengetahuan.

(Cahaya Rosyidan)

PRAKATA

Segala puji dan syukur semata-mata hanya untuk Allah SWT, karena atas segala rahmat, hidayah dan bantuan-Nya jualah maka akhirnya Tesis dengan judul Ekstraksi Ruang Fase Klasik dari Grup Lie Simetri ini telah selesai penulis susun.

Telah banyak bantuan yang penulis peroleh selama dalam penulisan Tesis ini , untuk itu tak lupa penulis ucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak dan Ibu yang selama ini telah sabar membimbing dan mendoakan penulis tanpa kenal waktu untuk selama-lamanya.
2. Dr. rer. nat. Muhammad Farchani Rosyid, selaku Pembimbing utama, yang telah memberikan ilmunya kepada penulis serta dengan penuh kesabaran membimbing penulis.
3. Dr. Guntur Maruto, S.U, selaku Pembimbing pendamping yang telah memberikan ilmunya tentang Mekanika Klasik secara sabar kepada penulis.
4. Mirza Satriawan, Ph.D, yang telah memberikan ilmunya tentang Fisika Partikel.
5. Siti Wahyuni, M.Sc dan Joko Saefan, M.Sc yang telah mengajarkan LaTeX kepada penulis serta memberikan bimbingan penggunaan LaTeX tersebut dengan sabar.
6. Segenap staf dan karyawan di jurusan Fisika FMIPA UGM, yang telah banyak bekerjasama dengan penulis selama belajar di FMIPA UGM.
7. Sahabat saya Akmal, Apri, Doni, Junaidi, Andreas, Asmiati, Eko, Nico, Samsurizal, Harun, Denik, Romi yang sedia diajak bertukar pikiran dalam penulisan tesis ini.
8. Sahabat saya semua anak KAM (Atsna, Ana, Sidik, Rinto, Lusi, Idham, Inur) yang banyak memberikan inspirasi dan motivasi kepada saya.
9. Sahabat saya semua anak S2 Ilmu Fisika kalian adalah ilmuwan muda.
10. Calon Istri Bekti S.U yang selalu memotivasi saya.
11. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Tesis ini tentunya tidak lepas dari segala kekurangan dan kelemahan, untuk itu segala kritikan dan saran yang bersifat membangun guna kesempurnaan tesis ini sangat diharapkan. Semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi kita semua dan lebih khusus lagi bagi pengembangan ilmu fisika.

Yogyakarta, 17 Juli 2012

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

INTISARI

EKSTRAKSI RUANG FASE KLASIK DARI GRUP LIE SIMETRI

Oleh

CAHAYA ROSYIDAN
10/305713/PPA/03192

Telah dilakukan penelitian dalam obyek geometri simplektik. Obyek terpenting dalam geometri simplektik adalah manifold simplektik. Manifold simplektik adalah pasangan (M, ω) dengan M adalah manifold licin dan ω adalah forma-2 tertutup, tidak merosot pada M yang dinamakan struktur simplektik. Dari sebuah sistem fisis dapat diketahui gambaran kuantum melalui wakilan uniter dan gambaran klasik melalui wakilan koajoin. Kajian penelitian ini hendak mencari ruang fase klasik dari grup Lie simetri dengan korespondensi teorema 3.26. Penelitian ini mengambil contoh kasus khusus grup Lie $SU(2)\otimes U(1)$. Manifold simplektik $(SU(2)\otimes U(1)/G_{\xi}, \omega)$ sebagai ruang fase klasik yang keluar dari grup $SU(2) \otimes U(1)$. Struktur simplektik yang telah dipilih akan menentukan persamaan gerak dalam mekanika klasik, yaitu persamaan gerak Hamilton.

Kata-kata kunci : manifold simplektik (M, ω), grup Lie, mekanika Hamilton.

ABSTRACT

THE EXTRACTION OF CLASSICAL PHASE SPACE FROM SYMMETRY LIE GROUP

By

CAHAYA ROSYIDAN
10/305713/PPA/03192

We have research symplectic geometric object. The most important of symplectic geometric is symplectic manifold. Symplectic manifold is pairing (M, ω) wich M is smooth manifold and ω is close 2-form and nondegenerate on M called symplectic structure. We can find quantum version through uniter representation and classical version through coadjoint representation from a physics system. This research find phase space from Lie group symmetri with correspond 3.26 theorem. These research take case Lie group $SU(2) \otimes U(1)$. Symplectic manifold $(SU(2) \otimes U(1)/G_{\xi}, \omega)$ to be classical phase space of $SU(2) \otimes U(1)$. The chosen symplectic structure will determine equation motion in classical mechanic that is Hamilton equation.

Keywords : symplectic manifold, Lie group, Hamilton mechanic.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Pandangan tentang hubungan antara fisika dan matematika bervariasi, dari yang minimalis sampai yang maksimalis, yakni dari matematika hanya sebagai alat bantu agar fisika menjadi lebih mudah dan sebagai bahasa untuk mengkomunikasikan fisika agar mudah dimengerti, hingga fisika sebagai upaya menemukan matematika alam. Pandangan moderat mengatakan bahwa fisika adalah upaya menemukan kaidah - kaidah atau pola - pola keteraturan yang ditaati oleh alam dan membingkainya secara matematis untuk menentukan hubungan antara besaran - besaran fisis. Artinya, fisika adalah upaya untuk mencari wakilan realitas fisis dalam realitas matematis.

Matematiskah alam ini? Jika perilaku - perilaku alam akan dirumuskan dengan model matematis, lalu, dapatkah segala perilaku alam ini dimodelkan secara matematis? Seandainya alam ini matematis, maka tentu saja alam ini tidak boleh "melebihi" matematika. Tetapi, matematika sendiri telah terikat oleh alam ini. Jadi, yang disebut matematika telah dibatasi oleh alam. Oleh karena itu, fisika hanyalah berusaha mendapatkan pola - pola matematis yang paling dekat dengan kaidah - kaidah atau pola - pola alam [Rosyid, 2009].

Mekanika geometrik merupakan bayangan mekanika klasik dalam matematika khususnya dalam geometri diferensial. Artinya, matematikawan berupaya memahami mekanika klasik dalam bentuk geometri diferensial. Realisasi untuk mewakili mekanika itu bergantung pada keumuman geometrinya. Diagram yang memperlihatkan tingkatan keumuman wakilan matematis bagi mekanika yang bergantung pada keumuman geometri yang digunakan dapat dilihat pada gambar 1.1 di lampiran [Rosyid, 2011].

Kajian dalam tesis ini hendak dibatasi pada mekanika simplektik. Objek paling penting dalam mekanika simplektik adalah manifold simplektik. Sebuah manifold simplektik adalah pasangan (M, ω), dengan M adalah manifold licin dan ω adalah forma-2 tertutup, tidak merosot pada M, yang dinamakan stuktur simplektik. Sebuah titik pada manifold simplektik M akan mewakili keadaan klasik dari sistem fisis tersebut.

Stuktur simplektik mempunyai peranan yang sangat penting terutama dalam bidang fisika, tekhnik dan matematika. Mekanika simplektik terutama sangat berperan dalam mekanika klasik di fisika. Struktur simplektik dapat diperluas penggunaanya dalam mekanika, misalkan untuk menghubungkan simetri dari sistem fisis ke besaran fisis (energi, momentum linier, momentum sudut dll). Mekanika simplektik adalah matematika dari mekanika dan mekanika Hamilton merupakan mekanika simplektik dalam ruang fase [Gotay, 1992].

Berlawanan dengan kasus pada metrik pseudo Riemannan, tidak setiap manifold diijinkan memiliki stuktur simplektik. Ada beberapa manifold yang tidak mungkin memiliki struktur simplektik: manifold (berdimensi berapapun) yang tidak berorientasi, manifold yang berdimensi gasal dan kompak, dengan grup kohomologi derajat keduanya lenyap.

Manifold simplektik adalah manifold Poisson dengan kurung Poisson yang di bawa oleh aljabar Lie jodoh $\mathfrak{g}^*$. Kurung Poisson mempunyai peranan yang penting dalam mendiskripsikan Hamiltonian dari sebuah sistem fisis. Kurung ini bukanlah kurung yang disekawankan dengan struktur simplektik pada $\mathfrak{g}^*$, tetapi adalah sebuah contoh dari konsep yang lebih umum dari manifold simplektik. Namun demikian, kurung Poisson disekawankan dengan struktur simplektik pada orbit koajoin dan dengan struktur simplektik kanonis pada T^*G. Terdapat sebuah teorema yang penting dalam penelitian ini, yaitu teorema 3.26 di mana dalam teorema ini kita dapat mencari sebuah ruang fase klasik dari grup Lie simetri.

Menurut teorema 3.26, orbit koajoin sebagai ruang fase klasik sistem fisis yang tunduk pada simetri suatu grup muncul secara alamiah melalui wakilan koajoin grup simetri sistem tersebut ketika grup simetrinya memenuhi syarat - syarat tertentu. Gagasannya adalah dari sebuah sistem fisis tersebut akan dicari ruang fase klasik dengan cara mencari wakilan koajoin grup simetrinya, sebagai gambaran klasik bagi sistem fisis tersebut dan watak ruang fase tersebut.

1.2 Perumusan Masalah

Dirumuskan beberapa permasalahan sebagai berikut :

1. Merekonstruksi ruang fase klasik bagi sistem fisis dengan grup simetri tersebut.
2. Mengetahui watak ruang fase dari sistem fisis tersebut.

1.3 Batasan Masalah

Penelitian dalam tesis ini dibatasi hanya dalam mekanika simplektik dan hanya dalam gambaran klasik, tidak sampai prosedur pengkuantuman. Dari grup simetri ini akan direkonstruksi ruang fase klasik bagi sistem fisis tersebut dan diketahui watak ruang fase tersebut. Kajian dalam penelitian ini bersifat kasuistik (kongkrit).

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan perumusan masalah yang telah di utarakan di atas, maka tujuan penulisan tesis ini adalah:

Membangun ruang fase klasik bagi sistem fisis tersebut dari grup simetrinya dan mengetahui watak dari ruang fase bagi sistem fisis tersebut.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini memberikan hasil yang bermanfaat bagi pekerjaan-pekerjaan dalam bidang teoritik baik matematika maupun fisika. Manfaat tersebut antara lain adalah :

1. Menambah khasanah manifold simplektik sebagai ruang fase : orbit koajoin sebagai ruang fase klasik muncul secara alamiah melalui simetri sebuah sistem fisis.
2. Pencarian ruang fase klasik maupun gambaran kuantum dari sistem fisis dapat menggunakan grup simetri.

1.6 Tinjauan Pustaka

Dalam mekanika klasik yang bertindak sebagai ruang keadaan adalah ruang fase klasik, maka tiap titik pada ruang fase klasik berkorespondensi satu-satu dengan keadaan yang mungkin dimiliki oleh sistem fisis yang ditinjau. Jadi, bila kita mempersiapkan suatu sistem untuk berada pada suatu keadaan yang diwakili oleh sebuah titik dalam ruang fase klasik, maka sama artinya dengan mempersiapkan sistem itu berada pada posisi umum dan momentum umum. Apabila suatu sistem fisis diketahui posisi dan momentum umumnya, maka segala informasi fisis tersebut akan dapat diperoleh.

Dinamika suatu sistem fisis merupakan perkembangan keadaan sistem itu seiring bertambahnya waktu. Model matematis bagi dinamika suatu sistem fisis adalah kurva-kurva berparameterkan waktu, kurva-kurva tersebut merupakan penyelesaian dari suatu persamaan diferensial yang merupakan persamaan gerak bagi sistem yang ditinjau. Persamaan gerak ini ditentukan oleh struktur simplektik yang telah dipilih dan dalam mekanika klasik disebut sebagai persamaan gerak Hamiltonian. Berikut ini adalah beberapa contoh penelitian yang telah dilakukan selama ini :

Alekseev [1993] menganalogikan Lie-Poisson dari *cotangen bundle* dan orbit koajoin dari sebuah grup Lie G. Aljabar Lie jodoh $\mathfrak{g}^*$ membawa kurung Poisson yang meniru komutator Lie di $\mathfrak{g}$. Aksi grup G pada $\mathfrak{g}^*$ disebut juga aksi koajoin dan aksi tersebut melestarikan kurung Poisson. Struktur simplektik diwarisi bersamaan dengan orbit dari aksi koajoin G ke $\mathfrak{g}^*$. Kirilov mendapatkan sebuah ungkapan yang elegan untuk forma simplektik ω di orbit $\omega_x(u,v) = \langle X, [\epsilon_u, \epsilon_v]\rangle$, dengan $\langle , \rangle$ adalah pasangan kanonis antara $\mathfrak{g}$ dan $\mathfrak{g}^*$.

Cahen [1999] dalam penelitiannya membuktikan bahwa setidaknya terdapat satu keberadaan koneksi invarian-G simplektik pada orbit koadjoin dari grup Lie G *semisimple* kompak. Contoh kasus khusus yang di pakai adalah grup SU(3). Sebuah manifold simplektik homogen terhubung sederhana dikenal menjadi sebuah orbit koajoin dari $O \subset \mathfrak{g}^*$ dari grup Lie G kompak *semisimple*. Andaikan (M, ω) adalah manifold simplektik dan H adalah stabiliser aljabar Lie $\mathfrak{h}$. Jika ∇^0 adalah koneksi simplektik invarian pada M, maka ∇^0 selalu ada karena G adalah kompak dan sebagai koneksi simplektik.

Diep [2001] membangun *star-products* pada orbit koajoin grup Lie $Aff(\mathbb{C})$ dari transformasi garis kompleks dan menggunakanya untuk mendapatkan wakilan uniter dari grup ini. Grup Lie $Aff(\mathbb{C})$ adalah grup Lie berdimensi-4 riil dan aljabar Lie $aff(\mathbb{C})$ juga merupakan berdimensi-4 riil. Orbit koajoin $Aff(\mathbb{C}) \in \mathfrak{g}^*$ yang melalui $F \in \mathfrak{g}^*$ dinyatakan oleh $K(Aff(\mathbb{C}))F := \big\{K_{(g)}F | g \in Aff(\mathbb{C})\big\}$.

