



MPM 6301-MATEMATIKA 1

Tim Dosen :

Dra. Mustamina Maulani, M.T.

Dra. Lisa Samura, M.T.

Cahaya Rosyidan, M.Sc.

Yusraida Khairani Dalimunte, S.Pd., M.Sc.

Dina Asmaul Chusniyah, S.Si., M.Si

Ghanima, S.T., M.T.

Arinda Ristawati, S.T., M.T.

Ridha Husla, S.T., M.T.

Hafidh, S.T., M.T.

Puri Wijayanti, S.T., M.T.

Teknik Perminyakan - FTKE

Universitas Trisakti



Materi :

- SISITEM BILANGAN REAL
- PERTIDAKSAMAAN FUNGSI REAL DAN NILAI MUTLAK
- FUNGSI SATU VARIABEL, DOMAIN, RANGE DAN GRAFIK FUNGSI
- LIMIT FUNGSI DAN KEKONTINUAN
- DIFERENSIAL
- APLIKASI DIFERENSIAL
- INTEGRAL TAK TENTU

Referensi :

- KALKULUS JILID 1, EDISI 9, PURCELL, ERLANGGA.
- KALKULUS , EDISI 13, THOMAS, ERLANGGA.
- KALKULUS, KOKO MARTONO , ERLANGGA.
- INTEGRAL FUNGSI SATU VARIABEL & PENERAPANNYA, EDISI 1, MUSTAMINA MAULANI; LISA SAMURA; CAHAYA ROSYIDAN, PENERBIT UNIVERSITAS TRISAKTI



BAB 1

SISTEM BILANGAN REAL



1. Sistem Bilangan

-  Himpunan Bilangan Asli , ditulis dengan notasi N
$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$
- Himpunan Bilangan Bulat , ditulis dengan notasi Z
$$Z = \{\dots, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$
- Himpunan Bilangan Rasional , ditulis dengan notasi Q , dimana $Q = \frac{p}{q}$
dan $q \neq 0$, dimana p adalah bulat dan q bilangan asli. Bilangan Rasional bersifat selalu mempunyai bentuk desimal berulang.

Contoh: $\frac{1}{2} = 0,50000\dots$, $\frac{7}{11} = 0,63636363\dots$

1. Sistem Bilangan



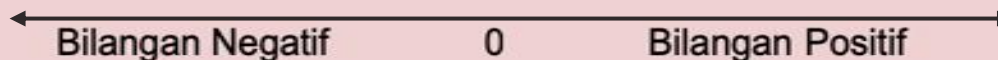
- Himpunan bilangan Irasional , adalah himpunan bilangan yang bukan Rasional. Bilangan ini bukan hasil bagi bilangan bulat dan bilangan asli dan juga tidak mempunyai bentuk decimal berulang.

Contoh: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{16}$

- Himpunan Bilangan Real , ditulis dengan notasi R . Adalah gabungan dari himpunan bilangan Rasional dan irasional, yang merupakan susunan sekelompok angka dengan aturan tertentu.

Dapat dituliskan $N \subset Z \subset Q \subset R$

- Garis Bilangan Real :



- Urutan $<$, $>$, $\leq$, $\geq$
- Selang Hingga :
Himpunan bagian dari R yang terbatas di atas dan di bawah (penulisan lain untuk urutan)



1. Sistem Bilangan

Selang sebagai himpunan titik	Gambar selang pada garis bilangan
$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
$(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
$(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	
$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	
$(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$	



2. Pertidaksamaan Real

- Bentuk Umum Pertidaksamaan dalam bilangan real :

$$\frac{A(x)}{B(x)} < \frac{C(x)}{D(x)}$$

A, B, C, D suku banyak/Polinom

Tanda < dapat diganti dengan >, ≤, ≥

- Permasalahan:
Menyelesaikan suatu pertidaksamaan dengan mencari himpunan jawab bilangan Real (x) yang memenuhi pertidaksamaan tersebut



2. Pertidaksamaan Real

Langkah menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan :

- Dengan rumus aljabar elementer dan urutan, ubahlah bentuk pertaksamaan menjadi $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$. dengan P, Q suku banyak.
- Uraikan P dan Q atas faktor linier / kuadrat definit positif
- Tentukan tanda pertaksamaan pada garis bilangan
- Tentukan himpunan jawabnya dan tampilkan dalam bentuk selang



2. Pertidaksamaan Real

Contoh – Tentukan himpunan (HP) penyelesaian pertidaksamaan (fungsi real) berikut:

1. $\frac{x-2}{x+4} < 2$

Jawab :

$$\frac{x-2}{x+4} - 2 < 0$$

$$\frac{x-2-2(x+4)}{x+4} < 0$$

$$\frac{-x-10}{x+4} < 0 \quad (\text{dikali } (-))$$

$$\frac{x+10}{x+4} > 0 \quad (\text{Buat Garis Bilangan})$$

$$\text{HP} = \{x : x < -10 \text{ atau } x > 4, x \in R\} \text{ atau } (-\infty, -10) \cup (-4, \infty)$$

2. $\frac{3x^2-5x-2}{4x+5} \geq 0$

Jawab : $\frac{(3x+1)(x-2)}{4x+5} \geq 0$ (Buat Garis bilangan)

$$\text{HP} = \left(-\frac{5}{4}, -\frac{1}{3}\right] \cup [2, \infty)$$



2. Pertidaksamaan Real

LATIHAN – Tentukan himpunan (HP) penyelesaian pertidaksamaan (fungsi real) berikut:

1. $3x + 2 \leq 10 - 6x < 2x + 5.$

6. $\frac{2x+5}{x} \geq \frac{3}{x-2}$

2. $\frac{x^3(x+1)^2(4-x)^3}{5+8x} < 0.$

7. $\frac{1}{x} + \frac{9}{6x+4} \geq 3$

3. $\frac{(x^2+4)(9-x^2)}{(8x-3)^7} \geq 0.$

8. $\frac{x-2}{x^2} \geq \frac{x+1}{x+3}$

4. $\frac{x+1}{x-2} \geq \frac{x}{x+3}$

9. $x < \frac{x+2}{x} \leq 2$

5. $2 < \frac{x^2+1}{x} \leq x + 3$

10. $2x + 1 \leq x^2 \leq 2x + 4$

3. Pertidaksamaan Nilai Mutlak



- **Definisi :**

Nilai Mutlak bilangan Real x dinyatakan oleh $|x|$, didefinisikan:

$$|x| = \begin{cases} x & , \text{jika } x \geq 0 \\ -x & , \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Arti geometri $|x|$ adalah jarak x ke 0 pada garis bilangan

- **Sifat Nilai Mutlak :**

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$
$$|ab| = |a||b|$$

Teorema :

$\forall$ bilangan real x dan y dan $x \geq 0$ berlaku :

- $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$
- $|x| \geq a \iff x \leq -a \text{ atau } x \geq a$
- $|x| < |y| \iff x^2 < y^2$

Pertidaksamaan dengan nilai mutlak diselesaikan dengan cara menuliskan bentuknya menjadi pertidaksamaan tanpa nilai mutlak dengan menggunakan sifat dan teorema diatas dan diselesaikan dengan pertidaksamaan real

3. Pertidaksamaan Nilai Mutlak



Contoh – Tentukan himpunan (HP) penyelesaian pertidaksamaan dengan nilai mutlak berikut:

1. $|x + 1| < 4$

Jawab :

$$-4 < x + 1 < 4$$

$$-5 < x < 3$$

$$\text{HP} = (-5, 3)$$

LATIHAN : Tentukan himpunan (HP) penyelesaian pertidaksamaan dengan nilai mutlak berikut:

1. $\left| 2 + \frac{5}{x} \right| > 2$

2. $|x - 2| < 3|x + 7|$

3. $|2x - 3| \leq |x + 10|$

4. $|x^2 - x| \leq 2$

5. $|x^2 - x - 1| \leq 1$

6. $2 < |3x + 4| < 6$

7. $\left| \frac{x}{x-1} \right| \leq \left| \frac{x-2}{x+1} \right|$



BAB 2

FUNGSI SATU VARIABEL BEBAS



1. Konsep Dasar Fungsi

Definisi :

Fungsi pada himpunan $D \subset \mathbb{R}$ adalah suatu aturan yang memasangkan setiap unsur di D dengan tepat satu bilangan real.

Daerah Definisi (Df) dan daerah nilai (Rf) fungsi :

Himpunan D dinamakan daerah definisi fungsi, dan himpunan bilangan real yang merupakan pasangan dari unsur D dinamakan daerah nilai fungsi

Jika fungsi ini dinamakan f maka fungsi f dari himpunan D ke $\mathbb{R}$ dituliskan sebagai :

$f : D \rightarrow \mathbb{R}, y = f(x)$. Dan $y = f(x)$ dinamakan aturan fungsi

$Df = \{x \mid f(x) \text{ bilangan real} \}$ Dan $Rf = \{f(x) \mid x \in Df\}$

x = variable bebas dan y variable tak bebas

1. Konsep Dasar Fungsi



Latihan

Tentukan Df dan Rf dari fungsi berikut :

1. $f(x) = x^2 + 2$

2. $f(x) = x^2 - 4x + 5, 0 \leq x \leq 3$

3. $f(x) = 1 + \sqrt{1 - 2x}$

4. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

5. $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$

6. $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 - 9}}$

7. $f(x) = \frac{x(x-2)}{x-1}$



2. Jenis Fungsi

I Fungsi Elementer:

1. Fungsi Aljabar → Suku Banyak (Polinom)

$$P_n(x)$$

→ Fungsi Linier $Ax + By + C = 0$

→ Fungsi Kuadrat $ax^2 + bx + c$

→ Fungsi kubik $ax^3 + bx^2 + cx + d$
dst

2. Fungsi Rasional : $\frac{P_n(x)}{G_n(x)}$. Dimana P dan G polinom

3. Fungsi Irasional (akar dari fungsi rasional) : $\sqrt[n]{q(x)}$. Dimana $q(x)$ fungsi rasional

II Fungsi Transenden :

1. Fungsi Triginometri $\sin x$, $\cos x$, tangen x dst

2. Fungsi Hiperbolik dan invers hiperbolik



2. Jenis Fungsi

Contoh :

1. $f(x) = 2x + 5$ Fungsi Linier

2. $f(x) = x^2 + 4x - 1$ Fungsi Kuadrat

3. $f(x) = 4x^3 - x^2 + 4x - 10$. Fungsi Kubik

4. $f(x) = \frac{x^2}{5x-1}$ Fungsi Rasional

5. $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+5}}$ Fungsi Irasional

6. $f(x) = \sqrt[3]{3x^3 - 4x + 1}$. Fungsi Irasional

7. $f(x) = 3 \cos 4x$ Fungsi Trigonometri

8. $f(x) = 3 \sin^{-1} 6x$ Fungsi Trigonometri

9. $f(x) = 3 \operatorname{tgnh} x$. Fungsi Hiperbolik

3. Operasi Aljabar Fungsi



- Jika fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ terdefinisi pada himpunan D maka :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(lf)(x) = l f(x) \text{ dimana } l \text{ anggota real}$$

$$(fg)(x) = f(x) g(x)$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ dimana } g(x) \neq 0$$

- Fungsi dengan banyak persamaan, sebagai contoh :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 0 \\ 4 - x^2 & , 0 \leq x \leq 2 \\ x - 2 & , x \geq 2 \end{cases}$$

