

The background is dark grey with various physics-related illustrations in yellow and white. These include a lightbulb, a pencil, a ruler, a 3D cube, a magnifying glass, a chemical structure, a globe, a Bohr-style atomic model, and several mathematical formulas such as $v^1 = v_0^1 + at$, $S = \frac{1}{2}(v_0^1 + v^1)t$, $v^2 = v_0^2 + 2at$, Δt if t is, $dp = d(mv)$, and $F = ma$ (Constant).

BUKU AJAR FISIKA MEKANIKA UNTUK UNIVERSITAS

Penulis :
Listiana Satiawati
Yusraida Khaerani Dalimunthe
Pauhesti



BUKU AJAR

FISIKA MEKANIKA UNTUK UNIVERSITAS

Penulis :

Listiana Satiawati
Yusraida Khaerani Dalimunthe
Pauhesti



Penerbit Buku Sonpedia

BUKU AJAR FISIKA MEKANIKA UNTUK UNIVERSITAS

Penulis :

Listiana Satiawati
Yusraida Khaerani Dalimunthe
Pauhesti

ISBN : 978-634-265-156-8

Editor :

Efitra

Penyunting :

Nur Safitri
Nurzatul Dihniah

Desain Sampul dan Tata Letak :

Raihan Aulia Arisdestama

Penerbit :

Penerbit Buku Sonpedia

Redaksi :

Jl. Premix No. 07 Kenali Asam Bawah Kota Baru
Kota Jambi 36129 Tel +6282177858344

Email: penerbitbukusonpedia@gmail.com

Website: www.buku.sonpedia.com

Anggota IKAPI : 006/JBI/2023

Cetakan Pertama, Desember 2025

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk dan
dengan cara Apapun tanpa izin dari penerbit.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga monograf yang berjudul ***“BUKU AJAR FISIKA MEKANIKA UNTUK UNIVERSITAS”***. Tidak lupa kami ucapkan terima kasih bagi semua pihak yang telah membantu dalam penulisan dan penerbitan buku ini.

Penulisan buku ini kami maksudkan untuk membantu para mahasiswa dalam memahami materi kuliah Fisika Dasar bagian Mekanika beserta soal dan jawaban dan juga diharapkan dapat dipergunakan untuk para dosen yang mengajar mata kuliah mata kuliah tersebut. Tujuannya untuk dapat membantu mahasiswa menyelesaikan jawaban dari soal-soal yang diberikan.

Selama proses penyuntingan sampai selesai penyusunan buku ini kami mengucapkan banyak terima kasih kepada pimpinan Universitas Trisakti yang telah memberikan fasilitas dan kesempatan kepada kami untuk menyusun buku ajar ini. Juga kepada pimpinan prodi Teknik Perminyakan FTKE dan semua rekan dosen, tenaga pendidik yang telah membantu dan memberikan semangat kepada kami selama penulisan buku ini kami juga mengucapkan terima kasih. Kemudian rasa syukur kami ucapkan kepada seluruh keluarga kami yang selalu memberikan dorongan dan suasana yang bahagia didalam kehidupan kami.

Akhir kata kami selaku penulis mengharapkan agar buku ini bisa bermanfaat bagi dunia pendidikan di negeri tercinta Indonesia.

, Desember 2025

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	ii
DAFTAR ISI	iii
BAGIAN 1 BESARAN DAN VEKTOR.....	1
A. VEKTOR	7
B. PENJUMLAHAN VEKTOR	7
C. KOMPONEN-KOMPONEN VEKTOR	8
D. VEKTOR SATUAN	9
E. PERKALIAN PADA VEKTOR	10
BAGIAN 2 KINEMATIKA.....	14
BAGIAN 3 DINAMIKA.....	35
BAGIAN 4 USAHA, ENERGI, IMPULS DAN MOMENTUM	54
A. HUKUM KEKEKALAN ENERGI MEKANIK.....	56
BAGIAN 5 GERAK MELINGKAR	70
A. MACAM GERAK MELINGKAR	72
BAGIAN 6 GERAK ROTASI BENDA TEGAR (<i>RIGID BODY</i>)	82
A. KESETIMBANGAN	99
B. GAYA GRAVITASI	105
BAGIAN 7 MEKANIKA FLUIDA	109
A. KETERPUNGAN (<i>BUOYANCY</i>)	113
B. PRINSIP ARCHIMEDES.....	114
C. TEGANGAN PERMUKAAN (<i>SURFACE TENSION</i>)	114
D. KAPILARITAS (<i>CAPILLARITY</i>)	115
E. ALIRAN FLUIDA	116
F. PERSAMAAN KONTINUITAS (<i>CONTINUITY EQUATION</i>).....	116

G.	PERSAMAAN BERNOULLI (<i>BERNOULLI'S EQUATION</i>)	117
H.	VISKOSITAS (VISCOSITY).....	118
I.	ANALISA DIMENSI	121
J.	RUGI-RUGI	129
DAFTAR PUSTAKA.....		140
TENTANG PENULIS		141

BAGIAN 1 BESARAN DAN VEKTOR

- A. Besaran adalah suatu keadaan atau sifat yang dapat diukur dari suatu benda.
- B. Besaran pokok adalah besaran yang tidak dapat diturunkan dari besaran-besaran lain, besaran pokok terdiri dari besaran dasar dan besaran tambahan
- C. Besaran Jabaran atau besaran turunan adalah besaran yang dapat diturunkan dari besaran-besaran lain
- D. Setiap persamaan harus mempunyai kekonsistensian dimensi, dua besaran dapat dijumlahkan hanya jika besaran-besaran tersebut mempunyai satuan yang sama.

Besaran dibagi 2 yaitu besaran skalar dan besaran vektor

1. Besaran skalar dan besaran vector

Besaran skalar adalah besaran yang mempunyai besar/ nilai tidak mempunyai arah. Misal: panjang (l), masa (m), waktu (t), luas (A), volume (V), laju (v), usaha (W), daya (P),

Besaran vektor adalah besaran yang mempunyai besar/ nilai dan mempunyai arah Misal: kecepatan \mathbf{v} , percepatan \mathbf{a} , gaya \mathbf{F} , momentum \mathbf{p} , energi E , ...

2. Awalan satuan

Awalan satuan merupakan kelipatan dari 10 atau $\frac{1}{10}$ dari satuan dasarnya:

Awalan satuan panjang

- 1 meter = 1 m
- 1 nano meter = 1 nm = 10^{-9} m
- 1 mikro meter = 1 μ m = 10^{-6} m
- 1 mili meter = 1 mm = 10^{-3} m
- 1 centi meter = 1 cm = 10^{-2} m
- 1 kilo meter = 1 km = 10^3 m

Awalan satuan masa

- 1 kilo garam = 1 kg
- 1 gram = 1 g = 10^{-3} kg
- 1 mikro gram = 1 μ g = 10^{-6} g = 10^{-9} kg
- 1 mili gram = 1 mg = 10^{-3} g = 10^{-6} kg

Awalan satuan waktu

- 1 sekon = 1 s
- 1 nano sekon = 1 ns = 10^{-9} s
- 1 mikro sekon = 1 μ s = 10^{-6} s
- 1 mili sekon = 1 ms = 10^{-3} s.

3. Sistem satuan

- Sistim Internasional (SI)

Metrik Dinamis Besar (meter, kilogram, sekon) atau MKS

Metrik Dinamis Kecil (centimeter, gram, sekon) atau cgs

- Sistim Keteknikan Inggris (British)

Misal panjang: ft, yard, mile

masa: lb

waktu: sekon

Contoh soal

Diketahui:

1 inci = 2,54 cm

1 km = 1000 m

1 jam = 3600 detik

- Kelajuan 1242 km/jam, nyatakan dalam meter/sekon (m/s)

$$v = 1242 \frac{\text{km}}{\text{jam}} = \frac{1242 \times 1000 \text{ m}}{3600 \text{ detik}} = 345 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- Volume 1,84 inci kubik, nyatakan dalam meter kubik

$$V = 1,84 \text{ in}^3 = 1,84 \times (2,54 \text{ cm})^3 = 30,15 \text{ cm}^3 = 30,15 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

4. Dimensi

Semua besaran dalam mekanika dapat dinyatakan dalam 3 besaran pokok yaitu : panjang, massa dan waktu. Pernyataan matematis suatu besaran dalam besaran besaran pokok dinamakan dimensi. Dimensi dari massa adalah [M], panjang [L] dan waktu [T]. Cara ini disebut analisa dimensi, gunanya untuk mengetahui hubungan antara besaran besaran fisika.

5. Besaran

Besaran Dasar Sistim Internasional (SI)

No	Besaran	Satuan Dasar	Singkatan	Dimensi
1	Panjang (s / l)	Meter	M	L
2	Waktu (t)	Sekon	s	T
3	Masa (m)	Kilogram	Kg	M

No	Besaran	Satuan Dasar	Singkatan	Dimensi
4	Arus Listrik (i)	Ampere	A	I
5	Temperatur (T)	Kelvin	K	O
6	Jumlah Zat (M)	Mol	Mol	Mol
7	Intensitas Cahaya (I)	Candela	Cd	CD

Besaran Tambahan

No	Besaran	Satuan Dasar	Singkatan	Dimensi
1	Sudut Ruang	Steradian	sr	-
2	Sudut Datar	Radian	rad	-

6. Besaran Jabaran

Besaran jabaran atau besaran turunan adalah besaran yang dapat diturunkan dari besaran-besaran lain, yang dapat di definisikan dari tujuh besaran dasar / pokok terutama dalam bidang mekanika

Misal:

Kecepatan: lintasan/panjang dibagi waktu

Rumus: $v = l / t$

Satuan: meter / detik = m/t

Dimensi: $M/L = ML^{-1}$

N o	Besaran	Rumus	Satuan	Singkatan	Dimensi
1	Kecepatan (v)	$v = \frac{l}{t}$	$\frac{\text{meter}}{\text{detik}}$	m/s	LT^{-1}
2	Percepatan (a)	$a = \frac{l}{t^2}$			
3	Gaya (F)	$F = m \cdot a$	Newto = kilogram $\frac{\text{meter}}{\text{detik}^2}$	$N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$	MLT^{-2}
4	Usaha (w)	$W = F \cdot l$ $= F \cdot s$	Joule = Newton meter	$J = Nm$	ML^2T^{-2}
5	Impuls (I)	$I = F \cdot \Delta T$	Newton detik	Ns	MLT^{-1}
6	Momentum (p)	$p = mv$	kilogram $\frac{\text{meter}}{\text{detik}}$	$kg \frac{m}{s}$	MLT^{-1}
7	Daya (P)	$P = \frac{w}{t}$	Watt = $\frac{\text{Joule}}{\text{detik}}$	$W = \frac{J}{t}$	ML^2T^{-3}
8	Energi Kinetik (Ek)	$Ek = \frac{1}{2}mv^2$	Joule = kilogram $\frac{\text{meter}^2}{\text{detik}^2}$	$J = kg \frac{m^2}{s^2}$	ML^2T^{-2}
9	Energi Potensial (Ep)	$Ep = mgh$	Joule = kilogram $\frac{\text{meter}}{\text{detik}^2}$ meter	$J = kg \frac{m}{s^2} m$	ML^2T^{-2}
10	Energi Potensial Pegas (Ep')	$Ep' = \frac{1}{2}kx^2$	Joule = $\frac{\text{Newton}}{\text{meter}}$ meter ²	$J = \frac{N}{m} m^2$	ML^2T^{-2}

Keterangan:

k = Konstanta pegas [N/m]