Penelitian yang dilakukan oleh Alekseev [2003] mencari formulasi eksplisit untuk invarian produk-* pada kelas besar dari orbit koajoin. Invarian produk-* pada ruang homogen didefinisikan oleh deret pangkat di $\hbar$ dengan koefisien operator bidiferensial kompleks pada M. Produk-* di berikan oleh $f*g := fg+\sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n B_n(f,g)$ untuk setiap $f, g \in C^\infty(M)$. Andaikan G adalah grup Lie dan $H \subset G$ adalah subgrup tertutup dari G. Didefinisikan wakilan aljabar Lie oleh $\mathfrak{g}$ dan $\mathfrak{h}$. Kuosien M:=G/H membawa sebuah aksi transitif dari G. Orbit koajoin tunduk pada aksi G pada ruang homogen M.

Sebenarnya yang dilakukan oleh Kostant [2003] adalah melakukan penelitian terhadap manifold simplektik (M, ω) sampai dengan ranah kuantum yaitu dengan jalan pre-kuantisasi. Andaikan (L, ∇) sebagai kuantum *line bundle* dengan koneksi di atas X dan ω sebagai kurva. Namun yang ingin dilihat dalam penelitian ini adalah seperti apa orbit koajoin dari aksi sebuah grup Lie pada ruang vektor jodoh. Dengan menganggap X sebagai orbit koajoin dari sebuah grup Lie K pada $\mathfrak{p}$ dengan $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} + \mathfrak{p}$, maka terdapat induksi simplektik dari orbit koajoin tersebut.

Masuda [2009] meninjau sebuah aksi grup Torus $\mathbb{T}$ pada manifold simplektik (M, ω) yang aksinya merupakan aksi efektif dari sebuah grup Lie G kompak (bukan abelian). Masuda berpikiran mungkin $\mathbb{T}$ dan G sebagai subgrup Lie kompak dari simplektomorfisme grup $Symp(M, \omega)$ dari (M, ω). Dengan kata lain (M, ω) diturunkan oleh sekawan *moment polytope* yang di peroleh oleh Delzant. Oleh karena itu, grup G setidaknya diperkirakan dalam bentuk P atau dengan kata lain sebuah maksimal subgrup Lie kompak dari $Symp(M, \omega)$ yang membawa torus $\mathbb{T}$ dapat digambarkan melalui bentuk di P.

Penelitian yang dilakukan oleh Rosyid [2011] adalah meneliti sebuah geometri mekanik dan gerak alam *(biolocomotion)*. Dalam penelitian tersebut Rosyid mengkaji sebuah ruang fase klasik dari grup SU(n+1) dan mencoba mendapatkan persamaan gerak dari grup yang ditinjau. Dari grup SU(n+1) Rosyid berusaha mendapatkan gambaran klasik dari grup tersebut. Ruang homogen simplektik SU(n+1)/U(n) disertai struktur ω merupakan ruang fase klasik bagi grup SU(n+1).

Jadi dengan melihat pekerjaan-pekerjaan yang sudah dikerjakan di atas dan sampai tesis ini diajukan untuk diuji, penulis belum mendapatkan penelitian lain selain mendapatkan ruang fase klasik dari grup Lie $SU(2) \otimes U(1)$ seperti yang dikerjakan dalam tesis ini.

1.7 Metode Penelitian

Penelitian dalam tesis ini secara keseluruhan merupakan kajian teoritis. Beberapa pengetahuan sebagai landasan berpikir dalam penulisan tesis ini adalah pengetahuan tentang teori himpunan, objek aljabar, objek geometri dan teori-teori dalam mekanika klasik. Pengetahuan tentang teori himpunan merupakan konsep elementer dalam tesis ini, karena semua teori dalam tesis dimulai dari konsep himpunan. Objek aljabar merupakan perluasan dari konsep himpunan dalam objek aljabar ini akan menggunakan sebuah wakilan grup simetri yang tepat untuk mendapatkan gambaran klasik dari sebuah sistem fisis. Sebuah objek penting dari mekanika simplektik adalah manifold simplektik. Manifold adalah sebagai ruang topologis , dalam ruang ini akan dicari korespondensi antara objek aljabar dan objek geometri dengan menggunakan teorema 3.26, sehingga kita dapatkan ruang fase klasik bagi ruang fase tersebut.

1.8 Sistematika Penulisan

Tesis ini tersusun atas lima bab, dengan uraian sebagai berikut :

1. Bab I Pendahuluan. Bab ini menyajikan latar belakang masalah, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

2. Bab II Geometri Simplektik dan Mekanika Hamilton. Bab ini berisi tentang teori geometri simplektik dan mekanika hamiltonian.

3. Bab III Wakilan Orbit Sebagai Ruang Fase Klasik dalam Mekanika Klasik. Bab ini berisi penjabaran dari definisi grup Lie, aljabar Lie dan perhitungan-perhitungan yang membantu dalam penelitian.

4. Bab IV Ruang Fase Klasik yang di Ekstrak dari Grup $SU(2) \otimes U(1)$. Bab ini berisi analisis ruang fase klasik dari grup $SU(2) \otimes U(1)$.

5. Bab V Kesimpulan dan Saran. Bab ini berisi tentang kesimpulan dari penelitian yang sudah dilakukan dan saran agar penelitian ini dapat dilanjutkan.

BAB II

GEOMETRI SIMPLEKTIK DAN MEKANIKA HAMILTON

Manifold simplektik merupakan obyek pokok dalam penelitian ini. Manifold licin beserta struktur simplektik ω akan dijelaskan dalam bab ini. Penjelasan mengenai definisi ruang vektor simplektik menjadi pembuka dalam bab II ini hingga gambaran klasik dalam mekanika klasik. Artikel ataupun buku-buku yang diacu adalah Anas da Silva dan Marsden.

2.1 Ruang Vektor Simplektik

Andaikan V adalah ruang vektor di atas $\mathbb{R}$ dan andaikan $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ merupakan pemetaan bilinier.

Definisi 2.1. *(da Silva [2001])*
Pemetaan $\widetilde{\omega} : V \to V^*$ *adalah pemetaan linier yang didefinisikan oleh* $\widetilde{\omega}(v)(u) = \omega(u)(v)$

Definisi 2.2. *Sebuah pemetaan bilinier anti-simetri* ω *adalah simplektik (tidak merosot) jika* $\widetilde{\omega}$ *adalah bijektif. Maka, pemetaan* ω *disebut sebuah struktur simplektik linier pada V dan* (V, ω) *adalah ruang vektor simplektik.*

2.2 Manifold Simplektik

Forma simplektik merupakan forma-2 yang memenuhi sebuah syarat aljabar, tidak merosot, analitik dan tertutup.

2.2.1 Forma Simplektik

Menurut da Silva [2001] pemetaan bilinier anti-Simetri, andaikan V adalah ruang vektor berdimensi-m di atas $\mathbb{R}$, dan misalkan $\omega : V\text{x}V \mapsto \mathbb{R}$ adalah pemetaan bilinier. Pemetaan ω adalah anti-simetri jika $\omega(u, v) = -\omega(u, v), \forall\, u, v \in V$.

Andaikan V adalah ruang banah riil berdimensi infinit dan $\omega : V\text{x}V \mapsto \mathbb{R}$ merupakan forma biliner pada V. Forma ω dikatakan tidak merosot (tidak merosot lemah) jika $\omega(v_1, v_2) = 0 \;\forall\, v_2 \in V$ berimplikasi $v_1 = 0$.

Definisi 2.3. *(Marsden [1998])*
Sebuah forma simplektik ω pada ruang vektor V adalah tidak merosot anti-simetri forma bilinier pada V. Pasangan (V, ω) dikatakan ruang vektor simplektik, jika ω adalah tidak merosot kuat maka (V, ω) dikatakan ruang vektor simplektik kuat.

Dalam kasus linier, tidak merosot kuat dari forma-2 ω artinya bahwa untuk setiap $p \in V$, forma bilinier $\omega_p : T_pV \text{x} T_pV \mapsto \mathbb{R}$ adalah tidak merosot, bahwa ω_p mendefinisikan sebuah isomorfisme

$$\omega_p : T_pV \mapsto T_p^*V.$$

Untuk forma simplektik lemah, diinduksi pemetaan $\omega : \chi(V) \mapsto \chi^*(P)$ diantara medan vektor dan forma-1. Karena sifat ω tertutup bahwa $d\omega = 0$ dengan d adalah turunan eksterior, sehingga kurung Poisson memenuhi identitas Jakobi dan akan ada aliran medan vektor Hamiltonian dari transformasi kanonis.

2.2.2 Manifold Simplektik

Misalkan ω adalah sebuah medan forma-2 pada manifold M, maka di setiap titik $p \in M$ ada pemetaan $\omega_p : T_pM \times T_pM \mapsto \mathbb{R}$ yang merupakan pemetaan bilinier pada ruang vektor singgung di titik p pada M dan ω_p bervariasi secara licin di titik p. Forma ω dikatakan tertutup jika ω memenuhi persamaan licin $d\omega = 0$, dengan d adalah turunan eksterior de Rham [da Silva, 2001].

Definisi 2.4. *(da Silva [2001]). Forma-2 ω merupakan simplektik jika ω tertutup dan ω_p adalah simplektik $\forall\ p \in M$.*

Jika ω simplektik, maka dim T_pM = dim M harus genap.

Definisi 2.5. *Sebuah manifold simplektik merupakan pasangan (M, ω) dengan M adalah manifold dan ω adalah forma simplektik.*

Contoh 1. *(da Silva [2001]).*

Misalkan M =$\mathbb{R}^{2n}$ dengan koordinat linier $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. Forma $\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$ adalah simplektik dan himpunan

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial_{x_1}}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial_{x_n}}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial_{y_1}}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial_{y_n}}\right)_p \right\}$$

adalah basis simplektik dari T_pM.

2.2.3 Simplektomorfisme

Definisi 2.6. *(da Silva [2001]). Andaikan (M_1, ω_1) dan (M_2, ω_2) adalah manifold simplektik berdimensi-2n dan misalkan $g : M_1 \mapsto M_2$ diffeomorfisme, maka g adalah simplektomorfisme jika $g^*\omega_2 = \omega_1$.*

Teorema Darboux berikut membantu kita melihat manifold simplektik secara lokal. Manifold simplektik yang berdimensi-2n secara lokal mirip dengan $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Teorema 2.7. ***(Darboux)****. Andaikan (M, ω) adalah sebuah manifold berdimensi-2n. Untuk setiap titik p pada M, terdapat peta $(U, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ dengan domain $U \subset M$ sedemikian rupa sehingga*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i.$$

*Sebuah peta $(U, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ pada teorema 2.7 dinamakan sebagai **peta Darboux**.*

2.2.4 Untingan Singgung Jodoh

Misalkan X adalah manifold berdimensi-n dan $M = T^*X$ merupakan untingan singgung jodoh. Jika struktur manifold pada X digambarkan oleh peta koordinat $(U, x_1, \ldots, x_n)$ dengan $x_i = U \mapsto \mathbb{R}$, maka setiap $x \in U$, $(dx_1)_x, \ldots, (dx_n)_x$ merupakan basis bagi T_x^*X. Yaitu, jika $\xi \in T_x^*X$, maka $\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (dx_i)_x$ untuk beberapa koefisien riil $\xi_i, \ldots, \xi_n$ menginduksi sebuah pemetaan

$$\begin{aligned} T^*U &\mapsto \mathbb{R}^{2n} \\ (x, \xi) &\mapsto (x_1, \ldots, x_n, \xi_i, \ldots, \xi_n). \end{aligned}$$

Peta $(T^*U, x_1, \ldots, x_n, \xi_i, \ldots, \xi_n)$ adalah peta koordinat bagi T^*X; $x_1, \ldots, x_n, \xi_i, \ldots, \xi_n$ adalah koordinat untingan singgung jodoh $x_1, \ldots, x_n$ pada U. Fungsi transisi yang saling melengkapi adalah licin: diberikan dua koordinat $(U, x_1, \ldots, x_n)$, $(U', x_1', \ldots, x_n')$ dan $x \in U \cap U'$, jika $\xi \in T_x^*X$, maka

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (dx_i)_x = \sum_{i,j} \xi_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j'} \right) (dx_j')_x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j' (dx_j')_x$$

dengan $\xi_j' = \sum_i \xi_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j'}\right)$ adalah licin. Karena, T^*X adalah manifold berdimensi-2n.

Forma kanonis pata untingan singgung jodoh adalah relevan untuk beberapa cabang, termasuk analisis operator turunan, sistem dinamika dan mekanika klasik.

2.3 Mekanika Hamiltonian

Persamaan gerak dalam mekanika klasik muncul sebagai solusi dari masalah variasi. Untuk sebuah sistem mekanis n partikel di $\mathbb{R}^3$, lintasan fisis memenuhi hukum ke-2 Newton. Dengan kata lain, lintasan fisis meminimalkan nilai rata - rata dari energi kinetik dikurangi energi potensial, besaran ini dinamakan aksi. Untuk sistem dengan kendala, lintasan fisis adalah lintasan yang meminimalkan aksi milik seluruh lintasan yang terkendala [da Silva, 2001].

Transformasi Legendre memberikan hubungan antara fungsi variasi **(Euler-Lagrange)** dan formula simplektik **(Hamiltonian-Jacobi)** yang merupakan persamaan gerak benda.

2.3.1 Medan Vektor Hamiltonian dan Simplektik

Definisi 2.8. *(da Silva [2001]) Sebuah medan vektor X_H dinamakan medan vektor Hamiltonian dengan fungsi Hamiltonian H, jika $dH + X_H \iota\omega = 0$*

Catatan 2.9. *(da Silva [2001]) Jika X_H adalah Hamiltonian, maka*

$$\mathcal{L}_{X_H} H = \iota_{X_H} dH = \iota_{X_H} \iota_{X_H} \omega = 0$$

Oleh karena itu, medan vektor Hamiltonian melestarikan fungsi Hamiltonian dan setiap kurva integral $\{\rho_t(x) | t \in \mathbb{R}\}$ di X_H harus berada dalam himpunan di H:

$$H(x) = (\rho_t^* H)(x) = H(\rho_t(x)), \quad \forall t.$$

Definisi 2.10. *(da Silva [2001]) Medan vektor X di M melestarikan ω (sedemikian rupa sehingga $\mathcal{L}_{x\omega} = 0$) dikenal sebagai **medan vektor simplektik**.*

$$\begin{cases} X \text{ adalah simplektik} & \Longleftrightarrow \iota_{X\omega} \text{ tertutup} \\ X \text{ adalah Hamiltonian} & \Longleftrightarrow \iota_{X\omega} \text{ eksak} \end{cases}$$

Secara lokal, setiap mengkontraksi himpunan terbuka berarti setiap medan vektor simplektiknya adalah hamiltonian. Jika $H^1_{deRham}(M) = 0$ maka secara global medan vektor simplektinya adalah hamiltonian. Sebuah medan vektor Hamiltonian adalah medan vektor X yang $\iota_{X\omega}$ adalah eksak yaitu, $\iota_{X\omega} = -dH$ dengan $H \in C^\infty(M)$, dengan kata lain H dengan $\iota_{X\omega}$ dinamakan fungsi hamiltonian pada X.