- Fungsi komposisi

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Jelaskan dengan contoh

- Fungsi Invers

invers dari fungsi $f(x)$ dituliskan dengan $f^{-1}(x)$ adalah suatu fungsi tunggal yang terdefinisi pada R_f dan memenuhi $f(f^{-1}(x)) = x$

3. Operasi Aljabar Fungsi



Contoh :

1. Jika $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$

dan $g(x) = 5x + 7$, Tentukan :

a. $(f + g)(x)$. f. $(f \circ g)(x)$

b. $(f - g)(x)$. g. $(g \circ f)(x)$

c. $(3f)(x)$ h. $f^{-1}(x)$

d. $(fg)(x)$ i. $g^{-1}(x)$

e. $\frac{f}{g}(x)$

Jawab :

a. $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (3x^2 + 2x - 1) + (5x + 7)$
 $= (3x^2 + 7x + 6)$

b. $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (3x^2 - 3x - 8)$

c. $(3f)(x) = 3f(x) = 3(3x^2 + 2x - 1)$
 $= 9x^2 + 6x - 3$

d. $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$
 $= (3x^2 + 2x - 1) \cdot (5x + 7)$
 $= 15x^3 + 31x^2 + 9x - 7$

e. $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x^2 + 2x - 1}{5x + 7}$, jika $x \neq -\frac{7}{5}$

f. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(5x + 7)$
 $= 3(5x + 7)^2 + 2(5x + 7) - 1$
 $= \text{ sederhanakan}$

g dan h *Latihan*

i. Tuliskan $y = 5x + 7$ maka $x = \frac{y}{5} - \frac{7}{5}$

jadi $g^{-1}(x) = \frac{x}{5} - \frac{7}{5}$



4. Grafik Fungsi dengan Pergeseran Fungsi

Pergeseran Fungsi digunakan untuk menggambarkan grafik fungsi $y = f(x+a)$, $y = f(x) + a$, $y = af(x)$ dan $y = f(ax)$

bisa dilakukan jika grafik dasar $y = f(x)$ sudah diketahui

$y = f(x+a)$
 $y = f(x) + a$
 $y = af(x)$
 $y = f(ax)$
dapat ditentukan

Grafik dasar yang akan dipakai misalnya:

$y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = \ln x$, $y = \sin x$ dan $y = \cos x$



4. Grafik Fungsi dengan Pergeseran Fungsi

1. Grafik $y = f(x) + a$

Diperoleh dari grafik dasar $y = f(x)$ dengan menggeser a satuan ke atas jika $a > 0$ dan sejauh a kebawah jika $a < 0$

2. Grafik $y = f(x + a)$

Diperoleh dari grafik dasar $y = f(x)$ dengan menggeser a satuan ke a ke kiri jika $a > 0$ dan sejauh a ke kanan jika $a < 0$

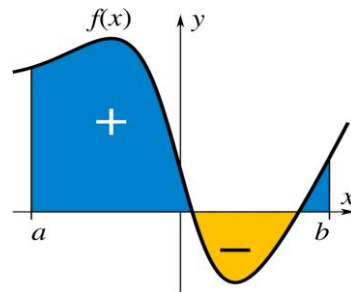
3. Grafik $y = af(x)$

Diperoleh dari grafik dasar $y = f(x)$ dengan cara mengalikan setiap nilai y dengan a



3. Grafik $y = f(ax)$

Diperoleh dari grafik dasar $y = f(x)$ dengan cara membagi setiap nilai x dengan a (cara Dilatasi)





4. Grafik Fungsi dengan Pergeseran Fungsi

Latihan : Gambarkan Grafik fungsi berikut dengan menggunakan pergeseran fungsi

1. $y = x^2 + 4$

2. $y = x^2 - 2$

3. $y = (x + 1)^2$

4. $y = (x - 3)^2$

5. $y = -x^3$

6. $y = -x^2 + 1$

7. $y = \cos \frac{x}{2}, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

8. $y = 1 - \sin x$

9. $y = x^2 + 4x + 6$

10. $y = -x^2 + 2x + 2$

11. $y = x^2 - 6x + 5$

12. $y = 2 - \sin 2x, -\pi \leq x \leq \pi$

13. $y = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 4 - x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ x - 2, & x > 2 \end{cases}$

5. Grafik Fungsi Nilai Mutlak



Grafik fungsi yang memuat nilai mutlak dilakukan dengan cara :

1. Ubahlah bentuk aturan fungsi menjadi fungsi tanpa nilai mutlak, dengan sifat nilai mutlak

2. Menggambarkan fungsi didalam nilai mutlak, yang dibawah sumbu x dicerminkan terhadap sumbu x dan yang diatas sumbu x tetap

Latihan : Gambarkan Grafik fungsi nilai mutlak berikut :

1. $y = |x^2 - 2|$
2. $f(x) = x(|x| - 2)$
3. $g(x) = |\cos x|$
4. $p(x) = |x^2 - 4x|$

6. Perumusan Masalah Nyata Dalam Bentuk Fungsi Real



Masalah nyata dengan bentuk fungsi real banyak ditemui. Misalnya :

- Tarif Pos bergantung pada berat
- Prestasi seseorang bergantung pada potensi, dll

Masalah nyata dengan 2 variable yang saling berkaitan dapat dirumuskan menjadi bentuk fungsi dengan 1 variable.

6. Perumusan Masalah Nyata Dalam Bentuk Fungsi Real



Contoh :

Sebuah Cermin yang merupakan gabungan dari persegi panjang dan setengah lingkaran berjari-jari r dibagian atasnya, jika keliling cermin adalah 9m, nyatakan luas permukaan cermin sebagai fungsi dari r .

Jawab :

Jika jari-jari lingkaran adalah r dan sisi persegi Panjang adalah t .