N = Newton

m = meter

7. Tambahan awalan satuan

10^{-24} = yokto

10^{-21} = zepto

10^{-18} = atto

10^{-15} = femto

10^{-12} = pico

10^{-9} = nano

10^{-6} = micro

10^{-3} = mili

10^{-2} = centi

10^{-1} = deci

10^0 = -

10^1 = deka

10^2 = hekto

10^3 = kilo

10^6 = mega

10^9 = giga

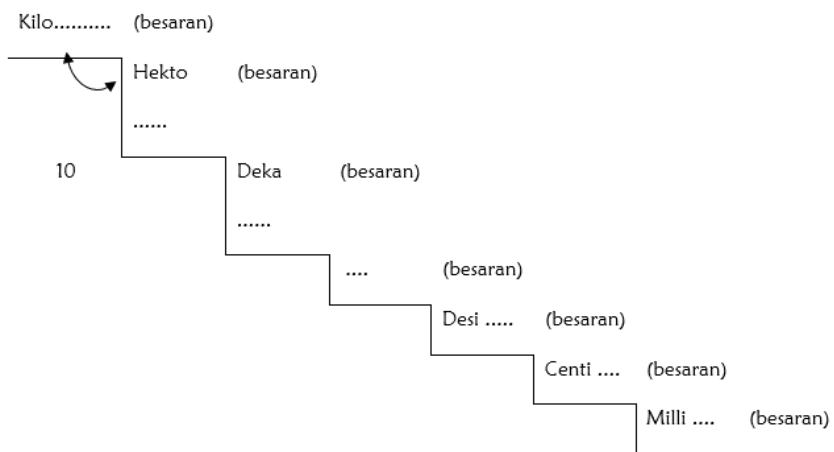
10^{12} = tera

10^{15} = peta

10^{18} = exa

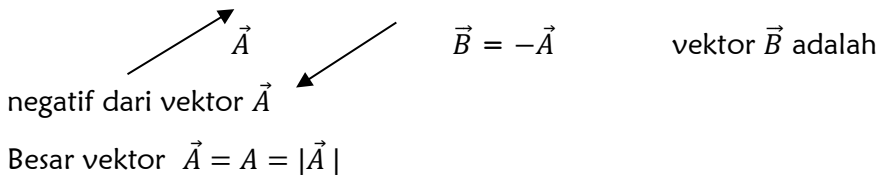
10^{21} = zetta

10^{24} = yotta



A. VEKTOR

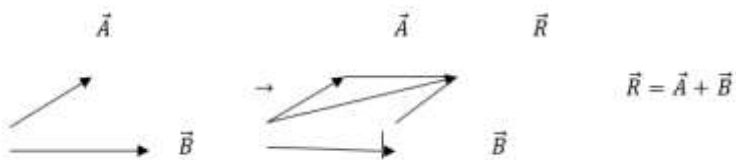
vektor dinyatakan dengan huruf dengan tanda panah di atasnya, kecepatan \vec{v} , momentum $m\vec{v} = \vec{p}$, gaya \vec{F} dll. Menggambarkan suatu vektor dengan garis dengan kepala panah pada ujungnya, panjang garis menyatakan besar vector dan arah panah menunjukkan arah vektor.



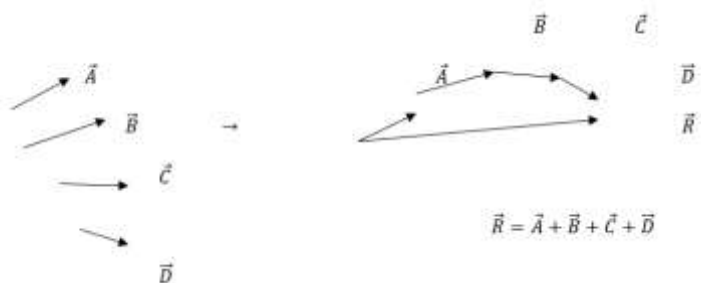
B. PENJUMLAHAN VEKTOR

Secara grafis dapat dilakukan dengan metode jajaran genjang dan polygon

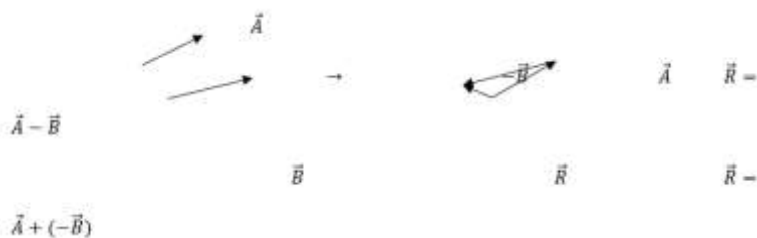
a. jajaran genjang



b. polygon

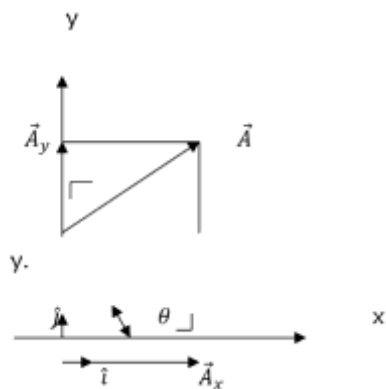


Selisih dua vektor ($\vec{A} - \vec{B}$) dapat diperoleh dengan menjumlahkan \vec{A} dengan $-\vec{B}$



C. KOMPONEN-KOMPONEN VEKTOR

Dengan menggunakan sumbu sistem koordinat kartesian:



vektor \vec{A} digambarkan mulai dari titik (0,0)

\vec{A}_x adalah komponen vektor \vec{A} pada sumbu x

\vec{A}_y adalah komponen vektor \vec{A} pada sumbu

$$\sin \theta = \frac{A_y}{A} \rightarrow A_y = A \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{A_x}{A} \rightarrow A_x = A \cos \theta$$

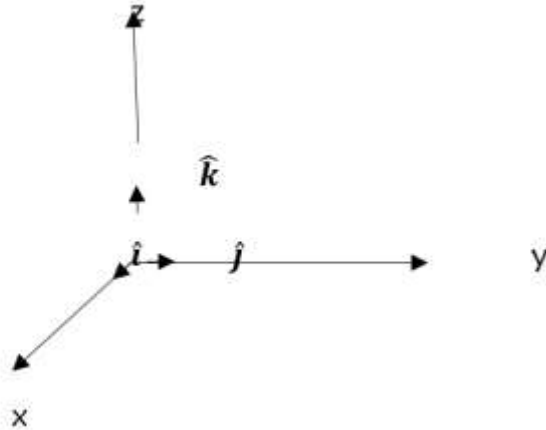
$$\tan \theta = \frac{A_y}{A_x} \rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{A_y}{A_x} = \arctan \frac{A_y}{A_x}$$

Sudut θ besarnya dari $0^\circ - 360^\circ$. θ merupakan arah dari vektor \vec{A} terhadap sumbu x positif. Sedangkan besar dari vektor \vec{A} didapat dari theorema Pythagoras:

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

D. VEKTOR SATUAN

Vektor yang memiliki besar 1 dan arahnya menunjukkan arah dari sumbu koordinat dalam suatu bidang atau ruang dan biasanya dinyatakan dengan \hat{i} dan \hat{j} untuk bidang dan \hat{i}, \hat{j} dan \hat{k} untuk ruang (lihat gambar dibawah).



\hat{i} adalah vektor satuan dari sumbu x besarnya adalah 1

\hat{j} adalah vektor satuan dari sumbu y besarnya adalah 1

\hat{k} adalah vektor satuan dari sumbu z besarnya adalah 1

Contoh soal : Diberikan 2 perpindahan $\vec{D} = (6\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})$ meter dan $\vec{E} = (4\hat{i} - 5\hat{j} + 8\hat{k})$ meter. Tentukan besar perpindahan $\vec{F} = 2\vec{D} - \vec{E}$.

$$\vec{F} = 2 \times (6\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) - (4\hat{i} - 5\hat{j} + 8\hat{k})$$

$$\vec{F} = 12\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k} - 4\hat{i} + 5\hat{j} - 8\hat{k}$$

$$\vec{F} = 8\hat{i} + 11\hat{j} - 10\hat{k}$$

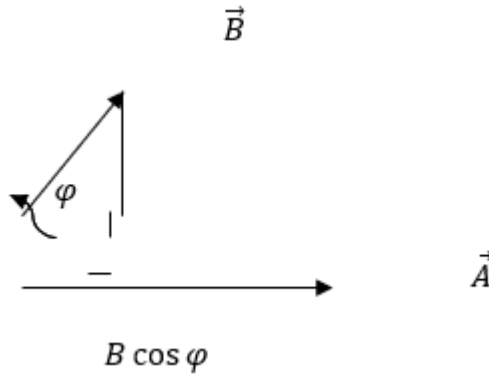
E. PERKALIAN PADA VEKTOR

- Perkalian skalar dari dua vektor \vec{A} dan \vec{B} dinyatakan dengan $\vec{A} \cdot \vec{B}$ disebut juga perkalian titik, hasilnya adalah besaran skalar.
- Perkalian vektor dari dua vektor \vec{A} dan \vec{B} dinyatakan dengan $\vec{A} \times \vec{B}$ disebut juga perkalian silang, hasilnya adalah besaran vektor.

Perkalian skalar / perkalian dot:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \varphi = AB \cos \varphi$$

φ adalah sudut antara \vec{A} dan \vec{B}



Perkalian skalar \vec{A} dan \vec{B} adalah besar \vec{A} dikalikan dengan komponen \vec{B} yang sejajar \vec{A}

$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \varphi$, atau besar \vec{B} dikalikan komponen \vec{A} yang sejajar \vec{B} . $\vec{B} \cdot \vec{A} = |\vec{B}| |\vec{A}| \cos \varphi$.

Maka $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ hukum komutatif perkalian.

Atau dengan vektor satuan, dengan ketentuan :

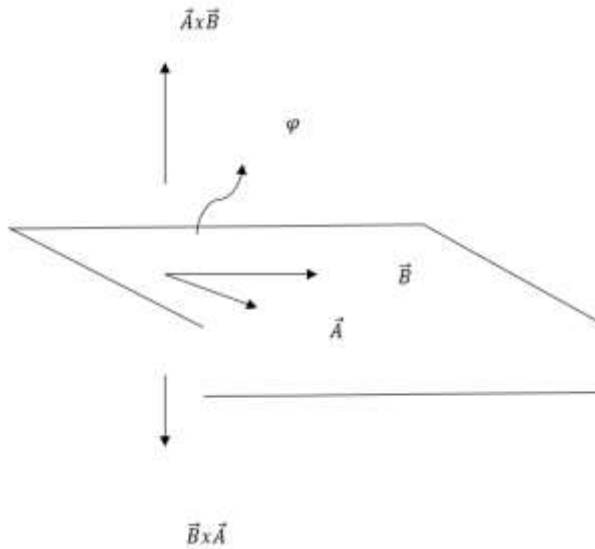
$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = (1)(1) \cos 0^\circ = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = \hat{k} \cdot \hat{j} = (1)(1) \cos 90^\circ = 0.$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

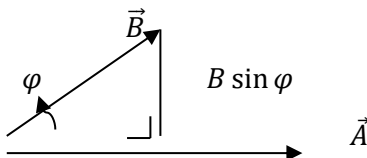
Perkalian vector / perkalian cross

Perkalian vektor \vec{A} dan $\vec{B} = \vec{A} \times \vec{B}$, adalah suatu besaran vektor yang memiliki arah tegak lurus terhadap bidang tempat kedua vektor yang dikalikan berada, dan besarnya sama dengan $|\vec{A}| |\vec{B}| \sin \varphi = AB \sin \varphi$.



$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ artinya perkalian vektor bersifat anti komutatif.