2.3.2 Mekanika Klasik

Tinjau ruang euklidian $\mathbb{R}^{2n}$ dengan koordinat $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ dan $\omega_0 = \sum dq_j \wedge dp_j$. Kurva $\rho_t = (q(t), p(t))$ adalah kurva integral untuk X_H yang eksak jika,

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt}(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad \text{persamaan Hamiltonian}$$

misalkan $X_H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$. Maka,

$$\begin{aligned} \iota_{X_H}\omega &= \sum_{j=1}^n \iota_{X_H}(dq_j \wedge dp_j) = \sum_{j=1}^n [(\iota_{X_H} dq_j) \wedge dp_j - dq_j \wedge (\iota_{X_H} dp_j)] \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j \right) = -dH \end{aligned}$$

Catatan 2.11. *Gradien medan vektor di H relatif terhadap metrik euklidian*

$$\nabla H := \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

Jika J adalah struktur standar kompleks sehingga $J\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial}{\partial p_i}$ dan $J\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right) = -\frac{\partial}{\partial q_i}$, dipunyai $JX_H = \nabla H$.

Kasus dimana n=3 yang mempunyai gambaran fisis sederhana. Hukum kedua Newton menyatakan bahwa partikel bermasa m bergerak dalam ruang konfigurasi $\mathbb{R}^3$ dengan koordinat - koordinatnya $q = (q_1, q_2, q_3)$ dalam pengaruh potensial $V(q)$ bergerak sepanjang kurva $q(t)$ sedemikian rupa sehingga

$$m\frac{d^2q}{dt^2} = -\nabla V(q)$$

Memperkenalkan momentum $p_i = m\frac{dq_i}{dt}$ untuk $i = 1, 2, 3$ dan fungsi energi $H(p, q) =$

$\frac{1}{2m}|p|^2 + V(q)$. Misalkan $\mathbb{R}^6 = T^*\mathbb{R}^3$ merupakan ruang fase dengan koordinat - koordinatnya $(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$. Hukum dua Newton dalam $\mathbb{R}^3$ sama dengan persamaan hamiltonian dalam $\mathbb{R}^6$:

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \frac{1}{m}p_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} = m\frac{d^2q_i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

2.3.3 Kurung Lie

Medan vektor adalah operator turunan pada fungsi: Jika X adalah sebuah medan vektor dan $f \in C^\infty(X)$, df sesuai dengan forma-1 maka,

$$X \cdot f := df(X) = \mathcal{L}_X f.$$

diberikan dua medan vektor X, Y dan ada medan vektor lainnya W, sedemikian rupa sehingga

$$\mathcal{L}_W f = \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y f) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X f).$$

W adalah **kurung Lie** dari medan vektor X dan Y dan dinotasikan dalam $W = [X, Y]$, karena $\mathcal{L}_W = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_X]$ adalah komutator.

Teorema 2.12. *(da Silva [2001]) Jika X dan Y adalah medan vektor simplektik pada manifold simplektik (M, ω), maka $[X, Y]$ merupakan hamiltonian dengan fungsi Hamiltonian $\omega(Y, X)$*
Bukti : Pada Lampiran di Apendix B.

Sebuah aljabar Lie (riil) adalah ruang vektor (riil) $\mathfrak{g}$ bersama dengan **kurung Lie** $[\cdot,\cdot]$, yaitu sebuah pemetaan bilinier $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$ yang memenuhi :

(a) $[x, y] = -[x, y], \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$, **(anti-simetri)**

(b) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$ **(identitas Jacobi)**

misalkan,

$$\chi(M) = \{\text{medan vektor pada M}\}$$
$$\chi^{smpl}(M) = \{\text{medan vektor simplektik pada M}\}$$
$$\chi^{ham}(M) = \{\text{medan vektor Hamiltonian pada M}\}.$$

BAB III

WAKILAN ORBIT SEBAGAI RUANG FASE DALAM MEKANIKA KLASIK

Isi dari bab III ini adalah penjabaran dari definisi grup Lie, aljabar Lie dan perhitungan-perhitungan yang membantu dalam penelitian. Awal bab ini menjelaskan definisi dari grup Lie hingga pada gambaran klasik dari sebuah grup simetri.

3.1 Grup Lie Matriks

3.1.1 Definisi grup Lie Matriks

Definisi 3.13. *(Hall [2004]) Grup linier umum di atas bilangan riil, dinyatakan sebagai GL(n,$\mathbb{R}$) yang merupakan grup matriks n $\times$ n mempunyai invers dengan elemenya bilangan riil. Grup linier umum di atas bilangan kompleks, dinyatakan sebagai GL(n,$\mathbb{C}$) yang merupakan grup matriks n $\times$ n mempunyai invers dengan elemennya bilangan kompleks.*

Grup linier umum adalah grup yang tunduk pada perkalian matriks. Perkalian dua matriks yang ber-invers juga ber-invers, identitas matriks adalah identitas untuk grup tersebut, invers dari matriks juga invers untuk grup tersebut dan perkalian matriks adalah asosiatif. Andaikan $M_n\mathbb{C}$ menyatakan ruang beranggota matriks n x n dengan elemennya bilangan kompleks.

Definisi 3.14. *(Hall [2004]) Andaikan A_m adalah barisan dari matriks kompleks dalam $M_n\mathbb{C}$. Bahwa A_m konvergen menuju matriks A jika setiap elemen dari A_m konvergen $(m \to \infty)$ menuju elemen dari A (yaitu, jika $(A_m)_{kl}$ konvergen menuju A_{kl} untuk setiap $1 \leq k, l \leq n$).*

Definisi 3.15. *(Hall [2004]) Sebuah grup Lie matriks adalah subgrup G dari GL(n,$\mathbb{C}$) dengan mengikuti sifat: jika A_m adalah barisan dari matriks di G dan A_m konvergen menuju matriks A, maka $A \in G$ atau A tidak berinvers.*

Syarat bagi G adalah mengatakan bahwa G merupakan subhimpunan tertutup di GL(n,$\mathbb{C}$). Maka, definisi 3.15 adalah ekuivalen untuk mengatakan bahwa grup Lie matriks adalah subgrup tertutup dari GL(n,$\mathbb{C}$).

3.2 Kekompakan

Definisi 3.16. *(Hall [2004]) Sebuah grup Lie matriks G dikatakan kompak jika mengikuti dua syarat yang memenuhi :*

1. *Jika A_m adalah barisan dalam matriks G dan A_m konvergen menuju matriks A, maka A ada di G.*

2. *Terdapat konstanta C sedemikian rupa sehingga $\forall A \in G$, $|A_{ij}| \leq C$, $\forall A \leq i, j \leq n$.*

Definisi di atas mengatakan bahwa G adalah kompak yaitu jika tertutup dan terbatas.

3.3 Terhubung

Definisi 3.17. *(Nakahara [2003])*

(a) *Sebuah ruang Topologi X terhubung jika ruang tersebut tidak dapat dituliskan sebagai $X = X_1 \cup X_2$, dengan X_1 dan X_2 keduanya terbuka dan $X_1 \cap X_2 = \emptyset$*

(b) *Sebuah ruang topologi X dikatakan terhubung jika untuk setiap titik $x, y \in X$ terdapat pemetaan kontinyu $f : [0,1] \rightarrow X$ sedemikian rupa sehingga $f(0) = x$ dan $f(1) = y$*

(c) *Sebuah Loop dalam ruang topologi X adalah sebuah pemetaan kontinyu $f : [0,1] \rightarrow X$ sedemikian rupa sehingga $f(0) = f(1)$. Jika setiap Loop di X menjadi susut secara kontinyu menuju titik, X dikatakan terhubung sederhana.*

3.3.1 Terhubung Sederhana

Menurut definisi 3.17 untuk poin c, di bawah ini akan dilihat bahwa grup SU(2) adalah terhubung sederhana

Proposisi 3.18. *(Hall [2004] Grup SU(2) adalah terhubung sederhana.*
Bukti: Pada Lampiran di Apendix B.

Untuk setiap lintasan terhubung dalam ruang topologis, dapat ditemukan sebuah obyek yang dinamakan sebagai grup dasar. Ruang topologis terhubung sederhana jika dan hanya jika grup dasarnya (*fundamental group*) adalah grup trivial.

3.4 Aljabar Lie dan Pemetaan Eksponensial

Eksponensial matriks memainkan peranan yang penting dalam teori grup Lie. Eksponensial masuk ke dalam definisi aljabar Lie grup Lie matriks dan merupakan mekanisme untuk mendapatkan informasi dari aljabar Lie dari sebuah grup Lie.

Proposisi 3.19. *(Hall [2004]) Andaikan X adalah matriks kompleks* $n \times n$*. Maka,* e^{tX} *adalah kurva licin di* $M_n(\mathbb{C})$ *dan*

$$\frac{d}{dt}e^{tX} = Xe^{tX} = e^{tX}X$$

lebih tepatnya,

$$\frac{d}{dt}e^{tX}|_{t=0} = X$$

Bukti: Pada Lampiran di Apendix B.

Definisi 3.20. *(Hall [2004]) Sebuah fungsi* $A : \mathbb{R} \to GL(n;\mathbb{C})$ *dinamakan subgrup berparameter tunggal dari* $GL(n;\mathbb{C})$*, jika*

(a) A adalah kontinyu

(b) A(0)=I

(c) A(t+s)=A(t)A(s), $\forall\, t, s \in \mathbb{R}$

3.4.1 Sifat-sifat Aljabar Lie

Sifat-sifat yang dimiliki oleh aljabar Lie akan sedikit dijelaskan di bawah ini. Sifat aljabar Lie inilah yang akan digunakan dalam penelitian.

Proposisi 3.21. *(Hall [2004]) Andaikan G adalah grup Lie matriks dan X adalah elemen dari aljabar Lie. Maka,* e^X *adalah sebuah elemen dari komponen identitas di G.*

Bukti: Pada Lampiran di Apendix B.

Proposisi 3.22. *(Hall [2004]) Andaikan G adalah grup Lie matriks dengan aljabar Lie* $\mathfrak{g}$*. Andaikan X sebuah elemen di* $\mathfrak{g}$ *dan A elemen di G. Maka,* AXA^{-1} *ada di* $\mathfrak{g}$*.*
Bukti: Pada Lampiran di Apendix B.

Definisi 3.23. *(Hall [2004]) Andaikan G adalah grup Lie matriks dengan aljabar Lie* $\mathfrak{g}$*. Maka, utnuk setiap* $A \in G$ *di definisikan pemetaan linier* $Ad_A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *oleh*

$$Ad_A(X) = AXA^{-1}$$

Definisi 3.24. *(Hall [2004]) Andaikan G adalah grup Lie matriks dengan aljabar Lie* $\mathfrak{g}$*, maka pemetaan eksponen untuk G adalah pemetaan*

$$exp : \mathfrak{g} \to G$$

3.5 Produk Langsung

Andaikan $(G_1, *)$ dan $(G_2, \cdot)$ masing-masing adalah sebuah grup. Himpunan $G \equiv G_1 \text{x} G_2 = \{(g_1, g_2); g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}$ disertai dengan operasi biner

$$(g_1, g_2) \circ (h_1, h_2) = (g_1 * h_1, g_2 \cdot h_2),$$

untuk setiap $(g_1, g_2), (h_1, h_2) \in G$, merupakan grup yang dinamakan produk langsung dari $(G_1, *)$ dan $(G_2, \cdot)$ [Rosyid, 2009]. Unsur identitas e dalam grup $(G, \cdot)$ diberikan oleh $e := (e_1, e_2)$, dengan e_1 dan e_2 berturut-turut merupakan unsur identitas dalam G_1 dan G_2. Invers bagi $(g_1, g_2) \in G$ adalah unsur identitas (g_1^{-1}, g_2^{-1}).

3.6 Penjumlahan Langsung Ruang-ruang Vektor

Misalkan V dan W dua buah ruang vektor di atas lapangan F. Hasilkali kartesis

$$V \text{x} W = \{(v, w); v \in V, w \in W\}$$

disertai penjumlahan

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2), \forall (v_1, w_1), (v_2, w_2) \in V \text{x} W \tag{3.1}$$

dan perkalian sekalar

$$\alpha(v,w) = (\alpha v, \alpha w), \quad \alpha \in F, (v,w) \in V\text{x}W \tag{3.2}$$

merupakan ruang vektor yang dikenal sebagai jumlahan langsung *direct sum* antara ruang V dan W dan ditulis sebagai $V \oplus W$ [Rosyid, 2009]. Apabila $\{v_1, \cdots, v_n\}$ dan $\{w_1, \cdots, w_m\}$ berturut-turut basis bagi V dan W, maka basis bagi $V \oplus W$ adalah $\{(v_1, 0), \cdots, (v_n, 0), (0, w_1), \cdots, (0, w_m)\}$ dan basis tersebut bebas linier. Selanjutnya, berdasarkan pers.3.1 dan pers.3.2, setiap $(v, w) \in V \oplus W$ dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}
(v,w) &= (\sum_{i=1}^{n} a_i v_1, \sum_{\alpha=1} b_\alpha w_\alpha) \\
&= (\sum_{i=1}^{n} a_i v_1, 0) + (0, \sum_{\alpha=1} b_\alpha w_\alpha) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i (v_1, 0) + \sum_{\alpha=1} b_\alpha (0, w_\alpha)
\end{aligned}$$

Oleh karenanya, diperoleh bahwa dim $(V \oplus W) = n + m$.

3.7 Kohomologi Aljabar Lie

3.7.1 Kohomologi

Andaikan C adalah ruang vektor dan $d : C \to C$ sebuah transformasi linier. Jika $d^2 = 0$ dapat dikatakan (C, d) adalah turunan kompleks. Dengan C adalah *cochain* dan d adalah turunan eksterior. Vektor dalam kernel Z = ker d dinamakan *coycycle* dan bayangan B = im d dinamakan *coboundaries*. Greub [1972] menyatakan bahwa turunan dalam B adalah *exact* atau *coboundaries*. Menurut Marsden [1998] Grup kohomologi dinyatakan oleh $H^k(M)$, yang didefinisikan oleh

$$H^k(M) := \frac{kerZ(d : C^k(M) \to C^{k+1}(M))}{imB(d : C^{k-1}(M) \to C^k(M))}$$

penting untuk diingat bahwa H bukan subruang dari Z, tetapi sebuah kuosien. Sehingga H adalah subkuosien dari C. Elemen - elemen dari H adalah kelas - kelas ekuivalen dari *coycycle*, dua *coycycle* ekuivalen jika keduanya saling asing adalah *exact*.