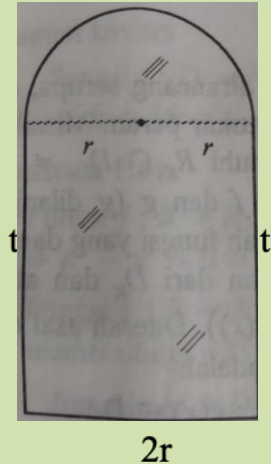
Keliling Cermin = $2r + 2t + \pi r = 9$ maka $2t = 9 - 2r - \pi r$ dan $t = \frac{9}{2} - r - \frac{1}{2}\pi r$

Luas Permukaan cermin = $L = 2rt + \frac{1}{2}\pi r^2$

$$L(r) = 2r \left(\frac{9}{2} - r - \frac{1}{2}\pi r \right) + \frac{1}{2}\pi r^2 = 9r - 2r^2 - \pi r^2$$

$$\text{Jadi } L(r) = 9r - (2 - \pi)r^2$$

merupakan Luas cermin fungsi dari jari-jari r



6. Perumusan Masalah Nyata Dalam Bentuk Fungsi Real



LATIHAN :

1. Sebuah bejana berbentuk kerucut lingkaran tegak terbalik dengan jari-jari lingkaran alas 2 cm dan tinggi 200cm. Pada saat tinggi minyak t cm, Tentukan volume minyak dalam bejana sebagai fungsi dari t
2. Volume sebuah kotak berbentuk balok dengan alas bujursangkar adalah 9000cm^3 . Jika biaya pembuatan bidang alas dan tutup kotak Rp. 200 per cm^2 dan bidang sisinya Rp. 25 per cm^2 , Tentukan biaya total pembuatan kotak sebagai fungsi dari Panjang rusuk alasnya.



BAB 3

LIMIT DAN KEKONTINUAN

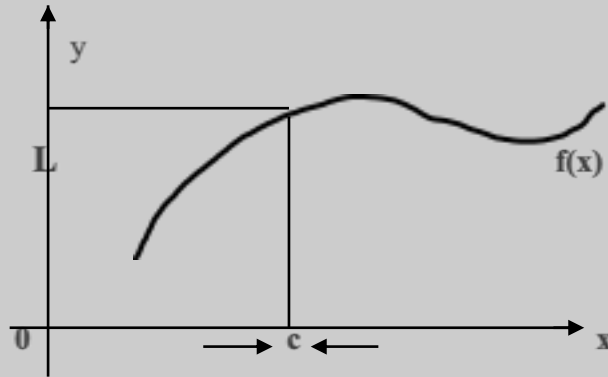
LIMIT FUNGSI



DEFINISI LIMIT FUNGSI :

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$, berarti jika x mendekati c , maka $f(x)$ mendekati L .

SECARA GEOMETRIS :





Contoh menghitung limit sederhana :

- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

$$\begin{aligned} P : \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x+2) = 5 \end{aligned}$$

- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x + 1}$

- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{5x - 2}}{4 - x}$

SIFAT LIMIT

Ketunggalan Limit :

Jika $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ dan $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = M$ maka $L = M$

Operasi aljabar pada Limit

Jika $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ dan $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ maka :

- $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = L - M = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow c} (f(x)g(x)) = LM = (\lim_{x \rightarrow c} f(x)) (\lim_{x \rightarrow c} g(x))$
- $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}, M = \lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$



LIMIT FUNGSI SEDERHANA

- $\lim_{x \rightarrow c} k = k$, k konstanta
- $\lim_{x \rightarrow c} x = c$
- $\lim_{x \rightarrow c} (px + q) = pc + q$; p, q konstanta
- $\lim_{x \rightarrow c} x^2 = c^2$
- $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$
- $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$

LIMIT SEPIHAK



Limit Kiri:

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L, \text{ adalah}$$

jika x mendekati c dari kiri ($x \rightarrow c^-$) maka $f(x)$ mendekati L



Limit Kanan:

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L, \text{ adalah}$$

jika x mendekati c dari kanan ($x \rightarrow c^+$) maka $f(x)$ mendekati L



TEOREMA

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$ dan $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$
maka $f(x)$ disebut mempunyai limit di titik $x = c$.

AKIBATNYA :

jika $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ maka tidak mempunyai limit di titik $x = c$

LATIHAN :



DEFINISI :

Fungsi $f(x)$ kontinu di titik $x = c$ jika

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$$

Akibatnya: jika salah satu syarat tidak dipenuhi maka $f(x)$ tidak kontinu / diskontinu.

Jika $f(x) = \begin{cases} 2 - x & , x < -3 \\ 5 & , -3 \leq x < 2 \\ x^2 - 2 & , x \geq 2 \end{cases}$

Tentukanlah:

- Gambar grafik $f(x)$.
- Apakah $f(x)$ mempunyai limit di titik $x = -3$
- Apakah $f(x)$ kontinu di titik $x = -3$
- Apakah $f(x)$ kontinu di titik $x = 2$



LATIHAN



• Jika $f(x) = \begin{cases} ax + 3b & , x < -2 \\ 10 & , -2 \leq x < 4 \\ 2ax + 5bx & , x \geq 4 \end{cases}$

Tentukanlah nilai a dan b sehingga fungsi $f(x)$ kontinu di semua titik.