Besarnya sama dengan besar \vec{A} dikalikan dengan komponen \vec{B} yang tegak lurus \vec{A}



Atau dengan vektor satuan, dengan ketentuan:

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = (1)(1) \sin 0 = 0$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = -\hat{j} \times \hat{i} = (1)(1) \sin 90^\circ \hat{k} = \hat{k}$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = -\hat{k} \times \hat{j} = (1)(1) \sin 90^\circ \hat{i} = \hat{i}$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = -\hat{i} \times \hat{k} = (1)(1) \sin 90^\circ \hat{j} = \hat{j}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{A} \times \vec{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\
 &= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - B_x A_z) \hat{j} \\
 &\quad + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}
 \end{aligned}$$

Atau dengan derterminan:

$$\begin{aligned}
 \vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\
 &= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - B_x A_z) \hat{j} \\
 &\quad + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}
 \end{aligned}$$

Soal 1. Potensial vektor dalam suatu daerah dinyatakan oleh persamaan

$$\vec{A} = x^2 y z \hat{i} + 3 x y z^3 \hat{j} - (x^2 - z^2) \hat{k}$$

Tentukan medan magnet \vec{B} yang menghasilkan potensial vektor tersebut.

$$\vec{B} = (\vec{\nabla} \times \vec{A}).$$

Soal 2. Berapakah sudut yang dibentuk oleh 2 buah gaya masing-masing

$$\vec{F}_1 = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k} \text{ dan } \vec{F}_2 = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}.$$

BAGIAN 2

KINEMATIKA

Cabang mekanika yang mempelajari sifat gerakan benda tanpa meninjau penyebab dari gerakan tersebut disebut kinematika.

Ketika benda bergerak di sepanjang garis lurus, posisinya dinyatakan terhadap titik asal 0 dengan menggunakan koordinat x .

Kecepatan rata-rata partikel selama selang waktu delta t didefinisikan sebagai:

$$v_{rr} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \left[\frac{m}{s} \right]$$

Kecepatan sesaat pada setiap waktu t didefinisikan sebagai:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \left[\frac{m}{s} \right]$$

Percepatan rata-rata partikel selama selang waktu delta t didefinisikan sebagai:

$$a_{rr} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

Percepatan sesaat pada setiap waktu t didefinisikan sebagai:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

Gerak lurus (GL)

- Gerak lurus beraturan (GLB), percepatan $= a = 0$ sehingga kecepatan konstan
 $s = x = vt$
 $s = x$ adalah lintasan
 v adalah kecepatan

t adalah waktu

- Gerak lurus berubah beraturan (GLBB), percepatan $\neq 0$,
percepatan positif gerak dipercepat dan percepatan negatif
gerak diperlambat
 - GLBB dengan percepatan konstan
 - GLBB dengan percepatan tidak konstan.

Gerak lurus berubah beraturan (GLBB) dengan percepatan konstan

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$dv = a dt$$

Diintegrasikan

$$v = \int dv = \int a dt = at + c_1$$

c_1 adalah konstanta yang harganya didapat dari syarat batas, misal untuk $t = 0$ s, maka $v = v_0$

$$v = at + c_1, t = 0 \rightarrow v = v_0 \rightarrow c_1 = v_0$$

$$v = at + v_0 \quad (1)$$

Sedangkan

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$dx = v dt$$

Diintegrasikan

$$x = \int dx = \int v dt$$

$$x = \int at + v_0 dt = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \quad (2)$$

Substitusi persamaan (1) dan (2) dengan mengeliminasi t didapatkan:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

- Fungsi waktu $a = f(t) = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = a dt = f(t)dt$

$$v = \int f(t) dt$$

- Fungsi posisi $a = f(x) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v \rightarrow v dv = f(x)dx$

$$\int v dv = \int f(x)dx$$

$$\frac{1}{2} v^2 = \int f(x)dx$$

Pada benda jatuh yang merupakan GLBB dipercepat, mempunyai percepatan yang tetap yaitu percepatan gravitasi bumi $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ atau $g = 10 \text{ m/s}^2$. x menjadi y atau h dengan posisi awal y_0 .

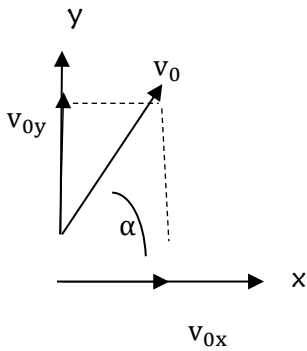
Persamaan menjadi

$$v = gt + v_0$$

$$y = h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$$

Gerak peluru / parabola

- Gerak benda dengan lintasan parabola
- Arah gerak horizontal adalah GLB karena tidak dipengaruhi percepatan gravitasi g
- Arah gerak vertikal adalah GLBB keatas diperlambat ke bawah dipercepat
- Kecepatan awal di proyeksikan ke arah sumbu x dan y



Dengan trigonometri didapatkan proyeksi dari kecepatan awal

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha$$

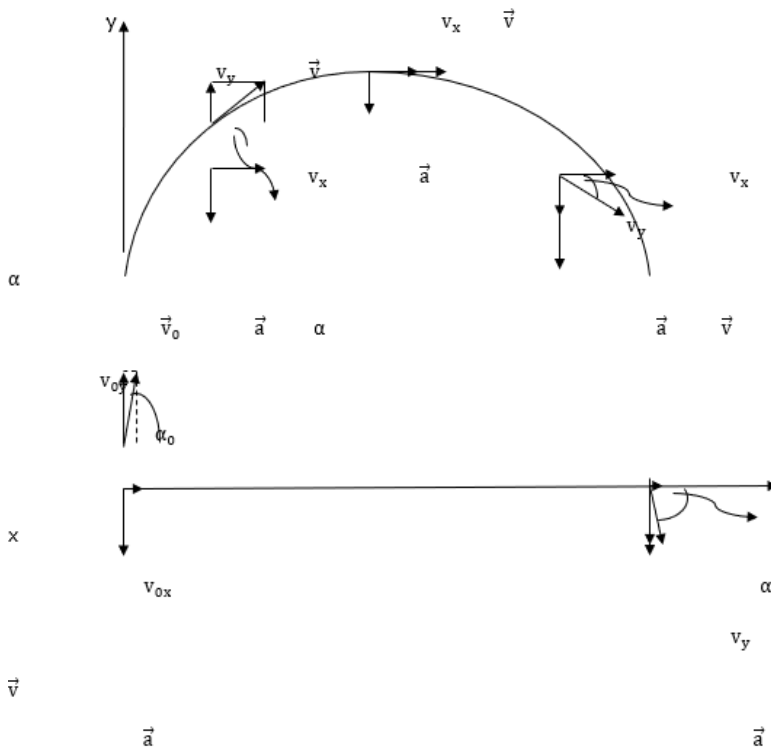
Rumus-rumus

- Arah vertical (sumbu y) $v_y = v_0 \sin \alpha$

$$y = h = v_0 \sin \alpha t \pm \frac{1}{2} g t^2$$

- Arah horizontal (sumbu x) $v_x = v_0 \cos \alpha$

$$x = s = v_0 \cos \alpha t$$



Gambar 2.1 Gerak peluru/ Gerak parabola

Persamaan yang bisa diturunkan dari persamaan diatas

r = jarak peluru dari pusat koordinat

$$= |\vec{r}| = \text{besar vektor posisi } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$v = \text{laju peluru setiap saat} = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Arah dari kecepatan terhadap sumbu x positif adalah:

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x}$$

Dari persamaan (1) dan (2) didapatkan:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha_0}$$

$$y = \tan \alpha_0 x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha_0} x^2 = Ax - Bx^2$$

adalah persamaan parabola, oleh sebab itu disebut gerak parabola.

Titik-titik istimewa pada gerak parabola

Tinggi maksimum, ketika $v_y = 0$

$$h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

waktu untuk mencapai tinggi maksimum

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

Titik terjauh, $y = 0$

Waktu untuk mencapai titik terjauh

$$t' = 2t = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g}$$

Maka jarak terjauh adalah

$$x_{\max} = v_0 \cos \alpha t' = v_0 \cos \alpha \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Soal-soal

- Sebuah mobil dengan laju 72 km/jam, kemudian di rem dan setelah 5 detik lajunya menjadi 18 km/jam. Maka berapa jarak yang ditempuh selama 5 detik tersebut ?
- Jika kita mempunyai $x_1 = 19$ meter, $x_2 = 27$ meter, $t_1 = 1$ detik dan $t_2 = 4$ detik, maka berapa kecepatan rata-ratanya ?

- Kecepatan suatu mobil diberikan dengan persamaan $v = A + Bt^2$, $A = 60 \text{ m/s}$ dan $B = 0,5 \text{ m/s}^2$.
 - Hitung kecepatan mobil selama selang waktu 1 sampai 3 detik
 - Hitung percepatan rata-rata untuk waktu 1 sampai 3 detik
 - Hitung kecepatan sesaat dan percepatan sesaat untuk waktu 1 sampai 3 detik
- Sebuah mobil dipercepat dari keadaan yang semula diam dalam waktu 6 detik telah menempuh jarak 1800 meter. Delapan detik setelah mobil pertama diatas berangkat, menyusul mobil kedua bergerak dengan kecepatan awal 10 m/s.
Berapakah percepatan mobil kedua agar dapat menyusul mobil pertama dalam waktu 12 detik.
Berapa jauh tempat pertemuan kedua mobil dari tempat berangkatnya.
- Sekeping koin senilai 500 lira dijatuhkan dari menara Pisa. Koin ini mulai dari keadaan diam dan kemudian mengalami jatuh bebas. Hitung posisi dan kecepatannya sesudah 1, 2, dan 3 detik.
- Suatu benda bergerak dengan percepatan $a = 2t^2 + 3t + 1$, hitung perpindahannya setelah 5 detik pertama bergerak, jika diketahui kecepatan mula-mula 0.
- Suatu benda bergerak dengan percepatan $a = 3x^2 + 2$. Hitung kecepatan pada saat mencapai posisi $x = 5$ meter, jika diketahui posisi mula-mula $x = 0$ dan kecepatan mula-mula $v = 0$.
- Sebuah mobil bergerak sepanjang bidang xy dengan persamaan

$$x = (2 - 0,25 t^2) \text{ meter}$$

$$y = (t + 0,025 t^3) \text{ meter}$$

- Carilah koordinat mobil pada waktu $t = 2 \text{ s}$
- Carilah perpindahan dan kecepatan rata-rata mobil selama selang waktu dari 0 sampai 2 detik
- Berapa kecepatan sesaat untuk $t = 2 \text{ s}$
- Hitung percepatan rata-rata pada $t = 0 \rightarrow t = 2 \text{ s}$ dan percepatan sesaat pada $t = 2 \text{ s}$
- Hitung komponen parallel dan tegak lurus dari percepatan pada $t = 2 \text{ s}$.
- Dari sebuah senapan ditembakkan 2 peluru masing-masing dengan sudut elevasi 30° dan 60° dengan kecepatan awal yang sama
Peluru mana yang lebih jauh sampai tanah ?
Berapa perbandingan tinggi maksimum yang dicapai kedua peluru ?
- Sebuah benda dilempar dari permukaan tanah vertikal keatas dan kembali ketempat semula selama 6 sekon. Berapakah kecepatan awal benda dan berapa tinggi maksimum, jika diketahui percepatan gravitasi $g = 10 \text{ m/s}^2$.
- Sebuah bola dilempar keatas dengan kecepatan awal $v_0 = 60 \text{ m/s}$ sudut elevasi 30° . Hitung kecepatan benda pada $t = 5 \text{ s}$.

Contoh soal

- Mobil berjalan dengan kecepatan 72 km/jam . Tiba-tiba pada jarak 50 meter di depannya ada orang tua menyeberang jalan. Hitung

perlambatan minimal motor tersebut. Agar tidak menabrak orang yang sedang menyeberang jalan.