3.7.2 Kohomologi Aljabar Lie

Andaikan $\mathfrak{g}$ aljabar Lie berdimensi finit dan merupakan struktur aljabar dalam grup Lie. Setiap $\mathfrak{g}$-modulo M yang sekawan dengan kompleks *cochain* $C^k(\mathfrak{g}; M)$, kohomologi didefiniskan sebagai kohomologi aljabar Lie dari $\mathfrak{g}$ dengan nilainya di M. Kohomologi aljabar Lie didefinisikan

$$C^k(\mathfrak{g}; M) := Hom(\wedge^k \mathfrak{g}, M), k = 0, 1, \dots, dim\mathfrak{g},$$

Operator *coboundaries* $d : C^k(\mathfrak{g}; M) \to C^{k+1}(\mathfrak{g}; M)$ didefinisikan oleh

$$(d\sigma)(x_0, \dots, x_k) := \textstyle\sum_{i=0}^{k} (-1)^i x_i \cdot \sigma(\dots, \hat{x}_i, \dots)$$

$$+ \textstyle\sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} \sigma([x_i, x_j], \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_i, \dots). \tag{3.3}$$

Karena yang ingin diperoleh adalah kohomologi dengan nilai $\mathbb{R}$, maka M diganti dengan $\mathbb{R}$. Sehingga semua notasi M dinyatakan dalam $\mathbb{R}$, oleh karena itu kohomologi aljabar Lie yang tadinya bernilai M sekarang menjadi $C^k(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$. Menurut definisi, $C^0(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}$ dan $C^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}$

3.7.3 Menghitung Operator *Coboundaries* dengan Variasi Derajat *Cochain*

Pertama yang akan dihitung adalah derajat 0-*Cochain*. Sehingga operator *Coboundariesnya* adalah $d : C^0(\mathfrak{g}; \mathbb{R}) \to C^1(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ yang didefinisikan oleh pers.3.3. Perhitunganya adalah

$$\begin{aligned}(d\sigma)(x_0) &:= \sum_{i=0}^{k=0} (-1)^0 x_0 \cdot \sigma(\dots, \hat{x}_0, \dots) \\ &\quad + \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^0 \sigma([x_0], \dots, \hat{x}_0, \dots) \\ &= -x_0 \sigma(\hat{x}_0) + 0 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

kedua adalah menghitung derajat 1-*Cochain*. Sehingga operator *Coboundariesnya* adalah $d : C^1(\mathfrak{g}; \mathbb{R}) \to C^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ yang didefinisikan oleh pers.3.3. Perhitunganya adalah

$$
\begin{aligned}
(d\sigma)(x_0, x_1) &:= \sum_{i=0}^{k=1} (-1)^0 x_0 \cdot \sigma(\ldots, \hat{x}_0, \ldots) \\
&+ \sum_{i=1}^{k=1} (-1)^1 x_1 \cdot \sigma(\ldots, \hat{x}_1, \ldots) \\
&+ \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{0+1} \sigma([x_0, x_1], \ldots, \hat{x}_0, \ldots, \hat{x}_1, \ldots) \\
&= -x_0 \sigma(\hat{x}_0) - x_1 \sigma(\hat{x}_1) - \sigma([x_0, x_1])
\end{aligned}
$$

$$
= -\sigma([x_0, x_1]) \tag{3.5}
$$

ketiga adalah menghitung derajat 2-*Cochain*. Sehingga operator *Coboundariesnya* adalah $d : C^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R}) \to C^3(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ yang didefinisikan oleh pers.3.3. Perhitunganya adalah

$$
\begin{aligned}
(d\sigma)(x_0, x_1, x_2) &:= \sum_{i=0}^{k=2} (-1)^0 x_0 \cdot \sigma(\ldots, \hat{x}_0, \ldots) \\
&+ \sum_{i=1}^{k=1} (-1)^1 x_1 \cdot \sigma(\ldots, \hat{x}_1, \ldots) \\
&+ \sum_{i=2}^{k=2} (-1)^2 x_2 \cdot \sigma(\ldots, \hat{x}_2, \ldots) \\
&+ \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{0+1} \sigma([x_0, x_1], \ldots, \hat{x}_0, \ldots, \hat{x}_1, \ldots) \\
&+ \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{1+2} \sigma([x_1, x_2], \ldots, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_2, \ldots) \\
&+ \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{0+2} \sigma([x_0, x_2], \ldots, \hat{x}_0, \ldots, \hat{x}_2, \ldots) \\
&= -x_0 \sigma(\hat{x}_0) - x_1 \sigma(\hat{x}_1) + x_2 \sigma(\hat{x}_2) - \sigma([x_0, x_1], x_2) - \sigma([x_1, x_2], x_0) \\
&+ \sigma([x_0, x_2], x_1)
\end{aligned}
$$

$$
= -\sigma([x_0, x_1], x_2) - \sigma([x_1, x_2], x_0) + \sigma([x_0, x_2], x_1) \tag{3.6}
$$

3.8 Orbit Koajoin

Dalam mekanika klasik, yang bertindak sebagai ruang keadaan adalah ruang fase klasik M, yakni suatu ruang yang secara lokal (yakni bahwa sistem koordinat ini hanya terdifinisi pada wilayah tertentu saja pada ruang itu) memiliki sistem koordinat kanonis $(q, p) := (q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)$, dengan $q^1, \cdots, q^n$ dinamakan koordinat umum dan $p_1, \cdots, p_n$ dinamakan momentum umum [Rosyid, 2006] . Jadi, ruang fase klasik adalah ruang yang berdimensi genap $2n$, dengan n bilangan asli.

Sekedar untuk mendapatkan perspektif kekinian tentang ruang fase klasik, perlu kiranya disajikan definisi yang lebih umum tentang ruang fase klasik. Definisi tersebut menyatakan bahwa ruang fase klasik adalah *manifold simplektik*, yaitu manifold (manifold menurut definisi Rosyid [2009] merupakan ruang topologis yang secara lokal homeomorfis (mirip) dengan $\mathbb{R}^m$) berdimensi genap yang padanya dapat ditemukan suatu obyek matematis yang dikenal *struktur simplektik*.

Manifold simplektik adalah manifold Poisson dengan kurung Poisson yang didefinisikan di manifold simplektik. Kurung Poisson muncul dari kurung kanonis pada untingan singgung jodoh (ruang fase) T^*G yang disekawankan dengan grup Lie G. Dalam banyak masalah mekanis ruang fase adalah untingan singgung jodoh T^*G dari ruang konfigurasi G. Ada sebuah struktur simplektik pada T^*G yang dapat dilukiskan dalam banyak cara yang ekuivalen.

3.8.1 Manifold Poisson

Aljabar Lie jodoh $\mathfrak{g}^*$ dari aljabar Lie $\mathfrak{g}$ membawa sebuah kurung Poisson yang diberikan oleh $\{F, G\}_{(\mu)} = \left\langle \mu, \left[\frac{\delta F}{\delta \mu}, \frac{\delta G}{\delta \mu}\right]\right\rangle$ untuk setiap $\mu \in \mathfrak{g}^*$. Kurung Poisson memerankan peran yang penting dalam gambaran Hamiltonian dari banyak sistem fisis. Kurung Poisson mempunyai beberapa sifat penting antara lain antisimetry, memenuhi identitas Jacobi dan aturan Leibniz.

Menurut Goldstein [1980] ada beberapa sifat aljabar dari kurung Poisson yang dapat dilihat di bawah ini :

1. $\{F, G\} = -\{G, F\}$, antisimetris.
2. $\{\{F, G\}, H\} + \{\{H, F\}, G\} + \{\{G, H\}, F\} = 0$, identitas Jacobi.
3. $\{FG, H\} = F\{G, H\} + \{F, H\}G$. aturan Liebniz.

Sebuah manifold yang dibekali oleh struktur kurung Poisson seperti di atas adalah apa yang disebut dengan manifold Poisson.

Definisi 3.25. *(Peter [2007]) Andaikan G sebuah grup Lie,* (M, ω) *manifold simplektik dan* $\sigma : G \times M \to M$ *sebuah aksi licin. Maka* σ *dinamakan sebuah aksi simplektik jika untuk setiap* $g \in G$*, difeomorfisme* $\sigma(g)$ *adalah simplektokmorfisme. Dinamakan juga* ***strongly symplectic*** *atau* ***almost Hamiltonian****. Jika* $X \in \mathfrak{g}$ *maka forma* $i_{L\sigma(X)}\omega$ *eksak. Artinya* $\forall\ X \in \mathfrak{g}$*, dipunyai* $L_\sigma(X) \in Ham(M, \omega)$*, dinamakan sebagai Hamiltonian jika terdapat sebuah homomorfisme* μ *dari aljabar Lie* $\mathfrak{g}$ *dan* $C^\infty(M, \mathbb{R})$ *sedemikian rupa sehingga* $\chi_\mu(X) = L_\sigma(X)\ \forall\ X \in \mathfrak{g}$*. Sebuah manifold licin bersama dengan aksi transitif Hamiltonian dinamakan* ***Hamiltonian G-space****.*

Aksi σ di atas adalah sebuah aksi G pada M dan $p \in M$, maka orbit p didefinisikan oleh $Orb(p) := \{\sigma_g(p) | g \in G\} \subset$ M. Pada dimensi yang berhingga dapat dilihat Orb(p) adalah sebuah pembenaman submanifold dari M, untuk setiap $p \in M$ grup isotropi (stabiliser atau simetri) dari σ di titik p diberikan oleh $G_p := \{\sigma_g(p) = p | g \in G\} \subset$ G. Stuktur manifold dari Orb(p) didefinisikan dengan syarat pemetaan bijektif $[g] \in G/G_p \to g \cdot p \in Orb(p)$.

Sebuah aksi σ dari G ke manifold M mendefinisikan sebuah relasi ekuivalen pada M oleh relasi milik orbit yang sama, secara eksplisit untuk $p, p' \in M$, dituliskan relasi ekuivalen $p \sim p'$ jika terdapat $g \in G$ sedemikian rupa sehingga $g \cdot p = p'$. Andaikan M/G adalah kumpulan dari kelas-kelas ekuivalen, maka kumpulan tadi disebut orbit kadang juga disebut ruang orbit. Andaikan

$$\begin{aligned} \pi \quad &: M \to M/G \\ &: p \to Orb(p) \end{aligned}$$

dan M/G adalah topologi kuosien oleh himpunan terbuka $U \subset M/G$ jika dan hanya jika $\pi^{-1}(U)$ terbuka di M. Untuk menjamin bahwa ruang orbit M/G mempunyai struktur manifold licin.

Orbit koajoin dari grup Lie adalah manifold simplektik dengan struktur simplektiknya diwarisi dari kurung Poisson. Orbit koajoin adalah submanifold yang terbenam di aljabar Lie jodoh $\mathfrak{g}^*$. Terdapat sebuah teorema yang mendukung keberadaan struktur simplektik pada orbit koajoin.

Teorema 3.26. *(Marsden [1998])*

Andaikan G adalah sebuah grup Lie dan $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ adalah sebuah orbit koajoin. Maka

$$\omega^{\pm}(\mu)(\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu), \eta_{\mathfrak{g}^*}(\mu)) = \pm \langle \mu, [\xi, \eta] \rangle$$

untuk seluruh $\mu \in \mathcal{O}$ dan $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ mendefinisikan forma simplektik pada $\mathcal{O}$. Lebih nyaman jika menyebut $\omega^{\pm}$ sebagai struktur simplektik orbit koajoin.
Bukti: Pada Lampiran di Apendix B.

Karena orbit koajoin adalah simplektik, maka terdapat beberapa konsekuensi yang dipatuhi, yaitu:

Akibat 3.27. *Orbit koajoin dari grup Lie berdimensi berhingga adalah berdimensi genap.*

Akibat 3.28. *Andaikan $G_\nu = \left\{Ad_g^* \nu = \nu | g \in G\right\}$ adalah subgrup isotropi dari aksi koajoin dengan $\nu \in \mathfrak{g}^*$. Maka G_ν adalah subgrup tertutup dari G dan kuosien G/G_ν adalah manifold licin dengan proyeksi licin $\pi : G \to G/G_\nu$; $g \to g \cdot G_n u$. Mengidentifikasi $G/G_\nu \cong Orb(\nu)$ melalui difeomorfisme $\rho : g \cdot G_\nu \in G/G_\nu \to Ad_g^*(\nu) \in Orb(\nu)$. Maka, G/G_ν adalah simplektik dengan forma simplektik ω dinduksi dari $d\nu$.*

Teorema **Kostant-Souriau** : Jika $H^1(g) = H^2(g) = 0$, *maka terlepas adanya selubung (covering) terdapat hubungan satu - satu antara manifold simplektik yang homogen untuk G dan G-orbit dalam g** [Aebische, 1992].

Pembuktian 1. *(Aebische [1992]) Karena ada $H^2(g) = 0$, untuk setiap $\omega \in Z^2(g)$ terdapat $\beta \in \mathfrak{g}^*$ dengan $d\beta = \omega$. Lebih lanjut, $H^1(g) = 0$ ekuivalen dengan $Z^1(g) = B^1(g) = \delta(\bigwedge^0(\mathfrak{g}^*)) = 0$. Maka jika $\beta_1, \beta_2 \in \mathfrak{g}^*$ sedemikian rupa sehingga $d\beta_1 = d\beta_2$. Karena hubungan yang tunggal antara $\omega \in Z^2(g)$ dan $\beta \in \mathfrak{g}^*$, sedemikian rupa sehingga $\omega = d\beta$.*

Terdapat korespondensi satu-satu antara orbit-G di $Z^2(g)$ dan orbit-G di $\mathfrak{g}^*$, maka terdapat

$$orbg(\omega) := \{Ad_a^* \omega; a \in G\} \, dan$$
$$orbg(\beta) := \{Ad_a^* \beta; a \in G\}$$

Dengan hubungan yang tunggal atau unik antara $\omega \in Z^2(g)$ dan $\beta \in \mathfrak{g}^*$, sedemikian rupa sehingga $\omega = d\beta$, maka H_ω adalah komponen penghubung dari grup isotropi $G_\beta := \{Ad_a^* \beta = \beta; a \in G\}$.