• Jika $f(x) = \begin{cases} 3 + x & , -4 < x \leq -2 \\ (x + 1)^2 & , -2 < x < 4 \\ \sqrt{x} + 10 & , x \geq 4 \end{cases}$

Tentukanlah: a. Gambar grafik $f(x)$.

b. Apakah $f(x)$ kontinu di titik $x = -2$

c. Apakah $f(x)$ mempunyai limit di titik $x = 4$



LIMIT DI TAK HINGGA

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$, menyatakan

$f(x)$ membesar tanpa batas
bila x mendekati c

TEOREMA

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0, n \text{ bilangan asli.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0, n \text{ bilangan asli.}$$

LIMIT DI TAK HINGGA



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x + 5}{4x^2 + 5}$$

➤ P : Agar muncul bentuk $\frac{1}{x^n}$, maka harus dibagi pangkat terbesar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x + 5}{4x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(3 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} \right)}{x^2 \left(4 + \frac{5}{x^2} \right)} = \frac{3 + 0 + 0}{4 + 0} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x + 7}{3x^3 + 8x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(\frac{2}{x} + 5x + \frac{7}{x^3} \right)}{x^3 \left(3 + \frac{8}{x} + \frac{2}{x^3} \right)} = \frac{0 + 0 + 0}{3 + 0 + 0} = 0$$

Limit & Kekontinuan Fungsi



Latihan Soal Limit & Kontinu Fungsi

1. Tentukan Limit fungsi berikut :

▪ $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{2x+1} - 3}{x^2 - 16} \right)$

▪ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$

2. Tentukan konstanta a dan b agar fungsi berikut kontinu pada $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2+b}{x-2} & , x < 2 \\ 2 - 3x. & , x \geq 2 \end{cases}$$

3. Tentukan konstanta a dan b agar fungsi berikut kontinu pada $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax - b & , x < 1 \\ 3x. & , x = 1 \\ b x^2 - 1 & , x > 1 \end{cases}$$



BAB 4

DIFFERENSIAL

DEFINISI



- ❖ Misalkan fungsi $y = f(x)$ terdefinisi pada selang terbuka I yang memuat titik C .
- ❖ Turunan dari fungsi $y = f(x)$, ditulis $y' = f'(x)$, maka definisi turunan

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \text{ jika limit ada}$$

TABEL DIFERENSIAL DASAR



UNTUK FUNGSI EKSPLISIT $y = f(x)$

$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
a^x	$a^x \ln a$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\operatorname{Cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \cot x$

TEOREMA



Jika fungsi $f(x)$ dapat diturunkan di titik $x=c$ maka turunan/ diferensial kiri sama dengan turunan /diferensial kanan di titik $x=c$, sehingga berlaku

$$f'(c) \text{ ada jika } f'_-(c) = f'_+(c)$$

Persamaan Garis Singgung dan Garis Normal



- ❖ Persamaan garis singgung yang melalui (a,b) dengan gradient m adalah: $y - b = m(x - a)$
- ❖ Gradien persamaan garis singgung dikali dengan gradient persamaan garis normal = -1. Maka gradient garis normal adalah $-\frac{1}{m}$.
- ❖ Persamaan garis singgung yang melalui titik (a,b) adalah $y - b = -\frac{1}{m}(x - a)$

CONTOH SOAL



1. Jika $f(x) = \begin{cases} |2+x| & , x < -3 \\ 5x+4 & , -3 \leq x < 2 \\ x^2-2 & , x \geq 2 \end{cases}$

Tentukanlah:

- Gambar grafik $f(x)$.
- Apakah $f(x)$ dpt diturunkan di titik $x=2$
- Persamaan garis singgung & garis normal di $x=4$

Jawab:

b. $f'_-(x) = 5$, maka $f'_-(2) = 5$

$f'_+(x) = 2x$ maka $f'_+(2) = 2 \cdot 2 = 4$

Karena $f'_-(2) \neq f'_+(2)$ sehingga $f(x)$ tidak dapat diturunkan di $x=2$

CONTOH SOAL



❏ Di titik $x=4$, $f(x) = x^2 - 2$, maka $y = 4^2 - 2 = 14$
gradient garis singgung $= m = f'(4) = 2.4 = 8$

Persamaan garis singgung :

$$y - 14 = 8(x - 4)$$

$$y = 8x - 18$$

ATURAN DIFERENSIAL UNTUK FUNGSI EKSPLISIT



Jika $u = u(x)$ dan $v = v(x)$ masing-masing fungsi dalam variable bebas x maka berlaku :

❖ Jika $y = u \cdot v$ maka $y' = u'v + v'u$

❖ Jika $y = u \cdot v \cdot w$ maka $y' = u'v w + uv'w + u v w'$

❖ Jika $y = \frac{u}{v}$ maka $y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

❖ Aturan Rantai (diferensial untuk fungsi komposisi) :

$$\text{Jika } y = f(g(x)) \quad \text{maka} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{df} \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$$

ATURAN DIFERENSIAL UNTUK FUNGSI EKSPLISIT



Diferensial untuk Fungsi Parameter :

$$\text{jika } y = y(t) \text{ dan } x = x(t) \text{ maka } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$



Diferensial untuk fungsi Invers Trigonometri (contoh:
 $\text{arc sin } x = \sin^{-1}x$, $\text{arc cotg } x = \text{cotg}^{-1}x$)

Note : $y = \sin^{-1}x$ berarti $x = \sin y$

CONTOH SOAL



Tentukan $y' = \frac{dy}{dx}$ dari soal-soal berikut:

1. $y = 3x^{4/7} \sin x + \sqrt{5x^2 - 4x + 2}$

Jawab:

$$y' = \frac{12}{7} x^{-\frac{3}{7}} \sin x + 3x^{4/7} \cos x + \frac{1}{2} (5x^2 - 4x + 2)^{-\frac{1}{2}} (10x - 4)$$

2. $4y = \cot g 3x$

Jawab:

$$4y = \cot g 3x \rightarrow y = \frac{1}{4} \cot g 3x = \frac{1}{4} \frac{\cos 3x}{\sin 3x} \text{ (Gunakan } y = \frac{u}{v} \text{)}$$

$$y' = \frac{1}{4} \left(\frac{-3 \sin 3x \sin 3x - 3 \cos 3x \cos 3x}{\sin^2 3x} \right) = -\frac{3}{4} \left(\frac{\sin^2 3x + \cos^2 3x}{\sin^2 3x} \right) = -\frac{3}{4 \sin^2 3x} = -\frac{3}{4} \operatorname{cosec}^2 3x$$