Diketahui:

$$v_0 = 72 \frac{\text{km}}{\text{jam}} = \frac{72 \cdot 100 \text{ m}}{3600 \text{ detik}} = 20 \text{ m/s}$$

$$x = 50 \text{ m}, v = 0 \text{ m/s}$$

Ditanya = a

Jawab : GLBB (diperlambat)

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v = v_0 + a t$$

$$50 = 0 + 20t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (1)$$

$$0 = 20 + a t \rightarrow a t = -20 \rightarrow a = -\frac{20}{t} \dots \dots (2)$$

$$50 = 20t + \frac{1}{2} \left(-\frac{20}{t}\right) t^2$$

$$50 = 20t - 10t = 10t$$

$$t = 5 \text{ detik}$$

dari (2)

$$a = -\frac{20}{t} = -\frac{20}{5} = -4 \text{ m/s}^2$$

Maka perlambatannya 4 m/s^2 .

- Pesawat dapat tinggal landas (lepas landas) jika kecepatannya 180 km/jam . Mesin pesawat dapat memberikan percepatan 4 m/s^2 .

Jika panjang landas pacunya 400m, dapatkah pesawat tersebut tinggal landas (lepas landas)

Diketahui :

$$v_0 = 180 \frac{\text{km}}{\text{jam}} = \frac{180.100\text{m}}{3600 \text{ detik}} = 50 \text{ m/s}$$

$$a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ditanyakan $v \geq 50 \text{ m/s}$?

Jawab :

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v = v_0 + a t$$

$$v^2 = v_0^2 + 2 a x$$

$$v^2 = 0 + 2 \cdot 4 \cdot 400 = 3200$$

$$v = \pm \sqrt{3200} = \pm 40\sqrt{2}$$

$$v = 40\sqrt{2} \text{ m/s (M)} \text{ dan } v = -40\sqrt{2} \text{ m/s (TM)}$$

$$v = 4\sqrt{2} = 56,5685 \text{ m/s} > 50 \text{ m/s}$$

Kesimpulan pesawat bisa tinggal landas (lepas landas) karena kecepatan lebih besar dari 50 m/s

- Mobil berjalan dengan kecepatan 36 km/jam. Pada jarak 20 m di depannya ada motor berjalan searah dengan kecepatan 18 km/jam. Mobil akan mendahului motor tersebut dengan percepatan 2 m/s^2 . Kapan dan dimana saat motor dan mobil pada posisi berdampingan? Hitung kecepatan mobil saat berdampingan dengan motor tersebut.

Diketahui:

$$v_1 = 36 \frac{\text{km}}{\text{jam}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad a = 2 \text{ m/s}^2$$

$$v_2 = 18 \frac{\text{km}}{\text{jam}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ditanyakan : $x, t =$

$$v_1' =$$

Jawab:

Mobil GLBB (dipercepat)

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$x = 10t + \frac{1}{2} \cdot 2t^2$$

$$x = 10t + t^2 \dots \dots \dots (1)$$

Motor GLBB (dipercepat)

$$x = x_0 + v_0 t$$

$$x = 20 + v_0 t$$

$$x = 20 + 5t \dots \dots \dots (2)$$

$$(1) = (2)$$

$$10t + t^2 = 20 + 5t$$

Dihitung detreminan

$$t^2 + 5t - 20 = 0 \quad \det = b^2 - 4ac$$

$$\det = 25 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)$$

$$\det = 225 - 80 > \text{positif}$$

Artinya ada 2 akar bilangan nyata

Akar-akar dihitung dengan rumus abc

$$t_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t_{12} = \frac{-5 \pm \sqrt{24 - 4 \cdot 20}}{2} = -2,5 \pm \frac{1}{2} \sqrt{105}$$

$$t_{12} = -2,5 \pm 5,12$$

$$t_1 = -2,5 + 5,12 = 2,62 \text{ s}$$

$$t_2 = -2,5 - 5,12 = -7,62 \text{ s}$$

Dipilih waktu yang tercepat

Maka mobil dan motor bertemu pada jarak

$$x = 20 + 5t = 20 + 5 \cdot 2,62 = 33,1 \text{ m dari titik 0}$$

Kecepatan mobil ketika bertemu

$$\begin{aligned} v &= v_0 + \frac{1}{2}at^2 \\ &= 10 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2,62)^2 \\ &= 10 + 6,8644 = 16,8644 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Mobil dan motor bertemu pada $t = 2,62$ dengan jarak 33,1 m dari 0 dengan kecepatan mobil 16,8644 m/s

- Sebuah mobil sedan sedang berjalan dengan kecepatan tetap sebesar 72 km/ jam. Pada jarak 100 m didepannya terdapat mobil

truk yang berjalan dengan kecepatan tetap sebesar 36 km/jam. Agar mobil tidak menabrak truk, hitung perlambatan minimal yang harus diberikan. Selanjutnya tentukan posisi ketika mobil berada tepat di belakang truk tersebut.

Diketahui

$$v_1 = 72 \frac{\text{km}}{\text{jam}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad v_2 = 36 \frac{\text{km}}{\text{jam}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x_0 = 100\text{m}$$

Ditanyakan a x

→ v_1 GLBB $v'_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ Diperlambat

100 v_2
 +-----+-----→ GLB $v_2 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Kecepatan konstan

Mobil GLBB

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 0 + 20t + \frac{1}{2} a t^2 \dots (1)$$

$$v = v_0 + a t \rightarrow 10 = 20 + a t$$

$$a = \frac{-10}{t} \dots \dots (2) \text{ perlambatan mobil}$$

$$(2) \rightarrow (1) \quad x = 20t + \frac{1}{2} \left(\frac{-10}{t} \right) t^2$$

$$x = 20t + 5t$$

$$x = 15t \dots \dots (3)$$

Truk GLB

$$x = x_0 + v_2 t = 100 + 10t \dots (4)$$

$$(3) = (4) \quad 100 + 10t = 15t$$

$$100 = 5t \rightarrow t = \frac{100}{5} = 20s$$

Jadi perlambatan mobil adalah dari persamaan (2)

$$a = -\frac{10}{t} = -\frac{10}{20} = -\frac{1}{2} \text{ m/s}^2$$

Pada posisi bertemu dari persamaan (4)

$$x = 100 + 10 \cdot 20 = 300 \text{ m}$$

- Seseorang mengejar KA yang berhenti di stasiun. Ketika ia berada 20 m dibelakangnya, KA berjalan dengan percepatan $0,8 \text{ m/s}^2$. Ternyata dia masih dapat mengejar dan naik KA. Jika dia berlari dengan kecepatan konstan 6 m/s , kapan dan dimana orang tersebut dapat naik KA

Diketahui:

Kereta Api dengan notasi 1

Orang dengan notasi 2

$\rightarrow v_1 = 0 \quad a_1 = 0,8 \text{ m/s}^2$	$v_1 = 0 \quad y_0 = 20\text{m}$	
$\rightarrow v_2 = 6 \text{ m/s}$	$v_2 = 6 \text{ m/s}$	
$\leftarrow 20 \rightarrow$	$a_1 = 0,8 \text{ m/s}^2$	

Ditanyakan kapan dan dimana orang bisa menyusul kereta api

Jawab

KA GLBB Dipercepat

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 20 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 0,8 \cdot t^2$$
$$x = 20 + 0,4 t^2 \dots (1)$$

Orang GLB

$$x = vt = 6t \dots \dots (2)$$

$$(1) = (2) \quad 6t = 20 + 0,4 t^2$$

$$\frac{0,4 t^2 - 6t + 20 = 0}{0,4}$$

$$t^2 - 15t + 50 = 0$$

Dihitung determinan

$$\det = (-15)^2 - 4ac = 225 - 4 \cdot 1 \cdot 50 = 25 \text{ positif}$$

Artinya ada 2 akar bilangan nyata

$$t_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{+15 \pm \sqrt{225 - 200}}{2}$$

$$t_{12} = \frac{+15}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{25} = \frac{15}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$t_1 = \frac{15}{2} + \frac{5}{2} = 10 \text{ det}$$

$$t_2 = \frac{15}{2} - \frac{5}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ det}$$

Dipilih waktu yang terpendek $t = 5$ detik

Dari persamaan (1)

$$x = 20 + 0,4 t^2 = 20 + 0,4 \cdot 5^2 = 30 \text{ meter}$$

Jadi pada waktu 5 detik dan pada jarak 30 meter orang tersebut bisa menyusul kereta api

- Dalam tendangan bebas bola ditendang dengan kecepatan dan sudut elevasi 37° terhadap bidang datar, hitunglah perbandingan jarak dalam arah datar sampai bola jatuh ke tanah kembali dengan tinggi maksimum yang dicapai oleh bola tersebut.

Jawab:

Sb y GLBB diperlambat

Tinggi maksimum

$$y_{\max} = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y_{\max} = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_y = v_{0y} - gt$$

$$v_y = 0 \rightarrow v_0 \sin \theta - gt = 0$$

$$v_0 \sin \theta = gt$$

Jadi Waktu untuk mencapai tinggi maksimum

$$t = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

Sb x GLB

$$x = v_{0x}t$$

x maksimum untuk

$$t = 2 \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

Jarak maksimum adalah

$$x_{\max} = v_{0x} \cdot 2 \cdot \frac{v_0 \sin \theta}{g} = \frac{2v_0^2 \cos \theta \sin \theta}{g}$$

Tinggi maksimum adalah

$$y_{\max} = v_0 \sin \theta \cdot \frac{v_0 \sin \theta}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0^2 (\sin \theta)^2}{g^2} \right)$$

$$= \frac{v_0^2 (\sin \theta)^2}{g} - \frac{v_0^2 (\sin \theta)^2}{2g} = \frac{v_0^2 (\sin \theta)^2}{2g}$$

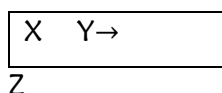
Perbandingan jarak maksimum dan tinggi maksimum adalah

$$\frac{y_{\max}}{x_{\max}} = \frac{\frac{v_0^2 (\sin \theta)^2}{2g}}{\frac{2v_0^2 \cos \theta \sin \theta}{g}} = \frac{1}{4} \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \tan \theta = \frac{1}{4} \tan 37 = \frac{1}{4} \cdot 0,75 \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

perbandingan jarak dalam arah datar sampai bola jatuh ke tanah kembali dengan tinggi maksimum yang dicapai oleh bola tersebut adalah $\frac{3}{16}$

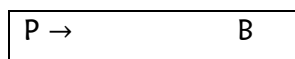
Kecepatan relatif



X diam di kereta api, Y berjalan di kereta api dengan kecepatan 1 m/s searah, kereta api berjalan dengan kecepatan 3 m/s dan Z diam ditanah.

menurut Z, X bergerak 3 m/s dan Y bergerak 4 m/s,
menurut X, Z bergerak – 3 m/s dan Y bergerak 1 m/s, dan
menurut Y, X bergerak – 1 m/s dan Z bergerak – 4 m/s.