3.8.2 Ruang Fase Klasik dari Grup Lie

Mendapatkan ruang fase klasik dari sebuah grup Lie simetri dapat menggunakan teorema 3.26. Teorema tersebut memberikan informasi bahwa terdapat hubungan satu-satu antara manifold simplektik untuk G dan orbit-G di $\mathfrak{g}^*$. Dengan mengasumsikan derajat kohomologi derajat satu dan duanya lenyap, maka terdapat hubungan ketunggalan antara $d\beta = \omega$, $\forall\, \omega \in Z^2(\mathfrak{g})$ dan $\beta \in \mathfrak{g}^*$. Dengan informasi yang diberikan oleh teorema 3.26 tersebut, maka kita dapat mendapatkan ruang fase klasik dari grup Lie simetri.

Berdasarkan definisi 3.25 dan dengan bantuan teorema 3.26, dapat dicari orbit koajoin dari sebuah grup Lie. Andaikan G adalah grup Lie, maka terdapat struktur aljabar Lie dalam grup tersebut yaitu $\mathfrak{g}$. Di bawah ini akan disajikan alur penyelesaian untuk mendapatkan ruang fase klasik dari orbit koajoin.
Alur perhitungannya sebagai berikut :
1) Andaikan $(G_1, *)$ dan $(G_1, \cdot)$ masing-masing sebuah grup.
Himpunan $G \equiv G_1 \otimes G_2 = \{(g_1, g_2)|g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}$, maka produk langsung dari dua buah grup itu adalah

$$(g_1, g_2) \circ (h_1, h_2) = (g_1 * h_1, g_2 \cdot h_2)$$

untuk setiap $(g_1, g_2), (h_1, h_2) \in G$.
2) Andaikan $\mathfrak{g}_1$ dan $\mathfrak{g}_2$ merupakan aljabar Lie bagi grup Lie.
Terdapat penjumlahan langsung antara kedua aljabar Lie tersebut. Andaikan $(v, w) \in \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, maka dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}(v, w) &= (\sum_{i=1}^{n} a_i v_1, \sum_{\alpha=1} b_\alpha w_\alpha) \\ &= (\sum_{i=1}^{n} a_i v_1, 0) + (0, \sum_{\alpha=1} b_\alpha w_\alpha) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i (v_1, 0) + \sum_{\alpha=1} b_\alpha (0, w_\alpha)\end{aligned}$$

maka diperoleh dim $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 = n + m.$
3) Mencari anggota aljabar Lie $(\mathfrak{g})^*$ jodoh dari aljabar Lie $\mathfrak{g}$.

Mendapatkan aljabar Lie $(\mathfrak{g})^*$ dengan melakukan pemetaan $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dari $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ ke $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle &: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R} \\ &: (A, B) \to \langle A, B \rangle = \frac{1}{2} Re \left\{ Tr(A\overline{B}) \right\} \end{aligned}$$

dengan cara yang sama di atas, dapat dilakukan sebuah pemetaan dari $\mathfrak{g}$ ke $\mathfrak{g}^*$, yaitu

$$\begin{aligned} \langle \cdot \rangle &: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^* \\ &: \eta \to \langle \eta \rangle = \xi G^{\mu\nu} \end{aligned}$$

jadi $\xi = G_{\mu\nu}\eta$, $\forall\ \xi \in \mathfrak{g}^*$ dan $\eta \in \mathfrak{g}$. Dengan $G_{\mu\nu} = \langle e_\mu e_\nu \rangle = \frac{1}{2} Re \left\{ Tr(e_\mu \overline{e}_\nu) \right\}$.

4) Mencari orbit koajoin dan stabiliser.

Setelah mendapatkan $(\mathfrak{g})^*$, kemudian kita mencari orbit koajoin dan stabiliser dari sebuah aksi Grup Lie ke ruang vektor jodoh. Aksi itu didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} Ad^* &: G \to GL(\mathfrak{g}^*) \\ &: g \to Ad_g^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ad_g^* &: \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^* \\ &: \xi \to Ad_g^* \xi \end{aligned}$$

dengan $Ad_g^* \xi = g \xi g^{-1}$, $\forall\ g \in G \wedge \xi \in \mathfrak{g}^*$. Dengan definisi grup isotropi $G_\xi := \left\{ Ad_g^* \xi = \xi; g \in G \right\}$. Karena aksi itu bersifat transitif jika dan hanya jika orbit yang diimbas olehnya tidak lain adalah himpunan ξ itu sendiri. Jadi, $Orb(\xi)$ yang melalui $\xi \in \mathfrak{g}^*$ didefinisikan oleh $Orb(\xi) := \left\{ Ad_g^* \xi | g \in G \right\}$.

5) Mendapatkan struktur simplektik.

Dengan jalan melakukan pemetaan proyeksi dari G ke G/G_ξ, yaitu

$$\begin{aligned} \rho &: G \to G/G_\xi \\ &: (A^X, A^Y) \to \rho(A^X, A^Y) = (X, Y), \ \ \forall A^X, A^Y \in \mathfrak{g} \end{aligned}$$

Proyeksi $\rho_* A^X = X$ dan $\rho_* A^Y = Y$, dengan melihat sifat ketunggalan dari $\omega = d\xi$ maka struktur simplektiknya adalah

$$\omega(X, Y) = d\xi([A^X, A^Y])$$

BAB IV

RUANG FASE KLASIK YANG DI EKSTRAK DARI GRUP $SU(2) \otimes U(1)$

Dalam bab ini akan di jelaskan terlebih dahulu tentang peranan grup $SU(2) \otimes U(1)$ dalam Fisika. Grup $SU(2) \otimes U(1)$ akan di ekstrak gambaran klasiknya melalui perhitungan analitik dalam bab ini.

4.1 Tentang Grup $SU(2) \otimes U(1)$

Model standar merupakan teori yang mampu menjelaskan interaksi elektromagnetik, lemah, dan kuat melalui paket lagrangan tunggal. Dalam model ini terdapat 12 buah fermion, 12 boson tera, dan partikel Higgs. Fermionya meliputi quark dan lepton yang merupakan partikel berspin $\frac{1}{2}$ yang mengikuti statistik Fermi-Dirac. Boson teranya adalah pembawa gaya atau mediator pada tiap inti interaksi. Dalam interaksi elektrolemah terdapat 4 buah boson yaitu foton, W^{+}, W^{-}, dan Z^{0}, sedangkan 8 buah gluon berperan pada interaksi kuat. Partikel Higgs adalah partikel yang bertanggung jawab dalam *spontaneous symmetry breaking* (perusakan simetri secara spontan), yaitu suatu cara utuk memberikan masa pada boson W^{+}, W^{-}, dan Z^{0} pada model ini.

Model standar memenuhi simetri tera $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Lagrangan pada model standar terdiri atas lagrangan Dirac untuk partikel berspin $\frac{1}{2}$ dan lagrangan Higgs untuk partikel skalar Higgs. Lagrangan Dirac yang memenuhi simetri tera SU(3) menjelaskan interaksi kuat di antara quark yang wakilanya berupa 3 buah muatan *color* (warna) yaitu *red* (R), *green* (G), dan *blue* (B) sebagai swa-vektor dan 8 buah matriks 3 x 3 sebagai generator yang dikenal sebagai matriks Gell-Mann. Lagrangan yang memenuhi simetri tera $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ menjelaskan paduan antara interaksi lemah dan elektromagnetik yang dikenal sebagai teori GWS karena dirumuskan pertama kali oleh Glashow, Weinberg, dan Salam. Model GWS ini selanjutnya dikenal sebagai model standar untuk interaksi elektrolemah [Halzen, 1984].

Model GWS yang simetri terhadap transformasi tera $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ melibatkan medan fermion kidal *(left handed)* sebagai wakilan dublet dari grup SU(2) dan fermion tak kidal *(lef handed)* tanpa neutrino sebagai wakilan singlet dari grup SU(2). Pada medan fermion tak kidal, neutrino dianggap tidak terlibat dalam interaksi lemah. Hal ini terkait dengan fakta yang menunjukan bahwa hanya neutrino kidal saja yang terlibat pada interaksi lemah dan telah dibuktikan melalui eksperimen oleh Lee dan Yang menggunakan ^{60}Co [Halzen, 1984].

4.1.1 Simetri $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ pada Lagrangan Dirac

Model standar untuk interkasi elektrolemah memenuhi simetri tera $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ dan memperlakukan medan fermion kidal *(left handed)* sebagai wakilan dublet dari grup SU(2) dan fermion tak kidal *(lef handed)* tanpa neutrino sebagai wakilan singlet dari grup SU(2).

Medan fermion untuk sektor lepton dituliskan sebagai

$$\chi_L = \begin{pmatrix} \nu_l \\ l^- \end{pmatrix}_L, \psi_R = l_R^- \qquad \begin{matrix} T = \frac{1}{2}, Y = -1 \\ T = 0, Y = -2 \end{matrix}$$

dengan l=e,μ,τ.
Untuk sektor quark dituliskan sebagai

$$\chi_L = \begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_L, \psi_R = U_R \text{atau} D_R$$

dengan *U=u,c,t* dan *D=d,s,b*. Medan fermion terhadap grup teranya mengalami transformasi sebagai berikut

$$\begin{aligned} \chi_L \to \chi_L' &= e^{i\alpha(x)T + i\beta(x)Y}\chi_L \\ \psi_R \to \psi_R' &= e^{i\beta(x)Y}\psi_R \end{aligned}$$

Oleh karena itu, lagrangan yang invarian terhadap transformasi tera $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ untuk partikel model standar adalah

$$\mathcal{L}_D = \overline{\chi}_L \left(i\partial_\mu - gT \cdot W_\mu - g'\frac{Y}{2}B_\mu \right) \chi_L$$

$$+\overline{\psi}_R \left(i\partial_\mu - g'\frac{Y}{2}B_\mu \right) \psi_R$$

$$-\frac{1}{4}W_{\mu\nu}\cdot W^{\mu\nu}-\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$$

dengan operator T dan Y sebagai generator dari masing - masing grup tera SU(2) dan U(1). Dua suku terakhir adalah suku kinetik medan B_μ dan W_μ yang dinyatakan sebagai

$$W_{\mu\nu}=\partial_\mu W_\nu-\partial_\nu W_\mu-gW_\mu\times W_\nu$$

$$B_{\mu\nu}=\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu$$

4.1.2 Simetri $SU(2)_L\otimes U(1)_Y$ pada Lagrangan Medan Higgs

Lagrangan untuk medan skalar ϕ yang invarian terhadap transformasi tera $SU(2)_L\otimes U(1)_Y$ adalah

$$\mathcal{L}_H=\left|\left(i\partial_\mu-gT\cdot W_\mu-g'\frac{Y}{2}B_\mu\right)\phi\right|^2-V(\phi)$$

Suku terakhir pada persamaan di atas merupakan suku potensial yang dikenal sebagai potensial Higgs.

$$V(\phi)=\mu^2\phi^\dagger\phi+\lambda(\phi^\dagger\phi)^2$$

Medan Higgs dalam model standar adalah dublet dari $SU(2)_L$ yang dituliskan sebagai

$$\phi=\begin{pmatrix}\phi^+\\ \phi^0\end{pmatrix}$$

Indeks positif (+) dan negatif (-) menyatakan muatan listrik untuk medan Higgs.

4.2 Ruang Fase Klasik dari Grup $SU(2)\otimes U(1)$

Maka dengan bantuan teorema 3.26, dapat dicari ruang fase klasik dari grup $SU(2)\otimes U(1)$. Perhitunganya adalah sebagai berikut ini

Definisi 4.29.

$$\begin{aligned} SU(2) &:= \big\{A \in GL(2,\mathbb{C}) | A^{\dagger}A = AA^{\dagger} = I \wedge detA = 1\big\} \\ su(2) &:= \big\{A \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C}) | A^{\dagger} = -A \wedge trA = 0\big\} \\ U(1) &:= \big\{A \in GL(1,\mathbb{C}) | A^{\dagger}A = AA^{\dagger} = I\big\} \\ u(1) &:= \big\{A \in \mathfrak{gl}(1,\mathbb{C}) | A^{\dagger} = -A\big\} \end{aligned}$$

Menurut definisi di atas dapat dibentuk sebuah wakilan matriks bagi grup - grup tersebut, yaitu :

$$SU(2) := \left\{ \begin{pmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{pmatrix} | A, B \in \mathbb{C} \wedge |A|^2 + |B|^2 = 1 \right\}$$

dengan wakilan matriks bagi aljabar Lie su(2) sebagai berikut :

$$su(2) := \left\{ \begin{pmatrix} i\alpha & \beta + i\gamma \\ -\beta + i\gamma & -i\alpha \end{pmatrix} | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

Wakilan matriks bagi grup U(1), yaitu

$$U(1) := \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} | \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

dengan wakilan matriks bagi aljabar Lie u(1) sebagai berikut :

$$u(1) := \left\{ \begin{pmatrix} i\lambda & 0 \\ 0 & i\lambda \end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

4.2.1 Produk Langsung antara $SU(2) \otimes U(1)$

Menurut definisi 3.5 yang merupakan produk langsung antara dua buah grup di atas, maka terdapat perkalian langsung antara grup SU(2) dan U(1). Grup $(SU(2), \bullet)$ yang disertai operasi biner $\bullet$ dan $(U(1), \circ)$ yang disertai operasi biner $\circ$.

$$G = (SU(2), \bullet), (U(1), \circ), maka$$

$$G = \begin{pmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Ae^{i\theta} & -\overline{B}e^{i\theta} \\ Be^{i\theta} & \overline{A}e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

$$= e^{i\theta} \begin{pmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{pmatrix}$$

4.2.2 Penjumlahan Langsung antara $su(2) \oplus u(1)$

Menurut definisi 3.6 yang merupakan jumlahan langsung ruang - ruang vektor, maka terdapat jumlahan langsung antara $su(2) \oplus u(1)$. Oleh karena itu basis dari masing - masing aljabar Lie tersebut diekspansikan, yaitu

$$su(2) \oplus u(1) = Span \left\{ \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\}$$

jadi jumlahan langsung antara dua buah aljabar Lie itu adalah

$$su(2) \oplus u(1) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\}$$

dengan vektor $su(2) + u(1) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \lambda \end{pmatrix}$

menghasilkan,

$$\eta \ni su(2) \oplus u(1) = \begin{pmatrix} i\alpha + i\lambda & \beta + i\gamma \\ -\beta + i\gamma & -i\alpha + i\lambda \end{pmatrix}$$

dengan dimensi $su(2) \oplus u(1) = 3 + 1 = 4$.