CONTOH SOAL



$$3. \ y = e^{-4t+3}, x = \frac{3t}{\sqrt{7t+5}}$$

Jawab:

$$\frac{dy}{dt} = (-4)e^{-4t+3}$$

$$, \frac{dx}{dt} = \frac{3\sqrt{7t+5} - (3t)\left(\frac{1}{2}\right)(7t+5)^{-\frac{1}{2}}(7)}{(7t+5)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt}$$



Tentukan $y' = \frac{dy}{dx}$ dari soal-soal berikut:

1. $y = 3(\cos^2 \left(\sin \left(\sqrt[3]{\frac{2x^2+5}{3x+7}} \right) \right))$

2. $y = \tan^{-1}(3x)$

3. $y = 5 \sec^{-1}(\sqrt{2x+3})$

4. $y = \frac{-7x^{2/3} \ln(8x+x^2+3)}{\sin^3(4x)}$

DIFERENSIAL UNTUK FUNGSI IMPLISIT



❖ Bentuk umum Fungsi Implisit adalah :

$$F(x, y) = 0, \text{ dimana } y = y(x)$$

❖ Masalah :

Menentukan $\frac{dy}{dx}$ dengan menggunakan diferensial fungsi yaitu diferensial total sebagai berikut:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} dy = - \frac{\partial F}{\partial x} dx$$

$$\text{maka } \frac{dy}{dx} = - \frac{\partial F}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial y}$$

CONTOH SOAL



Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari soal di bawah ini (fungsi implisit) :

$$x^3y + \tan(3x + 4y) = \frac{2}{y}$$

Jawab: $x^3y + \tan(3x + 4y) - \frac{2}{y} = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2y + 3 \sec^2(3x + 4y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^3 + 4 \sec^2(3x + 4y) - 2 \ln y$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{3x^2y + 3 \sec^2(3x + 4y)}{x^3 + 4 \sec^2(3x + 4y) - 2 \ln y}$$

LATIHAN SOAL



Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari soal berikut (Fungsi Implisit) :

1. $\sin x^2 - \frac{4y}{\sqrt{3x^2+4}} + 5x = 2$

2. $3x = \tan^{-1}(3x + 4y)$

3. $y = \frac{\ln(8xy^2+3)}{\sin^2(4x)}$



BAB 5

APLIKASI DIFFERENSIAL



APLIKASI DIFERENSIAL 1: TEOREMA L' HOSPITAL

Digunakan untuk menyelesaikan nilai limit yang berbentuk $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ jika mempunyai bentuk $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$ maka

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dan berhenti sampai didapat bentuk limit tidak berbentuk $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$ atau mempunyai nilai real

LATIHAN SOAL



Tentukan nilai limit berikut dengan aplikasi diferensial :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{\sin 2x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{3x} + 5e^x + 7}{9e^{3x} + 4e^{2x} + 1}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right]$

PERLUASAN TEOREMA L'HOPITAL : MENENTUKAN NILAI LIMIT BENTUK $0^0, 1^\infty, \infty^0$



Untuk menyelesaikan nilai limit bentuk $0^0, 1^\infty, \infty^0$:

Gunakanlah definisi $x = e^{\ln x}$

LATIHAN SOAL :

Tentukan nilai limit berikut :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x^2)^{3x}$ (berbentuk 0^0)
2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x-3}{3x+7} \right)^{\frac{1}{5x}}$
4. $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x)^{x-1}$



APLIKASI DIFERENSIAL 2: **MENGGAMBAR GRAFIK DI R2**

LANGKAH MENGGAMBAR GRAFIK FUNGSI DENGAN DIFERENSIAL :

1. Menentukan titik kritis(stasioner) dari $f(x)$ ---- dari $\frac{df}{dx} = 0$
2. Menentukan kemonotonan fungsi
3. Menentukan Ekstrim fungsi
4. Menentukan kecekungan fungsi
5. Menentukan titik belok
6. Data tambahan : menentukan titik potong dengan sumbu y --- dari $f(0)$
7. Membuat sketsa grafik fungsi

KEMONOTONAN FUNGSI



DEFINISI :

Jika $f(x)$ didefinisikan pada selang I , dikatakan bahwa :

1. $f(x)$ *monoto naik (naik)* pada I apabila $f(x_1) < f(x_2)$ untuk setiap x_1, x_2 di I yang memenuhi $x_1 < x_2$
2. $f(x)$ *monoto turun (turun)* pada I apabila $f(x_1) > f(x_2)$ untuk setiap x_1, x_2 di I yang memenuhi $x_1 < x_2$

TEOREMA KEMONOTONAN : (digunakan untuk menyelesaikan soal)

Jika $f(x)$ kontinu pada selang I dan terdiferensial pada setiap titik dalam I . Maka :

1. $f(x)$ naik pada I apabila $f'(x) > 0$
2. $f(x)$ turun pada I apabila $f'(x) < 0$



DEFINISI :

Jika $f(x)$ suatu fungsi. $S = \text{domain } f(x)$ dan c suatu titik dalam pada S . Dikatakan bahwa :

1. $f(c)$ *nilai Maksimum* $f(x)$ pada S apabila $f(c) \geq f(x)$ untuk setiap x anggota S
2. $f(c)$ *nilai Minimum* $f(x)$ pada S apabila $f(c) \leq f(x)$ untuk setiap x anggota S
3. $f(c)$ *nilai Ekstrim* $f(x)$ pada S apabila $f(c)$ nilai maksimum atau minimum $f(x)$ pada S

TEOREMA (TITIK STASIONER) : (digunakan untuk menyelesaikan soal)