Kerangka acuan (frame of reference): kerangka acuan ditambah skala waktu



A

A adalah kerangka acuan dari Z (diam di tanah)

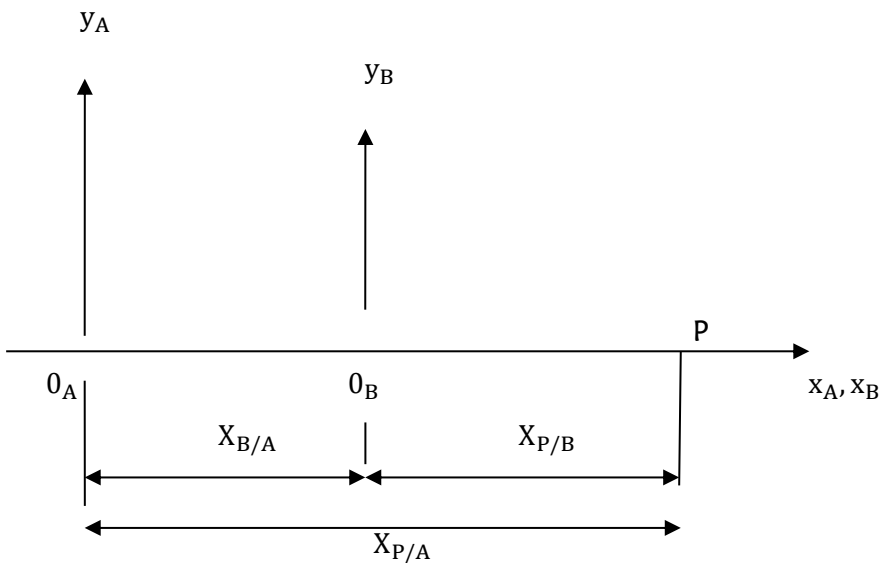
B adalah kerangka acuan dari kereta api yang bergerak terhadap tanah

posisi P relatif terhadap kerangka acuan A adalah $X_{P/A}$

posisi P relatif terhadap kerangka acuan B adalah $X_{P/B}$

jarak pusat koordinat A terhadap titik P / posisi P relatif terhadap kerangka acuan A adalah

$$X_{P/A} = X_{P/B} + X_{B/A}$$



kecepatan relatif P terhadap kerangka acuan A adalah $v_{P/A} = \frac{dX_{P/A}}{dt}$

kecepatan relatif P terhadap kerangka acuan B adalah $v_{P/B} = \frac{dX_{P/B}}{dt}$

kecepatan relatif kerangka acuan B terhadap kerangka acuan A adalah $v_{B/A} = \frac{dX_{B/A}}{dt}$

$$v_{P/A} = v_{P/B} + v_{B/A}$$

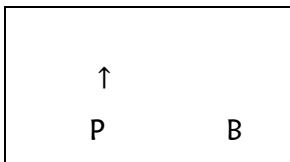
Untuk contoh diatas:

$v_{P/B} = 1 \text{ m/s}$ dan $v_{B/A} = 3 \text{ m/s}$, maka kecepatan P terhadap orang A ditanah adalah:

$$v_{P/A} = v_{P/B} + v_{B/A} = 1 + 3 = 4 \text{ m/s}.$$

Kecepatan relatif A terhadap kereta api = - kecepatan relatif kereta api terhadap A.

Kecepatan relatif dalam 2 dan 3 dimensi



A

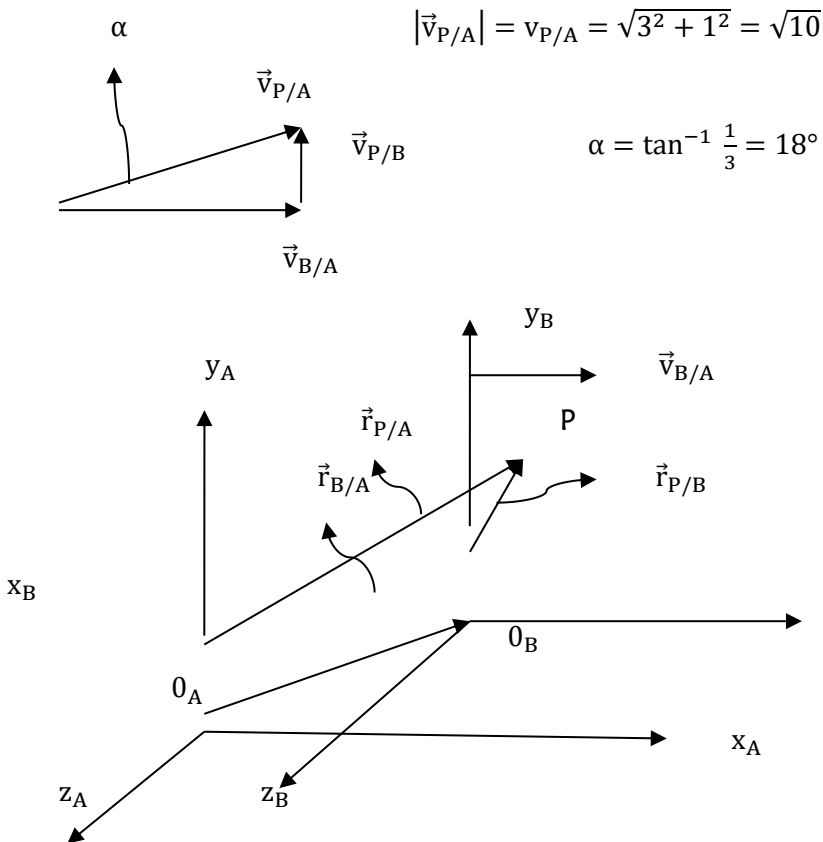
P berjalan dengan arah tegak lurus dengan arah kereta api.

Kita gunakan vektor posisi \vec{r} menggantikan x

$$\vec{r}_{P/A} = \vec{r}_{P/B} + \vec{r}_{B/A}$$

Vektor kecepatan relatif dalam ruang

$$\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{B/A}$$



Soal : Terbang memotong arah angin.

Kompas sebuah pesawat terbang menunjukkan bahwa arah pesawat ke utara dan indikator kecepatannya menunjukkan bahwa pesawat bergerak menembus udara pada 240 km/jam. Jika angin bergerak 100 km/jam dari barat ke timur berapa kecepatan pesawat terbang relatif terhadap bumi. Kemana pilot harus mengarahkan pesawatnya agar perjalanan tetap konstan ke utara ? Berapa kecepatan pesawat sekarang relatif terhadap bumi ?

BAGIAN 3

DINAMIKA

Di dalam mekanika dinamika adalah hubungan antara gerak dan gaya yang menyebabkannya. Konsep gaya yang diselidiki oleh Newton disebut hukum Newton.

- Hukum I Newton (hukum kelembaman)

Jika resultan gaya yang bekerja pada benda sama dengan nol, maka benda yang diam (kecepatan nol) akan tetap diam atau benda yang bergerak lurus beraturan (kecepatan konstan) akan tetap bergerak lurus beraturan. Atau

Pada benda yang tidak bekerja suatu gaya total akan bergerak dengan kecepatan konstan (atau kecepatan nol = diam)

Maka jika

$$\sum F = 0, \text{ maka } a = 0,$$

kemungkinannya benda diam atau bergerak GLB

- Hukum II Newton (Hukum tentang gerak)

Jika suatu gaya luar total bekerja pada sebuah benda, maka benda akan mengalami percepatan a , arah percepatan sama dengan arah gaya total F . Vektor gaya total sama dengan massa benda m dikalikan dengan percepatan benda

Jika

$$F \neq 0 \text{ (ada gaya luar yang bekerja) maka } a \neq 0$$

Maka

$$\sum F = ma \quad \text{atau} \quad a = \frac{F}{m}$$

F = gaya (Newton, dyne)

m = massa (kg, gram)

a = percepatan (m/s^2)

- Pengertian massa dan berat.

Massa (m) adalah banyaknya materi yang dimiliki benda dan besarnya tetap. Berat (W) adalah gaya gravitasi yang dilakukan oleh bumi terhadap benda dengan arah ke pusat bumi.

Hubungan keduanya adalah $W = m g$, dengan g adalah percepatan gravitasi bumi.

- Hukum III Newton (Hukum aksi reaksi)

Jika benda A memberikan gaya pada benda B (aksi), maka benda B akan memberikan gaya pada benda A (reaksi). Kedua gaya ini memiliki besar yang sama tetapi arah yang berlawanan. Kedua gaya ini terletak pada satu garis kerja.

Apabila dua benda berinteraksi satu dengan yang lain, maka

$$F_{12} = -F_{21}$$

F_{12} = gaya yang dilakukan benda 1 terhadap benda 2

F_{21} = gaya yang dilakukan benda 2 terhadap benda 1

Penerapan hukum Netwon

Pada lift

- a. Lift dalam keadaan diam atau bergerak dengan kecepatan tetap

$$\sum F = 0$$

$$N - W = 0 \rightarrow N = W$$

Gaya normal sama dengan berat orang

- b. Lift dipercepat keatas

$$\sum F = m a$$

$$N - W = m a \rightarrow N = W + m a$$

Gaya normal lebih besar dari berat orang

- c. Lift dipercepat kebawah

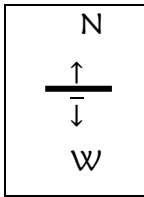
$$\sum F = - m a$$

$$N - W = - m a \rightarrow N = W - m a$$

Gaya normal lebih kecil dari berat orang

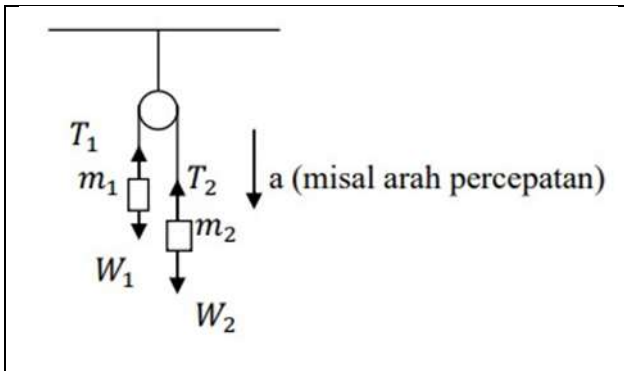
Seseorang dengan masa 50 g berada pada sebuah lift. Lift bergerak dengan percepatan 5 m/s². Percepatan gravitasi bumi 10 m/s². Hitung gaya tekan normal orang terhadap lantai lift bila:

- Lift dipercepat ke atas dan
- Lift dipercepat ke bawah



Gambar lift

Katrol



Gambar katrol

Misal $m_2 > m_1$ sistem bergerak dengan arah a

Benda 1

$$\sum F = m_1 a$$

$$T_1 - W_1 = m_1 a$$

$$T_1 = W_1 + m_1 a = m_1 g + m_1 a$$

Benda 2

$$\sum F = -m_2 a$$

$$T_2 - W_2 = -m_2 a$$

$$T_2 = W_2 - m_2 a = m_2 g - m_2 a$$

Karena tidak ada gesekan pada katrol dan masa katrol diabaikan maka

$$T_1 = T_2$$

$$m_1 g + m_1 a = m_2 g - m_2 a$$

$$a(m_1 + m_2) = g(m_2 - m_1)$$

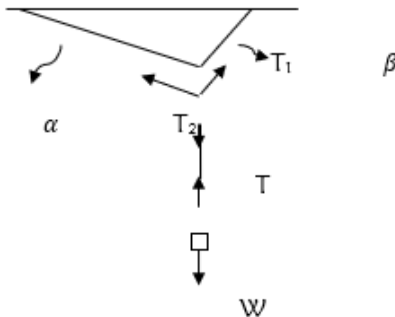
$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

Soal:

1. Dua buah benda A dan B masing - masing 4 kg dan 6 kg keduanya terhubung dengan katrol dan berada 16 meter dari tanah, massa tali dan katrol diabaikan, $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Hitung:

- a. Percepatan system
 - b. Tegangan tali
 - c. Waktu yang diperlukan B untuk sampai di tanah.
2. Benda digantung dengan 2 utas tali dan dalam keadaan setimbang, hitunglah tegangan tali.