4.2.3 Mencari anggota aljabar Lie $(su(2) \oplus u(1))^*$

Mendapatkan wakilan matriks anggota $(su(2) \oplus u(1))^*$ dapat melalui sebuah pemetaan $\langle \cdot, \cdot \rangle$ yang merupakan perkalian skalar di $su(2) \oplus u(1)$.

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle &: su(2) \oplus u(1) \times su(2) \oplus u(1) \to \mathbb{R} \\ &: (A, B) \to \langle A, B \rangle = \frac{1}{2} Re \left\{ Tr(A\overline{B}) \right\} \end{aligned}$$

dengan cara yang sama di atas, dapat dilakukan sebuah pemetaan dari $(su(2) \oplus u(1))$ ke $(su(2) \oplus u(1))^*$, yaitu

$$\begin{aligned} \langle \cdot \rangle &: (su(2) \oplus u(1)) \to (su(2) \oplus u(1))^* \\ &: \eta \to \langle \eta \rangle = \xi G^{\mu\nu} \end{aligned}$$

jadi $\xi = G_{\mu\nu}\eta$, $\forall\ \xi \in (su(2) \oplus u(1))^*$ dan $\eta \in (su(2) \oplus u(1))$. Dengan $G_{\mu\nu} = \langle e_\mu e_\nu \rangle = \frac{1}{2} Re \{Tr(e_\mu \overline{e}_\nu)\}$. Basis akibat penjumlahan langsung $su(2) \oplus u(1)$ adalah

$$= Span \left\{ \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\},$$

basis ini kita ambil konjugat transposnya menjadi

$$\overline{su(2)} \oplus \overline{u(1)} = Span \left\{ \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right\}$$

Mencari $G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} Re \{Tr(e_\mu \overline{e}_\nu)\}$.

$$G_{11} = \frac{1}{2} Re \{Tr(e_1 \overline{e}_1)\} = \frac{1}{2} Re \left\{ Tr \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \tfrac{1}{2} Re \left\{ Tr \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = 1$$

$$G_{12} = \frac{1}{2}Re\left\{Tr(e_1\overline{e}_2)\right\} = \frac{1}{2}Re\left\{Tr\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}Re\left\{Tr\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\right\} = 0$$

$$G_{13} = \frac{1}{2}Re\left\{Tr(e_1\overline{e}_3)\right\} = \frac{1}{2}Re\left\{Tr\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}Re\left\{Tr\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = 0$$

$$G_{14} = \frac{1}{2}Re\left\{Tr(e_1\overline{e}_4)\right\} = \frac{1}{2}Re\left\{Tr\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}Re\left\{Tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\} = 0$$

$$G_{21} = \frac{1}{2}Re\left\{Tr(e_2\overline{e}_1)\right\} = \frac{1}{2}Re\left\{Tr\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}Re\left\{Tr\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right\} = 0$$

$$G_{22} = \frac{1}{2}Re\left\{Tr(e_2\overline{e}_2)\right\} = \frac{1}{2}Re\left\{Tr\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2} Re \left\{ Tr \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = 1$$

$$G_{23} = \frac{1}{2} Re \left\{ Tr(e_2 \overline{e}_3) \right\} = \frac{1}{2} Re \left\{ Tr \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \tfrac{1}{2} Re \left\{ Tr \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\} = 0$$

$$G_{24} = \frac{1}{2} Re \left\{ Tr(e_2 \overline{e}_4) \right\} = \frac{1}{2} Re \left\{ Tr \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \tfrac{1}{2} Re \left\{ Tr \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\} = 0$$

$$G_{31} = \frac{1}{2} Re \left\{ Tr(e_3 \overline{e}_1) \right\} = \frac{1}{2} Re \left\{ Tr \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \tfrac{1}{2} Re \left\{ Tr \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = 0$$

$$G_{32} = \frac{1}{2} Re \left\{ Tr(e_3 \overline{e}_2) \right\} = \frac{1}{2} Re \left\{ Tr \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \tfrac{1}{2} Re \left\{ Tr \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right\} = 0$$

$$G_{33} = \frac{1}{2}Re\left\{Tr(e_3\overline{e}_3)\right\} = \frac{1}{2}Re\left\{Tr\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix}\right\}$$

$$= \quad \tfrac{1}{2}Re\left\{Tr\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\} = 1$$

$$G_{34} = \frac{1}{2}Re\left\{Tr(e_3\overline{e}_4)\right\} = \frac{1}{2}Re\left\{Tr\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}\right\}$$

$$= \quad \tfrac{1}{2}Re\left\{Tr\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\} = 0$$

$$G_{41} = \frac{1}{2}Re\left\{Tr(e_4\overline{e}_1)\right\} = \frac{1}{2}Re\left\{Tr\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}\right\}$$

$$= \quad \tfrac{1}{2}Re\left\{Tr\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\} = 0$$

$$G_{42} = \frac{1}{2}Re\left\{Tr(e_4\overline{e}_2)\right\} = \frac{1}{2}Re\left\{Tr\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

$$= \quad \tfrac{1}{2}Re\left\{Tr\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\right\} = 0$$

$$G_{43} = \frac{1}{2}Re\left\{Tr(e_4\overline{e}_3)\right\} = \frac{1}{2}Re\left\{Tr\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}Re\left\{Tr\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\} = 0$$

$$G_{44} = \frac{1}{2}Re\left\{Tr(e_4\overline{e}_4)\right\} = \frac{1}{2}Re\left\{Tr\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}Re\left\{Tr\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\} = 1$$

jadi $G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}Re\left\{Tr(e_\mu e_{\overline{\nu}})\right\} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

sehingga

$$\xi = G_{\mu\nu}\eta = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \lambda\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \lambda\end{pmatrix}$$

ternyata wakilan anggota $(su(2) \oplus u(1))^*$ sama dengan $(su(2) \oplus u(1))$.

4.2.4 Mencari Grup Isotropi (Stabiliser)

Setelah mendapatkan $\xi \in (su(2) \oplus u(1))^*$, kemudian kita mencari orbit koajoin dan stabiliser dari sebuah aksi Grup Lie ke ruang vektor jodoh. Aksi itu didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
Ad^* &: (SU(2) \otimes U(1)) \rightarrow GL((su(2) \oplus u(1))^*) \\
&: g \rightarrow Ad_g^* \\
Ad_g^* &: (su(2) \oplus u(1))^* \rightarrow (su(2) \oplus u(1))^* \\
&: \xi \rightarrow Ad_g^* \xi
\end{aligned}$$

dengan $Ad_g^* \xi = g\xi g^{-1}, \forall\, g \in (SU(2) \otimes U(1)) \wedge \xi \in (su(2) \oplus u(1)^*$.

Dengan definisi aksi seperti di atas, kemudian dapat dicari grup isotropi atau stabiliser yang didefinisikan di bawah ini.

Definisi 4.30. *Grup Isotropi*

$$G_\xi := \left\{ Ad_g^* \xi = \xi; g \in G \right\} > SU(2) \otimes U(1).$$

Grup isotropi di atas dapat dihitung dengan cara, sebagai berikut

$$\begin{aligned}
Ad_g^* \xi &= \xi \\
g\xi g^{-1} &= \xi \\
g\xi &= \xi g
\end{aligned}$$

$$e^{i\theta} \begin{pmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\alpha + i\lambda & \beta + i\gamma \\ -\beta + i\gamma & -i\alpha + i\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\alpha + i\lambda & \beta + i\gamma \\ -\beta + i\gamma & -i\alpha + i\lambda \end{pmatrix} e^{i\theta} \begin{pmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A(i\alpha + i\lambda) - \overline{B}(-\beta + i\gamma) & A(\beta + i\gamma) - \overline{B}(-i\alpha + i\lambda) \\ B(i\alpha + i\lambda) + \overline{A}(-\beta + i\gamma) & B(\beta + i\gamma) + \overline{A}(-i\alpha + i\lambda) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} A(i\alpha + i\lambda) + B(\beta + i\gamma) & -\overline{B}(i\alpha + i\lambda) + \overline{A}(\beta + i\gamma) \\ A(-\beta + i\gamma) + B(-i\alpha + i\lambda) & -\overline{B}(-\beta + i\gamma) + \overline{A}(-i\alpha + i\lambda) \end{pmatrix}$$

dengan melakukan penyamaan dua buah matriks kiri dan kanan, diperoleh

$$A(i\alpha + i\lambda) - \overline{B}(-\beta + i\gamma) = A(i\alpha + i\lambda) + B(\beta + i\gamma)$$

$$- \overline{B}(-\beta + i\gamma) = B(\beta + i\gamma) \tag{4.1}$$

$$A(\beta + i\gamma) - \overline{B}(-i\alpha + i\lambda) = -\overline{B}(i\alpha + i\lambda) + \overline{A}(\beta + i\gamma)$$

$$\overline{A}(\beta + i\gamma) = A(\beta + i\gamma) - \overline{B}(-i\alpha + i\lambda) + \overline{B}(i\alpha + i\lambda) \tag{4.2}$$

$$B(i\alpha + i\lambda) + \overline{A}(-\beta + i\gamma) = A(-\beta + i\gamma) + B(-i\alpha + i\lambda)$$

$$\overline{A}(-\beta + i\gamma) = A(-\beta + i\gamma) + B(-i\alpha + i\lambda) - B(i\alpha + i\lambda) \tag{4.3}$$

$$B(\beta + i\gamma) + \overline{A}(-i\alpha + i\lambda) = -\overline{B}(-\beta + i\gamma) + \overline{A}(-i\alpha + i\lambda)$$

$$-\overline{B}(-\beta + i\gamma) = B(\beta + i\gamma) \tag{4.4}$$

ternyata dari empat buah persamaan yang didapat, terdapat dua buah persamaan linier antara (pers.4.1,pers.4.4) dan (pers.4.2,pers.4.3).

Karena A dan B merupakan bilangan kompleks, dicari wakilan bilangan riil dengan jalan dari dua buah persamaan di atas ditambah satu syarat dari grup SU(2).

Langkah pertama dari pers.4.1

misalkan :

$$B = a + ib$$
$$\overline{B} = a - ib$$

$$-\overline{B}(-\beta + i\gamma) = B(\beta + i\gamma)$$
$$-(a - ib)(-\beta + i\gamma) = (a + ib)(\beta + i\gamma)$$
$$a\beta - ai\gamma - ib\beta - b\gamma = a\beta + ai\gamma + ib\beta - b\gamma$$
$$-2ai\gamma - 2bi\beta = 0$$
$$-a\gamma - b\beta = 0 \tag{4.5}$$

Langkah kedua dari pers.4.2

misalkan :

$$A = x + iy$$
$$\overline{A} = x - iy$$

$$\overline{A}(\beta + i\gamma) = A(\beta + i\gamma) - \overline{B}(-i\alpha + i\lambda) + \overline{B}(i\alpha + i\lambda)$$

$$(x-iy)(\beta+i\gamma)=(x+iy)(\beta+i\gamma)-(a-ib)(-i\alpha+i\lambda)+(a-ib)(i\alpha+i\lambda)$$

$$x\beta+xi\gamma-iy\beta+y\gamma=x\beta+xi\gamma+iy\beta-y\gamma+ai\alpha-ai\lambda+b\alpha-b\lambda+ai\alpha+ai\lambda+b\alpha+b\lambda$$

$$-2iy\beta+2y\gamma=2ai\alpha+2b\alpha$$

$$-iy\beta+y\gamma-ai\alpha-b\alpha=0 \tag{4.6}$$

Langkah ketiga dari syarat grup SU(2)

$$|A|^2+|B|^2=1$$

$$\overline{A}A+\overline{B}B=1$$

$$(a-ib)(a+ib)+(x-iy)(x+iy)=1$$

$$a^2+aib-aib+b^2+x^2+xiy-xiy+y^2=1$$

$$a^2+b^2+x^2+y^2=1 \tag{4.7}$$

Dari pers.4.6 :

$$-iy\beta+y\gamma-ai\alpha-b\alpha=0$$

$$(y\gamma-b\alpha)-(y\beta+a\alpha)i=0$$

bilangan kompleks adalah bilangan yang mempunyai dua buah variabel bilangan riil, maka dari persamaan di atas dipunyai dua buah bilangan riil, yaitu

$$y\gamma-b\alpha=0 \tag{4.8}$$

dan

$$y\beta+a\alpha=0 \tag{4.9}$$

dengan menyederhanakan pers.4.9

$$y\beta+a\alpha=0$$

$$y=-\frac{\alpha}{\beta}a$$

dengan memasukkan nilai y ke dalam pers.4.8, diperoleh

$$\begin{aligned} y\gamma - b\alpha &= 0 \\ (-\frac{\alpha}{\beta}a)\gamma - b\alpha &= 0 \\ -\frac{\alpha}{\beta}a\gamma - b\alpha &= 0 \\ -\frac{\gamma}{\beta}a - b &= 0 \\ b &= -\frac{\gamma}{\beta}a \end{aligned}$$

dengan memasukkan nilai b ke dalam pers.4.7, diperoleh

$$a^2 + b^2 + x^2 + y^2 = 1$$

$$a^2 + (-\frac{\gamma}{\beta}a)^2 + x^2 + y^2 = 1$$

semua dikalikan dengan β^2, sehingga menjadi

$$(\beta^2 - \gamma^2)a^2 + \beta^2(x^2 + y^2) = \beta^2$$

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{\beta^2 - \beta^2(x^2 + y^2)}{\beta^2 - \gamma^2} \\ a &= \pm\sqrt{\frac{\beta^2 - \beta^2(x^2 + y^2)}{\beta^2 - \gamma^2}} \end{aligned}$$

Grup isotropi yang melalui titik $\begin{pmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{pmatrix}$ adalah

$$\begin{pmatrix} x + iy & \pm\sqrt{\frac{\beta^2-\beta^2(x^2+y^2)}{\beta^2-\gamma^2}} \pm i\frac{\gamma}{\beta}\sqrt{\frac{\beta^2-\beta^2(x^2+y^2)}{\beta^2-\gamma^2}} \\ \pm\sqrt{\frac{\beta^2-\beta^2(x^2+y^2)}{\beta^2-\gamma^2}} \mp i\frac{\gamma}{\beta}\sqrt{\frac{\beta^2-\beta^2(x^2+y^2)}{\beta^2-\gamma^2}} & x - iy \end{pmatrix}$$

untuk $\beta = 0$,

$$\xi = \begin{pmatrix} i\alpha + i\lambda & i\gamma \\ i\gamma & -i\alpha + i\lambda \end{pmatrix}$$

diperoleh grup isotropi atau stabiliser

$$G_\xi := \left\{ \begin{pmatrix} x+iy & 0 \\ 0 & x-iy \end{pmatrix} |x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Menurut Conlon [2001] grup Lie muncul secara alamiah sebagai transformasi dari manifold licin. Saat aksi grup tersebut adalah transitif, maka manifold dikatakan ruang homogen. Rosyid [2009] menyatakan karena aksi itu bersifat transitif jika dan hanya jika orbit yang diimbas olehnya tidak lain adalah himpunan G/G_ξ itu sendiri. Ruang Homogen yang diperoleh

$$M \cong G/G_\xi = SU(2) \otimes U(1)/G_\xi$$

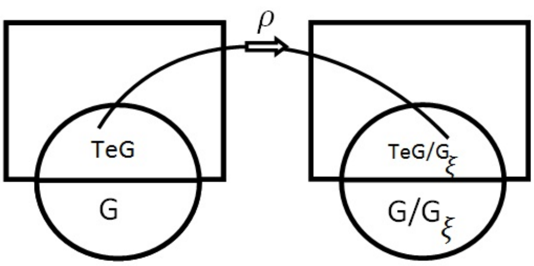
Orbit koajoin dari aksi sebuah grup adalah kelas - kelas ekuivalen dari G/G_ξ. Andaikan $g' \in G$, himpunan $[g]$ didefinisikan sebagai himpunan yang beranggotakan semua unsur dari G yang ekuivalen dengan g, yakni $[g] := \{g' \in g * G_\xi | g' \sim g\}$. Himpunan $[g]$ di namakan kelas ekuivalen yang memuat g. Apabila terdapat dua kelas ekuivalen $[g_1]$ dan $[g_2]$, dengan $g_1, g_2 \in G$. Maka, hanya ada dua pilihan $[g_1] = [g_2]$ atau $[g_1] \cap [g_2] = \oslash$. Oleh karena itu himpunan G tersekat sekat menjadi kelas-kelas ekuivalen yang saling asing dan masing - masing kelas ekuivalen ini adalah koset kiri dari G_ξ di G [Rosyid, 2009].