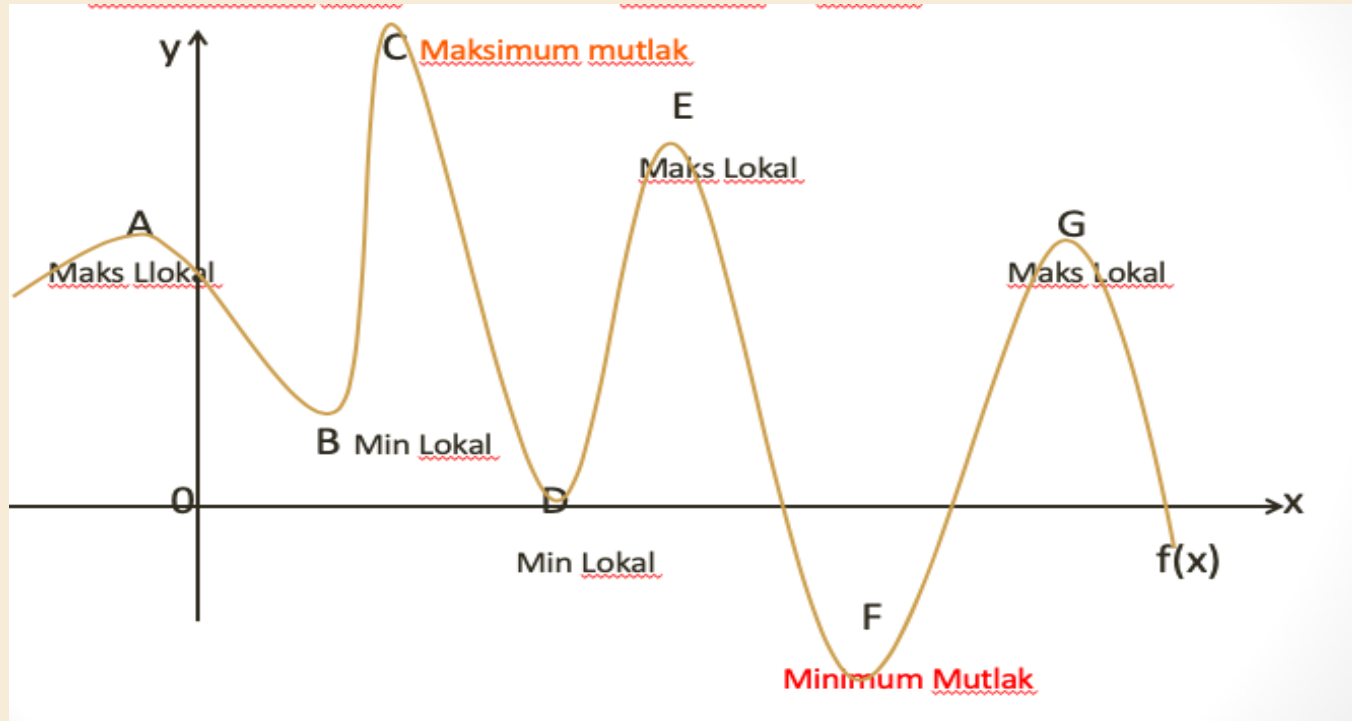
Misalkan f kontinu pada selang I dan c titik pada I . Jika $f(c)$ nilai ekstrim f pada I maka salah satu yang berikut berlaku :

1. c titik ujung I
2. $f'(c) = 0$ (c titik stasioner/kritis f)
3. $f'(c)$ tidak ada (c titik singular)

EKSTRIM FUNGSI



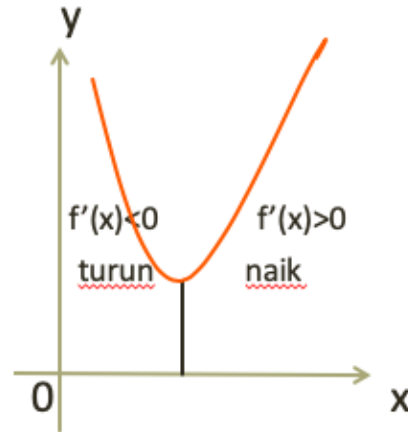
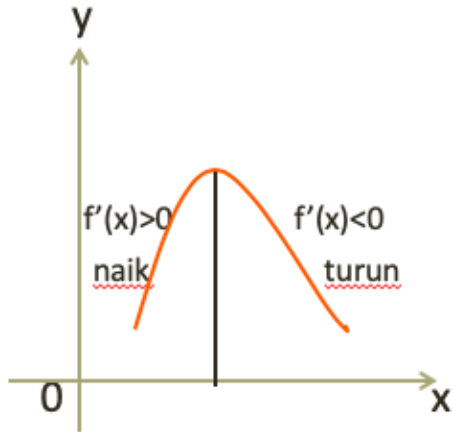
Maksimum dan Minimum Mutlak dan Lokal





TEOREMA (UJI TURUNAN PERTAMA UNTUK EKSTRIM FUNGSI)

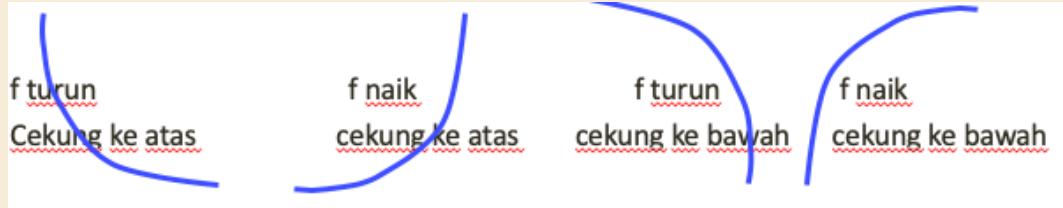
1. $f(x)$ mencapai maksimum (lokal) di $x = c$ apabila tanda dari $f'(x)$ di $x=c$ berubah dari positif ke negatif
2. $f(x)$ mencapai minimum (lokal) di $x = c$ apabila tanda dari $f'(x)$ di $x=c$ berubah dari negatif ke positif