Gaya kontak (gaya gesek)

- Gaya gesek statis (f_s)

Gaya yang bekerja selama benda masih diam

Gaya gesek statis maksimum (tepat benda akan bergerak)

$$f_{smax} = \mu_s N$$

- Gaya gesek kinetik (f_k)

Gaya yang bekerja pada benda yang bergerak

$$f_k = \mu_k N$$

μ_s dan μ_k Adalah koefisien gesek statis dan kinetis menyatakan kekasaran permukaan kontak besarnya adalah

$$0 \leq \mu_k < \mu_s \leq 1$$

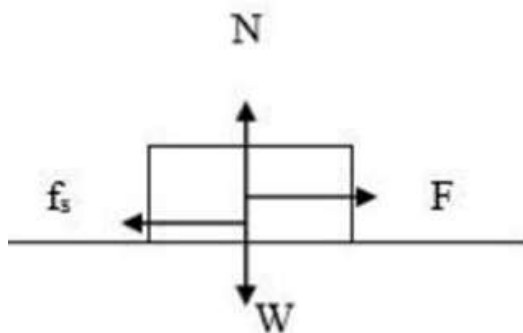
N = gaya Normal

W = gaya berat (N, dyne)

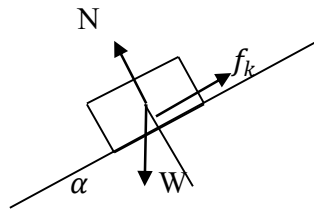
F = gaya luar (N, dyne)

N = Gaya normal = W (N, dyne)

f = gaya gesek (statis / kinetis)



Gambar gaya gesek pada bidang datar



Gambar gaya gesek pada bidang miring

Modulus elastisitas (Y)

Modulus elastisitas pada batang adalah perbandingan antara ketegangan (stress) dengan regangan (strain)

$$Y = \frac{\text{tegangan}}{\text{regangan}} = \frac{F/A}{\Delta l}$$

F = gaya (N)

A = luas permukaan (m^2)

Δl = pertambahan panjang batang (m)

l = panjang batang mula – mula (m)

Hukum Hooke (untuk pegas)

$$F = kx$$

F = gaya yang bekerja pada pegas (N, dyne)

x = pertambahan panjang pegas (m, cm)

k = konstanta pegas ($\frac{\text{N}}{\text{m}}$, $\frac{\text{dyne}}{\text{cm}}$)

Contoh soal 1

Balok dengan massa 2 kg terletak pada bidang datar. Jika balok ditarik mendatar dengan gaya 5 N. Hitung gaya gesek statik dan kinetiknya. Diketahui μ_s dan μ_k masing-masing 0,3 dan 0,2 dan percepatan gravitasi bumi $g = 10 \text{ m/s}^2$

Diketahui

$$m = 2 \text{ kg} \qquad \mu_s = 0,3 \qquad g = 10 \text{ m/s}^2$$

$$F = 5 \text{ N} \qquad \mu_k = 0,2$$

Ditanyakan f_s dan f_k

Jawab

$$\sum F_y = 0 \quad W - N = 0$$

$$N = W = m \cdot g$$

$$= 2 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2$$

$$= 20 \text{ N}$$

Sesaat sebelum bergerak gaya gesek maksimum adalah

$$f_{s_{\max}} = \mu_s N$$

$$f_{s_{\max}} = 0,3 \cdot 20 = 6 \text{ N}$$

Karena gaya gesek lebih besar dari gaya tarik ($f_s > F$) maka benda belum bergerak, dan karena belum bergerak maka gaya gesek kinetis adalah

$$f_k = \mu_k N = 0$$

Contoh soal 2

Ulangi soal no. 1 diatas jika gaya yang diberikan diperbesar menjadi 10 N

Jawab:

Sesaat sebelum bergerak gaya gesek statis adalah

$$f_{s_{max}} = \mu_s N = 0,3 \cdot 20 = 6N$$

Karena gaya yang menarik lebih besar dari gaya gesek statis maksimum maka benda sudah bergerak. Dan pada saat sudah bergerak gaya gesek kinetis adalah

$$f_k = \mu_s N = 0,3 \cdot 20 = 4N$$

Contoh soal 3

Sebuah balok dengan massa 5 kg meluncur di atas bidang datar dengan kecepatan 2 m/s. Setelah menempuh jarak 1 m ternyata balok tersebut berhenti. Dengan mengambil nilai percepatan gravitasi bumi (g) sebesar 10 m/s^2 , hitunglah besar koefisien gesek kinetik antara balok dengan bidang datar tersebut.

Diketahui :

$$m = 5kg \quad v_0 = 2 \frac{m}{s} \quad v_t = 0 \quad x = 1 \text{ m} \quad g = 10m/s^2$$

Ditanya μ_k

Jawab

$$v_t^2 = v_0^2 + 2ax$$

$$0 = 4 + 2 \cdot a \cdot 1 \rightarrow 2a = -4$$

$$a = -2 \text{ m/s}^2 \text{ (perlambatan)}$$

$$\sum F_y = 0 \quad W - N = 0$$

$$N = W = m \cdot g = 5 \cdot 10 = 50 \text{ N}$$

$$\sum F_x = m \cdot a$$

$$f_k = m \cdot a$$

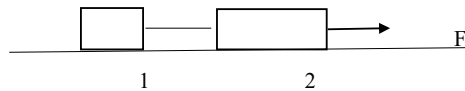
$$f_k = 5 \cdot (-2) = -10 \text{ N (arah ke kiri)}$$

$$f_k = \mu_k N \rightarrow \mu_k = \frac{f_k}{N} = \frac{10}{50} = 0,2$$

Maka besar koefisien gesek kinetik antara balok dengan bidang datar tersebut adalah 0,2

Contoh soal 4

Dua buah balok masing-masing dengan massa 3 kg dan 2 kg dihubungkan dengan sebuah tali melalui pusat massa balok 2 kg, sistem ditarik dengan gaya sebesar 30 N. jika koefisien gesek statik dan kinetis antara balok-balok dengan bidang datar masing-masing sebesar 0,5 dan 0,4, hitung percepatan system serta tegangan tali penghubung antara kedua balok.



Gambar dua benda yang dihubungkan dengan tali

Diketahui:

$$m_1 = 3kg \quad m_2 = 2kg \quad \mu_s = 0,5 \quad \mu_k = 0,4 \quad F = 30N$$

Ditanya a dan T

Jawab : W_t adalah berat total kedua balok

$$\sum F_y = 0$$

$$N - W_t = 0$$

$$N = W_t = (m_1 + m_2)g$$

$$N = (3 + 2) \cdot 10$$

$$N = 50 \text{ N}$$

Sesaat akan bergerak

$$F_s = \mu_s N = 0,5 \cdot 50 = 25 \text{ N}$$

Karena $F_s < F \rightarrow$ benda bergerak

$$\sum F_x = m \cdot a$$

$$F - f_k = m \cdot a$$

$$30 - \mu_s N = m_t \cdot a$$

$$30 - 0,4 \cdot 50 = 5 \cdot a$$

$$30 - 20 = 5a$$

$$a = \frac{10}{5} = 2 \text{ m/s}^2$$

Percepatan sistem yang terdiri dari dua benda adalah 2 m/s^2

Menghitung tegangan tali pada masing-masing benda

Benda 1

$$\sum F_x = m_1 a \quad T = m_1 a + f_k = 3,2 + \mu_k N$$

$$T - f_k = m_1 a$$

$$T = m_1 a + \mu_k \cdot m_1 g = 3.2 + 0,4.2.10 = 6 + 12 = 18N$$

Benda 2

$$\sum F_x = m_2 a$$

$$F - T - f_k = m_2 a$$

$$30 - T - \mu_s \cdot m_2 g = m_2 a$$

$$30 - T - 0,4.2.10 = 2.2$$

$$30 - 8 - 4 = T$$

$$T = 18N$$

Tambahan

Untuk masing-masing benda

Benda 1

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_1 - W_1 = 0 \rightarrow N_1 = W_1 = 3 \times 10 = 30N$$

$$\sum F_x = m_1 a$$

$$T - f_k = m_1 a$$

$$T - \mu_k N = m_1 a$$

$$T = \mu_k N_1 + m_1 a$$

$$T = 0,4 \cdot 30 + 3 \cdot 2 = 18 \text{ N}$$

Benda 2

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_2 - W_2 = 0 \rightarrow N_2 = W_2 = m_2 g = 0,2 \cdot 10 = 20 \text{ N}$$

$$\sum F_x = m_2 a$$

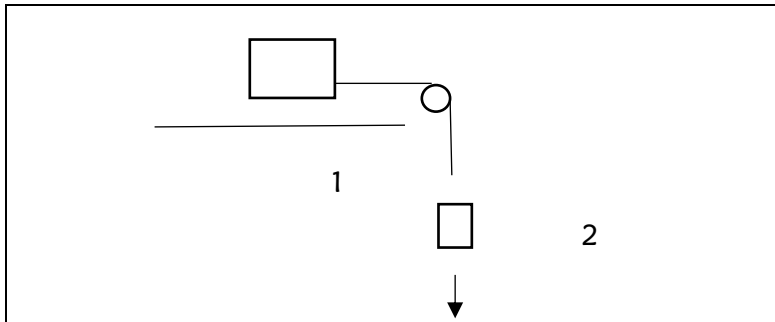
$$F - T - f_k = m_2 a$$

$$30 - T - \mu_k N = m_2 a$$

$$30 - T - 0,4 \cdot 20 = 2 \cdot 2 \rightarrow T = 18 \text{ N}$$

Contoh soal 5

Pada sistem seperti gambar berikut, hitunglah percepatan sistem dan tegangan tali penghubung kedua balok tersebut, diketahui μ_s dan μ_k masing-masing sebesar 0,6 dan 0,5. Pada system tersebut massa tali dan katrol diabaikan. Diketahui $m_1 = 3 \text{ kg}$ dan $m_2 = 2 \text{ kg}$



Gambar Katrol

Diketahui :

$$m_1 = 3kg \text{ dan } m_2 = 2kg$$

$$\mu_s = 0,6 \quad \mu_k = 0,5$$

$$m_1 = 3kg \quad m_2 = 2kg$$

Ditanyakan a & T

Jawab:

Benda 1

$$\sum F_y = 0$$

$$N_1 - W_1 = 0$$

$$N_1 = W_1 = m_1 \cdot g = 3 \cdot 10 = 30N$$

Pada saat akan bergerak

$$F_{s_{max}} = \mu_s N = 0,6 \cdot 30 = 18 N$$

$$W_2 = m_2 g = 2 \cdot 10 = 20 N$$

$$F_{s_{max}} < W_2 \rightarrow \text{sistem bergerak}$$

$$\sum F_x = m_1 a$$

$$T - f_k = m_1 a$$

$$T = f_k + m_1 a = \mu_k N + m_1 a = 0,5 \cdot 30 + 3 \cdot a = 15 + 3a \dots \dots (1)$$

Benda 2

$$\sum F_y = m_2 \cdot a$$

$$W_2 - T = m_2 \cdot a$$

$$W_2 - m_2 a = T$$

$$T = m_2 g - m_2 a \dots \dots (2)$$

$$(1) = (2) \quad 15 + 3 = 2 \cdot 10 - 2 \cdot a$$

$$15 + 3a = 20 - 2a \rightarrow 5a = 5$$

$$a = 1 \text{ m/s}^2$$

$$(1) \quad T = 15 + 3a = 15 + 3 = 18 \text{ N atau}$$

$$(2) \quad T = m_2 g - m_2 a = m_2 (g - a)$$

$$T = 2 (10 - 1) = 18 \text{ N}$$

Contoh soal 6

Sebuah balok dengan massa m diluncurkan di atas bidang datar dengan kemiringan tertentu. Jika balok tersebut dapat meluncur dengan kecepatan konstan bila sudut kemiringan bidang sebesar 37° , hitung besar koefisien gesek antara balok dengan bidang datar

Diketahui:

$$W_y = mg \cos 37^\circ$$

$$W_x = mg \sin 37^\circ$$

$$\sum F_y = 0$$

$$W_y - N = 0$$

$$N = W_y = mg \cos 37^\circ$$

$$\sum F = m \cdot a = 0$$

$$W_x - f_k = 0 \rightarrow f_k = W_x$$

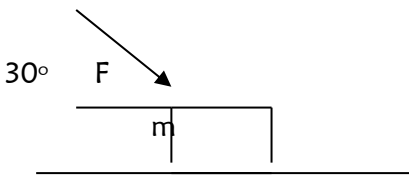
$$\mu_k N = W_x$$

$$\mu_k = \frac{W_x}{N} = \frac{mg \sin 37^\circ}{mg \cos 37^\circ}$$

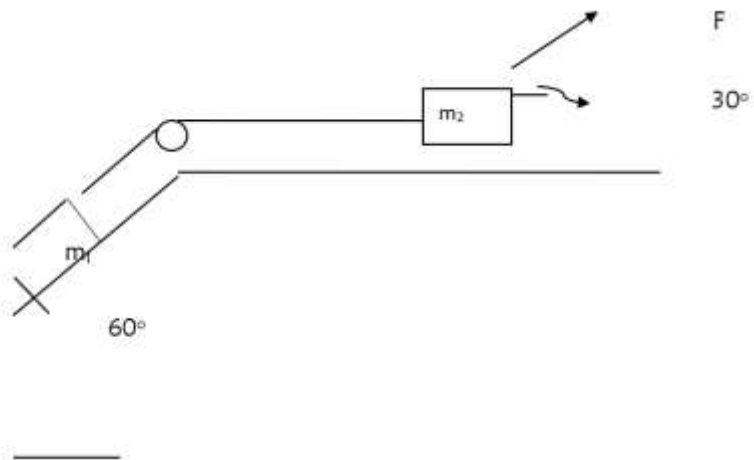
$$\mu_k = \tan 37^\circ$$

Soal

- a. Gaya 20 Newton bekerja pada sebuah benda dengan membentuk sudut seperti gambar diatas. Bila koefisien gesekan kinetis 0,2 dan massa benda 2 kg sedangkan $g = 10 \text{ m/s}^2$. Hitunglah besar gaya gesekan dan percepatan benda.