Andaikan $g' \in g{*}G_\xi$ dan $g \in g{*}G_\xi$, sehingga terdapat dua kelas ekuivalen $[g']$ dan $[g]$. Dengan definisi $Orb(\xi) := \left\{Ad^*_g \xi | g \in G\right\}$, maka masing - masing kelas ekuivalen tersebut akan membentuk orbit yang sama yaitu $Orb(\xi) := \left\{Ad^*_{g'} \xi | g' \in G\right\}$ dan $Orb(\xi) := \left\{Ad^*_g \xi | g \in G\right\}$. Jadi, $Orb(\xi)$ yang melalui $\xi \in (su(2) \oplus u(1))^*$ didefinisikan oleh

$$\begin{aligned} Orb(\xi) &:= \left\{Ad^*_g \xi | g \in G\right\} \quad \text{atau bisa dituliskan} \\ Orb(\xi) &:= \left\{Ad^*_{g*G_\xi} \xi | g * G_\xi \in G/G_\xi\right\} \end{aligned}$$

4.2.5 Mencari Struktur Simplektik

Menurut teorema 3.26 terdapat pemetaan bijektif antara $Ad^*_g \beta \to Ad^*_g \omega$ ($\forall g \in G$), karena $d(Ad^*_g \beta)$=$Ad^*_g \omega$. Karena terdapat hubungan ketunggalan atau unik diantara $\omega \in Z^2(\mathfrak{g})$ dan $\beta \in \mathfrak{g}^*$ sedemikian rupa sehingga $\omega = d\beta$. Maka terdapat pemetaan proyeksi antara G menuju G/G_ξ seperti dalam gambar 4.1 di bawah ini.



Gambar 4.1: Ilustrasi Pemetaan dari G ke G/G_ξ

Terdapat pemetaan proyeksi $\rho : SU(2) \otimes U(1) \to SU(2) \otimes U(1)/G_\xi$. Pemetaan dari ruang vektor di $SU(2) \otimes U(1)$ menuju ke ruang vektor di $SU(2) \otimes U(1)/G_\xi$ yang dipetakan adalah $\mathfrak{g} \in SU(2) \otimes U(1)$ ke kelas ekuivalen $[\mathfrak{g}] \in SU(2) \otimes U(1)/G_\xi$. Karena anggota aljabar Lie di $SU(2) \otimes U(1)/G_\xi$ belum diketahui maka terlebih dahulu dicari aljabar Lie untuk $SU(2) \otimes U(1)/G_\xi$.

4.2.6 Mencari Aljabar Lie bagi $SU(2) \otimes U(1)/G_\xi$

Mencari aljabar Lie dari sebuah grup dapat menggunakan eksponen matriks, dengan jalan sebagai berikut

$$\begin{aligned} expX &: \mathbb{R} \to G \\ &: t \to expX(t) \end{aligned}$$

Andaikan X adalah matriks kompleks n x n, maka e^{tX} adalah kurva licin di $M_n(\mathbb{C})$ dan

$$\frac{d}{dt} e^{tX}|_{t=0} = X$$

dengan memilih

$$X = \begin{pmatrix} 1+ia & 0 \\ 0 & 1-ia \end{pmatrix} \in g_\xi$$

kurva integral vektor singgung $\vec{X}$ yang melalui titik identitas (e) adalah sebuah kurva

$$\begin{aligned} c^X &: \mathbb{R} \to G \\ &: t \to c^{(t)\begin{pmatrix} 1+ia & 0 \\ 0 & 1-ia \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

pada G sedemikian rupa sehingga

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}1+iat & 0\\ 0 & 1-iat\end{pmatrix}|_{t=0}$$
$$=\begin{pmatrix}ia & 0\\ 0 & -ia\end{pmatrix}|_{t=0}=\begin{pmatrix}ia & 0\\ 0 & -ia\end{pmatrix}$$

jadi aljabar Lie bagi G_ξ adalah

$$\begin{pmatrix}ia & 0\\ 0 & -ia\end{pmatrix}$$

setelah diketahui aljabar Lie bagi G_ξ, dapat diketahui pula aljabar Lie bagi $SU(2)\otimes U(1)/G_\xi$. Oleh karena itu kita dapat mengetahui aljabar Lie bagi $SU(2)\otimes U(1)/G_\xi$ dengan cara

$$TeG = TeG_\xi \oplus TeG/G_\xi$$

$$\begin{pmatrix}i\alpha+i\lambda & \beta+i\gamma\\ -\beta+i\gamma & -i\alpha+i\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ia & 0\\ 0 & -ia\end{pmatrix}+TeG/G_\xi$$

$$\begin{pmatrix}i\alpha+i\lambda & \beta+i\gamma\\ -\beta+i\gamma & -i\alpha+i\lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}ia & 0\\ 0 & -ia\end{pmatrix}=TeG/G_\xi$$

$$TeG/G_\xi=\begin{pmatrix}i\alpha+i\lambda-ia & \beta+i\gamma\\ -\beta+i\gamma & -i\alpha+i\lambda+ia\end{pmatrix}$$

hasil di atas artinya *direct sum* antara $TeG_\xi \oplus TeG/G_\xi$ mengurangi dimensi dari TeG menjadi 3-dimensi, karena G_ξ dan $SU(2)\otimes U(1)/G_\xi$ merupakan subgrup dari $SU(2)\otimes U(1)$. Jadi wakilan matriks bagi aljabar Lie $SU(2)\otimes U(1)/G_\xi$ adalah

$$X=\begin{pmatrix}i\lambda & \beta+i\gamma\\ -\beta+i\gamma & i\lambda\end{pmatrix}$$

Setelah mendapatkan aljabar Lie bagi $SU(2) \otimes U(1)/G_\xi$ baru dapat dilakukan pemetaan proyeksi sebagaimana definisi di atas

$$\begin{aligned} \rho &: SU(2) \otimes U(1) \rightarrow SU(2) \otimes U(1)/G_\xi \\ &: (A^X, A^Y) \rightarrow \rho(A^X, A^Y) = (X, Y), \;\; \forall A^X, A^Y \in su(2) \oplus u(1) \end{aligned}$$

Proyeksi $\rho_* A^X = X$ dan $\rho_* A^Y = Y$, dengan melihat sifat ketunggalan dari $\omega = d\xi$ maka struktur simplektiknya adalah

$$\omega(X, Y) = d\xi([A^X, A^Y])$$

dengan d adalah operator *coboundary*, maka sesuai dengan pers.3.5 yang sudah di hitung di atas dapat dilakukan hal serupa untuk menghitung $d\xi([A^X, A^Y])$ caranya adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} (d\xi)(A_i^X, A_j^Y) :=& \sum_{i=0}^{k=1} (-1)^0 A_0^X \cdot \xi(\ldots, \hat{A}_0^X, \ldots) \\ &+ \sum_{i=1}^{k=1} (-1)^1 A_1^Y \cdot \xi(\ldots, \hat{A}_1^Y, \ldots) \\ &+ \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{0+1} \sigma([A_0^X, A_1^Y], \ldots, \hat{A}_0^X, \ldots, \hat{A}_1^Y, \ldots) \\ &= -A_0^X \xi(\hat{A}_0^X) - A_1^Y \xi(\hat{A}_1^Y) - \xi([A_0^X, A_1^Y]) \\ &= -\xi([A_0^X, A_1^Y]) \end{aligned}$$

struktur simplektiknya adalah

$$\omega(X, Y) = -\xi([A^X, A^Y]) \tag{4.10}$$

Jadi ruang fase klasik bagi grup $SU(2) \otimes U(1)$ adalah $(SU(2) \otimes U(1)/G_\xi, \omega)$.

4.3 Persamaan Hamilton

Dinamika dalam ruang fase klasik dimodelkan secara matematis oleh kurva-kurva berparameterkan waktu. Kurva-kurva tersebut merupakan penyelesaian dari suatu persamaan diferensial, persamaan diferensial disebut persamaan gerak bagi sistem yang ditinjau. Andaikan $(SU(2) \otimes U(1)/G_\xi, \omega)$ adalah manifold simplektik, sebuah medan vektor $\vec{X}_H$ pada $(SU(2) \otimes U(1)/G_\xi)$ dikatakan Hamiltonian jika dibangkitkan oleh sebuah fungsi riil H,

$$\begin{aligned} H &: SU(2) \otimes U(1)/G_\xi \rightarrow \mathbb{R} \\ &: p \rightarrow (H)(p) \end{aligned}$$

Struktur simplektik pada pers.(4.10) akan menentukan persamaan gerak dalam mekanika klasik, yaitu persamaan gerak Hamilton. Persamaan diferensial Hamilton diperoleh dengan cara sebagai berikut :

$$\vec{X}_{(H)} \lrcorner \omega = -dH$$

atau

$$\omega(\vec{X}_{(H)}, Y) = -\xi([A^{\vec{X}_{(H)}}, A^Y]) = -dH \cdot Y$$

untuk setiap medan vektor Y.
Secara lokal $\vec{X}_H$ dapat di tulis sebagai

$$\vec{X}_{(H)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial P_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$$

sedemikian rupa sehingga

$$\begin{aligned} \vec{X}_{(H)} \lrcorner \omega &= \sum_{i=1}^{n} \vec{X}_{(H)} \left(dq_i \wedge dp_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\vec{X}_{(H)} dq_i \right) \wedge dp_i - dq_i \wedge \left(\vec{X}_{(H)} dp_i \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right) = -dH \end{aligned}$$

dengan

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i, -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{dp_i}{dt} = \dot{p}_i$$

persamaan inilah merupakan persamaan gerak Hamilton kanonis.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dari analisa yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa :

1. Grup $SU(2) \otimes U(1)$ dapat diekstrak gambaran klasik dari grup tersebut, yakni manifold simplektik $(SU(2) \otimes U(1)/G_\xi, \omega)$ sebagai ruang fase klasik dari grup $SU(2) \otimes U(1)$.

2. Watak dari ruang fase klasik merupakan dinamika yang direalisasikan melalui persamaan diferensial Hamilton dari struktur simplektik yang diperoleh.

5.2 Saran

Apabila tertarik dengan penelitian ini dapat dilanjutkan dengan mencari persamaan gerak sistem fisis dengan persamaan diferensial Hamilton yang telah diketahui. Penelitian ini bisa dikembangkan lagi sampai dengan ranah mekanika kuantum melalui jalan pengkuantuman, lebih spesial lagi dengan menggunakan pengkuantuman geometri. Pengkuantuman geometrik merupakan perluasan dari pengkuantuman kanonis yang diusulkan oleh Dirac.

DAFTAR PUSTAKA

Aebische, B., Borer, M., Kalin, M., Leuenberger, Ch., and Reimann, H. M., 1992, *Symplectic Geometry*, Birhäuser Verlag, Basel.

Alekseev, A. and Malkin, A. Z., 1993, *Symplectic Structures Associated to Lie-Poisson Group*, Commun.Math.Phys. 162 (1994) 147-174.

Alekseev, A. and Lachowska, A., 2003, *Invariant* $^* - product$ *on Coadjoint Orbits and The Shapovalov Pairing*, arXiv:math/0308100v1, 11 Agustus 2003.

Cahen, M., Gut, S. and Rawnsley, J., 1999, *Preferred Invariant Symplectic Connection on Compact Coadjoint orbits*, Letters in Math. Phys. 48 (1999) 353-364.

Conlon, L., 2001, *Differentiable Manifolds*, Birhäuser Verlag, Basel.

Da Silva, A. C., 2001, *Lectures on Symplectic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin.

Diep, Do. N and Hai, Nguyen. Viet., 2001, *Quantum Co-Adjoint Orbits of The Group of Affine Transformation of The Complex Line*, Volume 42 (2001), No. 2, 419-430.

Goldstein, H., Poole, C. and Safko, J., 1980, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Philippines.

Gotay, Mark. J. and Isenberg, James. A.,1992, *Symplectic Geometry Lies at the Very Foundations of Physics and Mathematics*, Gazette des Matht'ematiciens 54, 59-79 (1992).

Greub, Werner., 1972, *Connections, Curvature, and Cohomology*, D. Reidel Publishing Company, Bussum.

Hall, B. C., 2004, *Lie Groups,Lie Algebras, and Representations*, Springer-Verlag, New York.

Halzen, F. and Martin, A. D., 1984, *Quark and Lepton : An Introductory Course Modern Particle Physics*, Jhon Wiley and Son, New York.

Kostant, B., 2003, *Minimal Coadjoint Orbits and Symplectic Induction*, arXiv:math/0312252v1, 12 Desember 2003.