KECEKUNGAN FUNGSI



DEFINISI (Kecekungan)



TEOREMA KECEKUNGAN

Jika $f(x)$ terdiferensial dua kali pada selang I , maka (grafik) :

1. f cekung ke atas pada I jika $f''(x) > 0$ pada selang I
2. f cekung ke bawah pada I jika $f''(x) < 0$ pada selang I

DEFINISI (Titik Belok)

Titik dimana tanda $f''(x)$ berganti disebut Titik Belok atau dimana terjadi perubahan kecekungan

LATIHAN SOAL



Tentukan sketsa grafik fungsi $f(x)$ dengan menggunakan kemonotonan dan kecekungan fungsi

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$

2. $f(x) = x^4 - 2x^2$

3. $f(x) = -2x^3 + 3x^2$

4. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

5.3 MASALAH MAKSIMUM DAN MINIMUM



Menyelesaikan permasalahan kejadian sehari-hari atau masalah geometri yang perumusannya menggunakan ektrim mutlak suatu fungsi kontinu, dimana:

Maksimum jika $f'' < 0$

minimum jika $f'' > 0$



APLIKASI DIFERENSIAL 3: MASALAH MAKSIMUM & MINIMUM (EKSTRIM) FUNGSI UNTUK MASALAH NYATA

Uji Turunan kedua untuk ekstrim fungsi :

Untuk menyelesaikan permasalahan sehari-hari atau masalah dari bidang geometri yang perumusannya menggunakan ekstrim (maksimum dan minimum) mutlak suatu fungsi yang kontinu (mempunyai turunan fungsi), maka

Akan mencapai Maksimum (mutlak) jika $f'' < 0$

Akan mencapai Minimum (mutlak) jika $f'' > 0$

CONTOH SOAL



1. Akan dibuat sebuah reservoir dari bahan fiber berbentuk kotak dengan panjang = 2 tinggi. Bak sampah yang dibuat berkapasitas 1200 liter. Jika biaya pembuatan alas adalah $\frac{1}{6}$ biaya pembuatan sisi tegak. Tentukan ukuran reservoir tsb sehingga biaya pembuatannya seminIMal mungkin.
2. Dari selembarnya karton 120 cm persegi akan dibuat silinder tertutup . Tentukan ukuran silinder yang dapat dibuat sehingga volumenya maksimum.



BAB 6

INTEGRAL TAK TENTU

INTEGRAL TAK TENTU



DEFINISI :

Jika $f(x)$ fungsi yang kontinu dan terdiferensial. Integral (anti turunan) tak tentu dari fungsi $f(x)$ dituliskan :

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Dimana C = konstanta pengintegralan dan $F'(x) = f(x)$

SIFAT LINIER INTEGRAL TAK TENTU :

1. $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
2. $\int (k f(x)) dx = k \int f(x) dx$

FUNGSI DASAR INTEGRAL



Jika $f(x)$ Fungsi yang kontinu dan mempunyai turunan maka integral dari fungsi $f(x)$ sebagai berikut :

$f(x)$	$\int f(x) dx$
<u>k</u> , konstanta	<u>kx</u>
<u>xⁿ</u>	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$
<u>e^x</u>	<u>e^x</u>
Sin x	<u>-cos x</u>
Cos x	Sin x
$a^x, a \neq 0, 1$	$\frac{a^x}{\ln a}$
Sec ² x	<u>tg x</u>
Csc ² x	<u>-ctg x</u>
<u>sec x</u> <u>tg x</u>	<u>sec x</u>
<u>csc x</u> <u>ctg x</u>	<u>- ctg x</u>

METODA INTEGRASI DASAR 1 : METODA SUBSTITUSI



1. Metoda Substitusi

$\int f(x) dx$ dengan substitusi $u = u(x)$ dan integral menjadi $\int f(u) du$ yang dapat diselesaikan.

Contoh :

1. $\int \sin(4x) dx$ 4. $\int 4x \cos(2x^2 + 1) dx$

2. $\int \sin x e^{2\cos x} dx$ 5. $\int 2x^2 \sqrt[3]{9x^3 - 1} dx$

3. $\int (2x + 1) \sec^2(x^2 + x) dx$ 6. $\int \left(x^{\frac{5}{2}} - \frac{\cos 2x}{(1 + \sin 2x)} \right) dx$

METODA INTEGRASI DASAR 2 : INTEGRAL PARSIAL



Jika $u = u(x)$ dan $v = v(x)$ maka dari aturan diferensial

$$\frac{d}{dx}(uv) = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx} \longrightarrow u \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(uv) - v \frac{du}{dx}$$

Untuk masing-masing ruas diintegralkan terhadap variable x didapat :

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

Rumus Integral Parsial

LATIHAN : Tentukan Integral Tak Tentu berikut

1. $\int (2x - 1) \sin 4x \, dx$
2. $\int x^2 e^{3x} \, dx$
3. $\int (5x + 1) \ln x \, dx$
4. $\int e^{2x} \cos x \, dx$
5. $\int 3x \ln(4x - 1) \, dx$
6. $\int (7x - 2) \cos 3x \, dx$
7. $\int x \ln(8x - 5) \, dx$
8. $\int 2x \operatorname{tg}^{-1} x \, dx$

RUMUS- RUMUS INTEGRAL



- $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C$
- $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$
- $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$
- $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C, \quad \int \csc x \, dx = \ln |\csc x + \cot x| + C$$

$$\int \sec^n x \, dx = \frac{1}{n-1} (\sec^{n-2} x \tan x + (n-2) \int \sec^{n-2} x \, dx) + C$$

$$\int \csc^n x \, dx = \frac{1}{n-1} (-\csc^{n-2} x \cot x + (n-2) \int \csc^{n-2} x \, dx) + C$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$



TERIMA KASIH