- b. Koefisien geser kinetis antara benda dan bidang 0,25. Besar massa 1 adalah 10 kg dan massa 2 adalah 30 kg. Tentukan besar gaya F yang menyebabkan sistem bergerak dengan percepatan 2 m/s^2 .



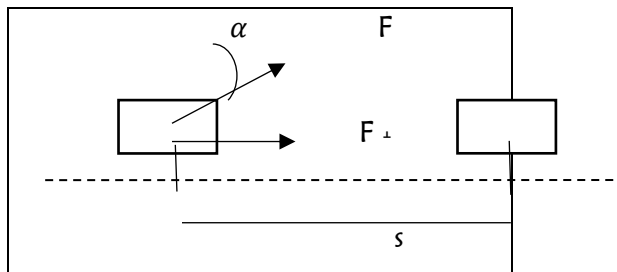
BAGIAN 4

USAHA, ENERGI, IMPULS DAN MOMENTUM

Usaha (Work = W)

Usaha adalah kerja yang dilakukan oleh gaya untuk memindahkan benda [$\text{Nm} = \text{J} = \text{joule}$]

$$W = F_{\parallel} s$$



Gambar usaha, gaya dan lintasan

$$\cos \alpha = \frac{F_{\parallel}}{F}$$

$$F_{\parallel} = F \cos \alpha$$

Keterangan:

W = Usaha ($\text{N} \cdot \text{m} = \text{joule}$, ($\text{dyne cm} = \text{erg}$)

1 joule = 10^7 erg

F = gaya (N , dyne)

s = perpindahan (m)

Energi (tenaga = E)

Energi adalah kemampuan untuk melakukan usaha [Joule = J]. Bentuk-bentuk energi adalah energi mekanik (kinetik, potensial dan potensial pegas), energi panas, energi listrik, energi kimia dll.

Definisi energi:

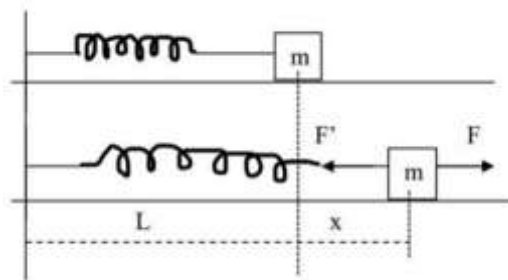
- Energi kinetik (E_k) adalah energi yang dimiliki oleh benda karena geraknya

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

- m adalah massa benda (kg) dan v adalah kecepatan benda (m/s^2).
- Energi potensial (E_p) adalah energi yang dimiliki oleh benda karena ketinggiannya

$$E_p = mgh$$

- g adalah percepatan gravitasi bumi (m/s^2) dan h adalah ketinggian benda (m)
- Energi potensial pegas / elastis adalah energi yang dimiliki oleh pegas



Gambar pegas

$$F = kx^2$$

F adalah gaya pegas (N)

F' adalah gaya pemulihan (N)

L adalah panjang mula-mula (m)

x adalah pertambahan Panjang/ simpangan (m)

k Adalah konstanta pegas (kg/s²)

Energi potensial pegas (Joule =J) adalah

$$E'_p = \frac{1}{2}kx^2$$

A. HUKUM KEKALKAN ENERGI MEKANIK

Hukum kekekalan energi mekanik adalah apabila tidak ada gaya luar yang bekerja pada suatu benda maka jumlah energi adalah tetap

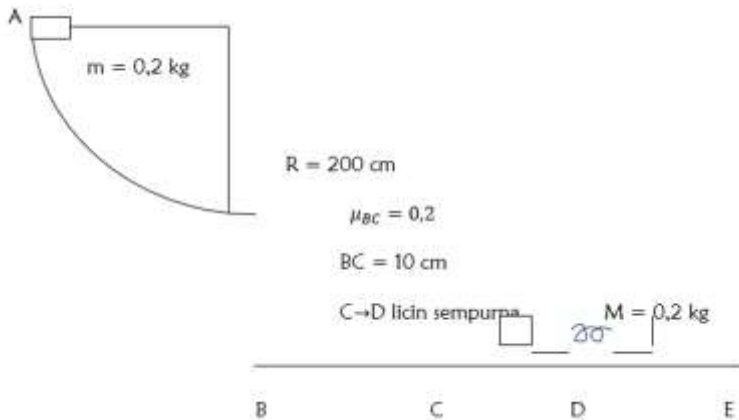
$$E_{k_1} + E_{p_1} + E'_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2} + E'_{p_2}$$

Soal:

Analisa sistem-sistem berikut dengan menggunakan hukum kekekalan energi mekanik

- Sebuah benda dengan masa 1 kg jatuh dari ketinggian 10 m dari atas tanah
- Sebuah rollercoaster yang berada 5 m dari atas tanah meluncur melalui relnya kebawah

Soal :



- Sebuah benda m dilepas dari ketinggian $\frac{1}{4}$ lingkaran. Tumbukan m dan benda M menyebabkan benda m berhenti dan benda M berjalan, M kemudian berhenti ketika pegas memendek 2 cm .
 - Hitung kecepatan m di B
 - Hitung kecepatan m di C
 - Hitung kecepatan M segera setelah ditumbuk m
 - Hitung konstanta pegas.

Daya (Power = P) satuan Watt = \mathcal{W}

Daya adalah usaha yang dilakukan tiap satuan waktu atau gaya pada dikalikan kecepatan

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \left[\frac{J}{s} = W \right]$$

$$\Delta t \rightarrow 0$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F ds}{dt} = Fv$$

Satuan daya Watt = Joule/detik dan 1 HP = 746 Watt

Satuan energy kWh = kilo Watt hour

kWh = 10^3 Watt jam = 10^3 Watt 3600 s

kWh = 10^3 3600 Watt s = 10^3 3600 J

maka 1 kWh = $3,6 \times 10$ joule

Contoh soal: Sebuah mobil menggunakan daya 10 HP dan bergerak dengan laju tetap 20 m/s. Hitung gaya dorong oleh mesin mobil.

$$P = 10 \text{ HP} = 10 \times 746 \text{ W} = 7460 \text{ W}$$

$$F = \frac{P}{v} = \frac{7460 \text{ W}}{20 \text{ m/s}} = 382 \text{ N}$$

Impuls dan Momentum

Impuls (i) adalah hasil kali gaya dengan selang waktu

$$i = F \Delta t \quad [N \text{ s}]$$

Momentum (p) adalah hasil kali massa dan kecepatan

$$p = mv \quad \left[kg \frac{m}{s} \right]$$

Impuls = perubahan momentum

$$i = \Delta p$$

$$F \Delta t = mv_2 - mv_1$$

Soal: Sebuah truk massanya 1000 kg melaju dengan kecepatan 72 km/jam. Kemudian menabrak pohon dan berhenti setelah 0,1 det. Berapa gaya rata-rata selama berlangsung tabrakan tersebut?

Jawab:

$$v_0 = 72 \frac{km}{jam} = \frac{72 \times 1000 m}{3600 s} = 20 \frac{m}{s}$$

$$v_1 = 0 \frac{m}{s}$$

Masa truk $m = 1000 \text{ kg}$

$$F \Delta t = mv_2 - mv_1$$

$$F = \frac{mv_2 - mv_1}{\Delta t} = \frac{m(v_2 - v_1)}{\Delta t} = \frac{1000(20 - 0)}{0,1} = 200.000 \text{ N}$$

Hukum Kekekalan Momentum

Jika tidak ada gaya luar yang bekerja pada suatu sistem maka jumlah momentum sistem tersebut konstan.

Momentum awal = momentum akhir

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

m adalah masa

v adalah kecepatan

indeks 1 dan 2 adalah benda 1 dan 2

tanda aksen adalah sesudah tumbukan

Pada tumbukan berlaku hukum kekekalan momentum, dan dikenal besaran koefisien restitusi (e)

Koefisien restitusi (e) harganya $0 \leq e \leq 1$

$$e = - \frac{(v'_2 - v'_1)}{(v_2 - v_1)}$$

v'_2 = kecepatan benda 2 setelah tumbukan

v'_1 = kecepatan benda 1 setelah tumbukan

v_2 = kecepatan benda 2 sebelum tumbukan

v_1 = kecepatan benda 1 sebelum tumbukan

- $e = 1$, untuk tumbukan lenting sempurna
- $e = 0$, untuk tumbukan yang tidak lenting sama sekali

Dari hukum kekekalan momentum didapat

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'$$

Karena sesudah tumbukan kedua benda menjadi satu dan bergerak bersama-sama maka

$$v'_1 = v'_2 = v'$$

- $0 < e < 1$, untuk tumbukan lenting / elastis sebagian.
1. Sebuah batu dengan masa 0,5 kg dilemparkan vertikal ke atas dengan kecepatan awal 30 m/s. Apabila ternyata batu tersebut mencapai tinggi maksimum sebesar 35 m, hitunglah energi yang hilang karena gesekan udara selama batu melintas sampai tinggi maksimum. Berapakah tinggi maksimum yang seharusnya dapat dicapai oleh batu tersebut seandainya tidak ada gesekan udara.