Marsedn, J. E. and Ratiu, T. S., 1998, *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Birhäuser Verlag, Basel.

Masuda, M., 2009, *Symmetry of a Symplectic Toric Manifold*, J. Symplectic Geom. Volume 8, Number 4 (2010), 359-380.

Nakahara, M., 2003, *Geometry, Topology and Physics*, IOP Publishing Ltd, London.

Peter, M., 2007, *The Orbit Method for Compact Connected Lie Group*, arXiv:0906.4915v1, 26 Juni 2009.

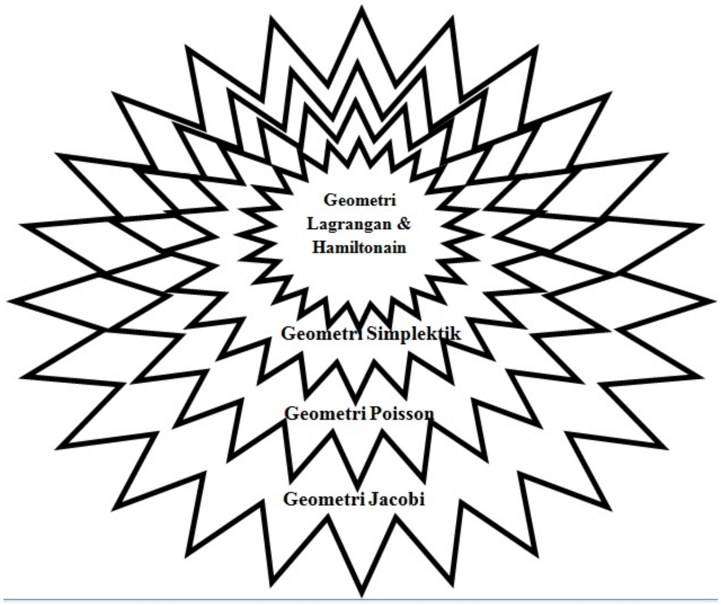
Rosyid, M. F., 2006, *Mekanika Kuantum*, Jurusan Fisika FMIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

Rosyid, M. F., 2009, *Aljabar Abstrak dalam Fisika*, Jurusan Fisika FMIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

Rosyid, M. F., 2009, *Keragaman Licin untuk Fisikawan*, Jurusan Fisika FMIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

Rosyid, M. F., 2011, *Geometric Mechanics and Biolocomotion*, Conference on Theoretical Physics and Nonlinier Phenomena, ITS-Surabaya.

LAMPIRAN A
GAMBAR



Gambar 1.1: Diagram Tingkat Keumuman Geometry

LAMPIRAN B

PEMBUKTIAN DARI TEOREMA, PROPOSISI DAN LEMMA

Teorema 2.31. *(da Silva [2001]) Jika X dan Y adalah medan vektor simplektik pada manifold simplektik (M, ω), maka $[X, Y]$ merupakan hamiltonian dengan fungsi Hamiltonian $\omega(Y, X)$*

Pembuktian 2.

$$\begin{aligned} \iota\,[X,Y]^{\omega} &= \mathcal{L}_X \iota_Y \omega - \iota_Y \mathcal{L}_X \omega \\ &= d\iota_X \iota_Y \omega + \iota_X \underbrace{d\iota_Y \omega} - \iota_Y \underbrace{d\iota_X \omega} - \iota_Y \iota_X \underbrace{d\omega} \\ &= d(\omega(Y, X)). \end{aligned}$$

Proposisi 2.32. *(Hall [2004] Grup SU(2) adalah terhubung sederhana*

Pembuktian 3. *Grup SU(2)secara topologis mirip dengan bola berdimensi-3 S^3 yang berada dalam ruang $\mathbb{R}^4$. Seperti diketahui bahwa S^3 adalah terhubung sederhana.*

Proposisi 2.33. *(Hall [2004]) Andaikan X adalah matriks kompleks $n \times n$. Maka, e^{tX} adalah kurva licin di $M_n(\mathbb{C})$ dan*

$$\frac{d}{dt} e^{tX} = X e^{tX} = e^{tX} X$$

lebih tepatnya,

$$\frac{d}{dt} e^{tX}|_{t=0} = X$$

Pembuktian 4. *Turunkan deret pangkat untuk e^{tX} langkah demi langkah (ini diperbolehkan karena untuk setiap i dan j,$(e^{tX})_{ij}$ diberikan oleh deret pangkat konvergen di t dan itu merupakan teorema standar bahwa dapat di turunkan langkah demi langkah).*

Proposisi 2.34. *(Hall [2004]) Andaikan G adalah grup Lie matriks dan X adalah elemen dari aljabar Lie. Maka, e^X adalah sebuah elemen dari komponen identitas di G.*

Pembuktian 5. *Oleh definisi dari aljabar Lie, e^{tX} ada di G dan t bilangan riil. Namun demikian, t bervariasi dari 0 ke 1, e^{tX} adalah lintasan penghubung identitas ke e^X.*

Proposisi 2.35. *(Hall [2004])*
Andaikan G adalah grup Lie matriks dengan aljabar Lie $\mathfrak{g}$. Andaikan X sebuah elemen di $\mathfrak{g}$ dan A elemen di G. Maka, AXA^{-1} ada di $\mathfrak{g}$.

Pembuktian 6.

$$e^{t(AXA^{-1})} = Ae^{tX}A^{-1}$$

dan $Ae^{tX}A^{-1} \in G$.

Teorema 2.36. *(Marsden [1998])*
Andaikan G adalah sebuah grup Lie dan $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ adalah sebuah orbit koajoin. Maka

$$\omega^{\pm}(\mu)(\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu), \eta_{\mathfrak{g}^*}(\mu)) = \pm \langle \mu, [\xi, \eta] \rangle$$

untuk seluruh $\mu \in \mathcal{O}$ dan $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ mendefinisikan forma simplektik pada $\mathcal{O}$. Lebih nyaman jika menyebut $\omega^{\pm}$ sebagai struktur simplektik orbit koajoin.

Pembuktian 7. *(Marsden [1998])*
Agar tidak membingungkan maka dengan menganggap struktur ω^- dan ω^+ adalah sama. Persamaan pada ruas kanan mendefinisikan vektor singgung $\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu)$ dan $\eta_{\mathfrak{g}^*}(\mu)$ untuk setiap $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$. Fakta ini dengan mengikuti penjabaran berikut

$$\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu) = \xi'_{\mathfrak{g}^*}(\mu)$$

berimplikasi

$$- \langle \mu, [\xi, \eta] \rangle = - \langle \mu, [\xi', \eta] \rangle$$

$\forall \eta \in \mathfrak{g}$. *Oleh karena itu,*

$$\omega^-(\mu)(\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu), \eta_{\mathfrak{g}^*}(\mu)) = \omega^-(\xi'_{\mathfrak{g}^*}(\mu), \eta_{\mathfrak{g}^*}(\mu)),$$

Selanjutnya akan dilihat bahwa ω^- tidak merosot, karena pasangan $\langle , \rangle$ adalah tidak merosot, maka $\omega^-(\mu)(\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu), \eta_{\mathfrak{g}^*}(\mu)) = 0$ untuk setiap $\eta_{\mathfrak{g}^*}(\mu)$ berimplikasi $- \langle \mu, [\xi, \eta] \rangle = 0$ utnuk setiap η. Artinya bahwa $0 = - \langle \mu, [\xi, \cdot] \rangle = \xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu)$. Struktur ω^- adalah tertutup karena $d\omega = 0$.

LAMPIRAN C

TEORI PENDUKUNG

3.1 Contoh-contoh dari Grup Lie Matriks

3.1.1 Grup Linier Umum GL(n,$\mathbb{R}$) dan GL(n,$\mathbb{C}$)

Grup linier umum di atas $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$ adalah grup Lie matriks menurut dirinya sendiri. Subgrup dari GL(n,$\mathbb{C}$) adalah dirinya sendiri. Apabila A_m adalah barisan dari matriks dalam GL(n,$\mathbb{C}$) dan A_m konvergen menuju A, maka oleh definisi dari Gl(n,$\mathbb{C}$), $A \in$ Gl(n,$\mathbb{C}$) atau A tidak berinvers.

Lebih lanjut, GL(n,$\mathbb{R}$) adalah subgrup dari GL(n,$\mathbb{C}$) dan bila $A_m \in$ GL(n,$\mathbb{R}$) dan A_m konvergen menuju A, maka elemen dari A adalah bilangan riil. Maka, A tidak berinvers atau $A \in$ GL(n,$\mathbb{R}$).

3.1.2 Grup Linier khusus SL(n,$\mathbb{R}$) dan SL(n,$\mathbb{C}$)

Grup linier khusus di atas $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$ adalah grup dari matriks n x n berinvers (dengan elemenya bilangan riil atau kompleks) dengan determinanya satu. baik SL(n,$\mathbb{R}$) dan SL(n,$\mathbb{C}$) adalah subgrup dari GL(n,$\mathbb{C}$). Bila A_m adalah barisan dari matriks dengan determinan satu dan A_m konvergen menuju A, maka A juga determinanya satu, karena determinanya adalah fungsi kontinyu. Maka, SL(n,$\mathbb{R}$) dan SL(n,$\mathbb{C}$) adalah grup Lie matriks.

3.1.3 Grup Ortogonal dan Ortogonal Khusus, O(n) dan SO(n)

Sebuah matriks A n x n adalah ortogonal jika vektor kolum membuat A ortonormal, jika

$$\sum_{l=1}^{n} A_{lj}A_{lk} = \delta_{jk}, 1 \leq j, k \leq .$$

(dengan δ_{jk} adalah delta kroneker, sama dengan 1 jika j=k dan sama dengan 0 jika $j \neq k$). Ekuivalen, A ortogonal bila A melestarikan perkalian dalam (perkalian sekalar) untuk setiap vektor x,y di $\mathbb{R}^n$. Definisi yang sama bahwa A ortognal jika A^{tr}A=I, yaitu jika A^{tr}=A^{-1}. (Dengan, A^{tr} adalah transpos dari A, $(A^{tr})_{kl} = A_{lk}$.)

Karena detA^{tr}= detA, jika A ortogonal, maka det($A^{tr}A$)=$(detA)^2$=det I=1. Maka, detA=± 1, untuk setiap matriks ortogonal A. Formula ini menjelaskan secara khusus bahwa setiap matriks ortogonal harus mempunyai invers. Namun demikian, bila A sebuah matriks ortogonal, maka

$$\langle A^{-1}x, A^{-1}y\rangle = \langle A(A^{-1}x), A(A^{-1}y)\rangle$$

Maka, invers dari matriks ortogonal adalah ortogonal. Perkalian sekalar dari dua matriks ortogonal adalah ortogonal, karena bila A dan B keduanya melestarikan perkalian sekalar, menjadi AB. Oleh karena itu himpunan matriks ortogonal membentuk sebuah grup. Himpunan matriks riil ortogonal n x n adalah grup ortogonal O(n) dan grup ortogonal dari GL(n,$\mathbb{C}$). Limit dari barisan matriks ortogonal adalah ortogonal, karena hubungan A^{tr}A=I bila diambil limitnya masih lestari. Maka, O(n) merupakan grup Lie Matriks.

Himpunan dari matriks ortogonal n x n dengan determinan satu adalah grup ortogonal khusus SO(n). Jelas bahwa grup tersebut adalah subgrup dari O(n). Karena baik ortogonalitas dan sifat mempunyai determinan satu, maka SO(n) adalah grup Lie matriks. Karena elemen dari O(n) sudah mempunyai determinan ± 1, maka SO(n) adalah setengah dari O(n). Secara geometri, elemen dari O(n) adalah rotasi atau kombinasi dari rotasi dan pemantulan. Elemen dari SO(n) juga berupa rotasi.

3.1.4 Grup Uniter dan Uniter Khusus, U(n) dan SU(n)

Sebuah matriks komples A n x n dikatakan uniter jika vektor kolum dari A adalah ortonormal, yaitu jika

$$\sum_{l=1}^{n} \overline{A_{lj}} A_{lk} = \delta_{jk}$$

A adalah uniter jika A melestarikan perkalian sekalar, yaitu jika $\langle x, y\rangle$=$\langle A_x, A_y\rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$. Dengan defini setara lainya bahwa A uniter jika A^*A=I, yaitu jika $A^* = A^{-1}$ (dengan A^* adalah adjoin dari A, $(A^*)_{jk} = \overline{A_{kj}}$).

Karena detA^*=$\overline{detA}$, bahwa jika A adalah uniter maka det(A^*A)=$|detA|^2$=det I=1. Maka, $|detA|$=1, untuk semua matriks uniter A. Secara khusus menunjukan bahwa setiap matriks uniter adalah berinvers. Argumen yang sama untuk grup ortogonal menunjukan bahwa himpunan dari matriks uniter membentuk sebuah grup.

Himpunan dari matriks uniter n x n adalah grup uniter U(n) dan merupakan subgrup dari GL(n,$\mathbb{C}$). Limit dari matriks uniter juga uniter, sehingga U(n) adalah grup Lie matriks. Himpunan matriks uniter dengan determinan 1 adalah grup uniter khusus SU(n).

3.1.5 Grup Ortogonal Kompleks, O(n;$\mathbb{C}$) dan SO(n;$\mathbb{C}$)

Andaikan bentuk bilinier $(\cdot,\cdot)$ pada $\mathbb{C}^n$ didefinisikan oleh (x,y)=$\sum_k x_k y_k$. Bentuk ini bukan perkalian sekalar karena, bentuk ini adalah simetri dari pada simetri-konjugat. Himpunan matriks kompleks A n x n yang melestarikan bentuk ini (yaitu, (A_x, A_y)=(x,y), $\forall x, y \in \mathbb{C}$) adalah grup ortogonal kompleks O(n;$\mathbb{C}$) dan merupakan subgrup dari GL(n,$\mathbb{C}$). Mengulang alasan untuk kasus khusus di SO(n) dan O(n) (tetapi sekarang elemenya kompleks), dapat ditemukan sebuah matriks kompleks A n x n di O(n;$\mathbb{C}$) jika dan hanya jika A^{tr}A=I dan O(n;$\mathbb{C}$) juga grup Lie matriks dengan detA=± 1, $\forall A \in$ O(n;$\mathbb{C}$). Ingat bahwa O(n;$\mathbb{C}$) tidak sama sebagai grup uniter U(n). Grup SO(n;$\mathbb{C}$) didefinisikan sebagai himpunan dari $A \in$ O(n;$\mathbb{C}$) dengan detA=1 dan juga merupakan grup Lie matriks.