Diketahui :

$$m = 0,5 \text{ kg} \quad h_{\max} = 35 \text{ m} \quad g = 10 \text{ m/s}^2 \quad v_0 = 30 \text{ m/s}$$

Ditanya : energi yang hilang karena gesekan udara dan tinggi yang seharusnya

Jawab :

hukum kekekalan energi mekanik (E_m)

Titik A adalah ketika benda ditanah dan titik B adalah ketika benda pada ketinggian maksimum dan titik C Adalah ketika benda pada ketinggian 35 m

$$E_{m_A} = E_{m_B} \quad E_{k_A} + E_{p_A} = E_{k_B} + E_{p_B}$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$$

$$\frac{1}{2} \cdot 30^2 + g \cdot 0 = \frac{1}{2} \cdot 0 + 10 \cdot h_B$$

$$450 + 0 = 0 + h_B$$

$$h_B = 45 \text{ m (tinggi yang seharusnya)}$$

Energi yang hilang adalah

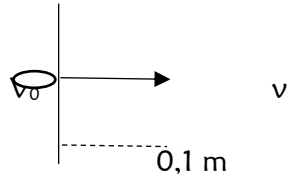
$$\begin{aligned} E_{P_B} - E_{P_C} &= m \cdot gh_B - m \cdot gh_C = 0,5 \cdot 10 \cdot (45 - 35) = 0,5 \cdot 10 \cdot 10 \\ &= 50 \text{ J} \end{aligned}$$

2. Sebuah peluru bermassa 100 gr ditembakkan dengan senapan laras panjang dan mengenai sebatang pohon. Ternyata peluru dapat masuk ke dalam batang pohon sedalam 10 cm. Apabila kecepatan peluru saat mengenai batang pohon sebesar 100 m/s, hitunglah gaya gesek rata-rata batang pohon terhadap peluru tersebut
Diketahui:

$$m = 0,1 \text{ kg}, \quad v_0 = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad v = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \text{ dan } x = 10^{-1} = 0,1 \text{ m}$$

Ditanyakan : gaya gesek / gaya hambat batang pohon

Jawab:



$$v^2 = v_0^2 + 2ax \rightarrow 0 = 100^2 + 2 a 0,1$$

$$a = -\frac{10000}{0,2} = -50000 \text{ m/s}^2$$

Jadi perlambatan peluru adalah 50.000 m/s²

Dengan hukum Newton ke 2

$$\sum F_x = m \cdot a \rightarrow -f_k = m \cdot a$$

$$f_k = -0,1 \cdot (50.000) = -5000 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}} = -5000 \text{ N}$$

Jadi gesekan/hambatan pohon 5000 N dengan arah ke kiri

3. Sebuah batu dengan masa 0,5 kg dijatuhkan dari atas pohon setinggi 4 m pada segundukan pasir yang berada di dasar pohon. Jika batu dapat masuk ke dalam pasir sedalam 5 cm, hitung gaya rata-rata pasir terhadap batu untuk menghentikan laju batu tersebut.

Diketahui :

$$m = 0,5 \text{ kg} \quad x = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m} \quad h = 4 \text{ m} \quad g = 10 \text{ m/s}^2$$

Ditanya gaya tahan pasir = gaya gesek

Hukum kekekalan energi mekanik

A		$E_{k_A} + E_{p_A} = E_{k_B} + E_{p_B}$
h		$\frac{1}{2}mv_A^2 + m \cdot gh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + m \cdot gh_B$
		$0 + 0,5 \cdot 10 \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot v_B^2 + 0$

$$20 = \frac{1}{4}v_B^2 \rightarrow v_B^2 = 80$$

B. $v_B = \sqrt{80}$

$$v_C^2 = v_B^2 + 2ax$$

$$0 = 80 + 2 \cdot a \cdot 0,05 \rightarrow a \cdot 0,1 = -80$$

$$a = -800 \text{ m/s}^2$$

Perlambatan oleh pasir 800 m/s^2

Dengan hukum Newton ke 2

$$\sum F_y = ma$$

$$-f_k = m \cdot a \rightarrow f_k = -0,5 \text{ kg} \cdot (800 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$$

$$f_k = -400 \frac{m}{s^2} \text{ kg} = -400N$$

Gaya hambatan pasir 400 N dengan arah ke atas

4. Sebuah batu dengan masa 0,5 kg dijatuhkan diatas pegas yang dipasang vertikal pada bidang datar dari ketinggian 2 m. Apabila pegas yang digunakan mempunyai harga konstanta gaya pegas sebesar 500 N/m, hitunglah deformasi maksimum yang dialami oleh pegas tersebut

Diketahui $m = 0,5 \text{ kg}$ $h = 2 \text{ m}$ $k = 500 \text{ N/m}$

Ditanya : x

Jawab

$$E_{k_A} + E_{p_A} = E_{k_B} + E_{p_B}$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + m \cdot gh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + m \cdot gh_B$$

$$\frac{1}{2}v_A^2 + gh_A = \frac{1}{2}v_B^2 + gh_B$$

$$gh_A = \frac{1}{2}v_B^2$$

$$v_B^2 = 2 gh_A = 2 \cdot 10 \cdot 2 = 40 \frac{m^2}{s^2}$$

$$E_{M_A} = E_{M_B} = m \cdot g \cdot h_A = 0,5 \text{ kg} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 2m$$

$$= 10J = Ep'(\text{energi potensial pegas})$$

Dipergunakan untuk energy pegas

$$Ep' = \frac{1}{2} kx^2$$

$$x = \sqrt{\frac{2Ep'}{k}} = \sqrt{\frac{2.10J}{500 \text{ N/m}}} = 0,2 \text{ m}$$

Contoh soal impuls dan momentum

1. Kapal laut dengan bobot mati 20.000 ton bergerak dengan kecepatan 5 knot, hitunglah momentum dari kapal tersebut

Catatan : 1knot = 1 mile laut/jam = 1,852 km/jam

Diketahui

$$m = 20.000 \text{ ton} = 20.000.000 \text{ kg}$$

$$v = 5 \text{ knot} = 5 \cdot 1,852 \text{ km/jam} = \frac{5 \cdot 1,852 \cdot 1000 \text{ m}}{3600 \text{ detik}} = 2,57 \text{ m/s}$$

$$\text{momentum } p = mv = 20\,000\,000 \text{ kg} \cdot 2,57 \text{ m/s}$$

$$= 51.400.000 \text{ kg m/s} = 5,14 \cdot 10^7 \text{ kg m/s}$$

2. Sebuah mobil dengan masa 800 kg bergerak dengan kecepatan 72 km/jam. Tiba-tiba menabrak pohon dan berhenti dalam waktu

0,4 detik. Hitunglah gaya rata-rata yang bekerja pada mobil tersebut untuk menghentikannya

Diketahui:

$$m = 800 \text{ kg}, \quad v_0 = 72 \frac{\text{km}}{\text{jam}} = \frac{72 \cdot 1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 20 \text{ m/s}$$

$$v_1 = 0 \text{ m/s}$$

Jawab:

Impuls = perubahan momentum

$$F \cdot t = [mv - mv_0] = [m(v - v_0)]$$

$$= 800 \cdot 20 \text{ kg m/s} = 16.000 \text{ kg m/s}$$

Jadi gaya yang bekerja pada mobil tersebut

$$F = \frac{16.000 \text{ kg m/s}}{0,4 \text{ s}} = 40.000 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = 40.000 \text{ N} = 4 \cdot 10^4 \text{ N}$$

3. Truk dengan massa 2 ton sedang berhenti, bila ditabrak mobil lain dari belakang dengan kecepatan 54 km/jam. Sesudah tumbukan kedua benda gandeng bergerak bersama-sama (tumbukan tidak elastik). Jika mobil yang menabrak mempunyai masa 800 kg, hitung kecepatan kedua kendaraan setelah tumbukan tersebut

Diketahui:

$$m_1 = 2 \text{ ton} = 2000 \text{ kg} \quad v_1 = 0$$

$$m_2 = 800 \text{ kg} \quad v_2 = 54 \text{ km/jam} = 15 \text{ m/s}$$

Hukum kekekalan momentum untuk tumbukan tidak elastik ($e = 0$) Adalah

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$$

Maka kecepatan akhir kedua kendaraan adalah:

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{2000 \text{ kg} \cdot 0 \text{ m/s} + 800 \text{ kg}}{2000 + 800} = 4,3 \text{ m/s}$$

4. Sebuah bola masa 2,5 kg bergerak ke kanan dengan kecepatan 4 m/s. bola lain dengan masa 4 kg datang dari arah berlawanan dengan kecepatan 2 m/s. hitung kecepatan masing-masing bola sesudah tumbukan jika tumbukan yang terjadi elastik sempurna

Diketahui $m_1 = 2,5 \text{ kg}$ $v_1 = 4 \text{ m/s}$

$m_2 = 4 \text{ kg}$ $v_2 = -2 \text{ m/s}$

$$e = 1 = - \frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2} = - \frac{(v'_1 - v'_2)}{4 + 2}$$

$$v'_1 - v'_2 = -6 \rightarrow v'_1 = v'_2 - 6 \dots \dots (1)$$

Hukum Kekekalan Momentum

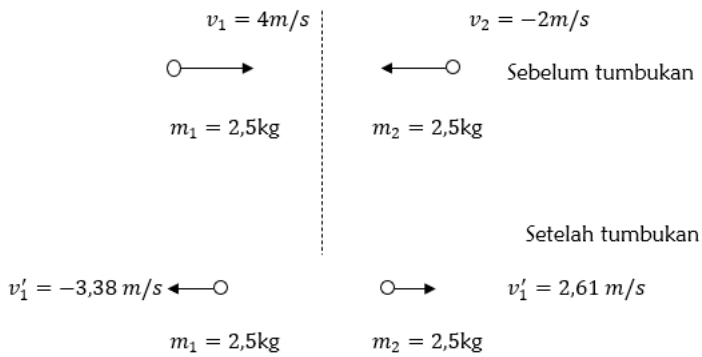
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

$$2,5 \cdot 4 + 4 \cdot (-2) = 2,5 (v'_2 - 6) + 4 \cdot v'_2$$

$$2 = 6,5 v'_2 - 15$$

$$17 = 6,5 v'_2 \rightarrow v'_2 = \frac{17}{6,5} = 2,61 \text{ m/s}$$

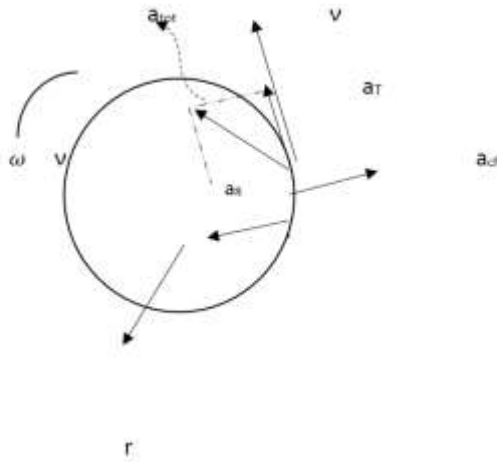
$$\text{Dari (1)} \rightarrow v'_1 \rightarrow v'_2 - 6 = 2,61 - 6 = -3,38 \text{ m/s}$$



BAGIAN 5

GERAK MELINGKAR

Gerak melingkar adalah gerakan dari suatu partikel dengan lintasan berbentuk lingkaran



Kecepatan :

- Kecepatan linier (v) adalah kecepatan yang arahnya selalu menyinggung (berimpit) dengan lintasan yang dilaluinya. Selalu tegak lurus arah jari-jarinya (m/s)
- Kecepatan sudut (ω): sudut yang ditempuh tiap satuan waktu (radian/s)

$$v = \omega r$$

Percepatan:

- Percepatan sudut (α) adalah perubahan kecepatan sudut tiap satuan waktu

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

- b. Percepatan tangensial (a_T) adalah percepatan yang searah dengan vector kecepatan (berimpit dengan lintasan)

$$a_T = \left(\frac{dv}{dt} \right)$$

$$a_T = \frac{d\omega r}{dt} = r\alpha$$

- c. Percepatan radial / centripetal/normal (a_R) adalah percepatan yang menuju pusat lingkaran, berfungsi untuk merubah vektor

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

- d. Percepatan total (a_{total}) adalah penjumlahan vektor dari percepatan radial dengan percepatan tangensial

$$a_{total} = \sqrt{a_R^2 + a_T^2}$$

- e. Percepatan centrifugal (a_{cf}): percepatan yang dirasakan oleh partikel yang mengalami melingkar (percepatan reaksi dari percepatan centripetal)

$$a_{cf} = -a_R = -\left(\frac{v^2}{r} \right) = -\omega^2 r$$

- f. Gaya sentripetal

$$F_s = m\alpha_s = m \frac{v^2}{R} = m\omega^2 R \quad [\text{N} = \text{newton}]$$

Perioda adalah waktu yang diperlukan untuk melintasi satu kali putaran penuh

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Frekuensi adalah jumlah putaran penuh yang dilakukan oleh benda tiap satuan waktu.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{V}{2\pi r} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\omega = 2\pi f, f = \frac{1}{T}$$

A. MACAM GERAK MELINGKAR

Gerak Melingkar Beraturan (GNB) ($\alpha = 0, \omega = \text{konstan}$)

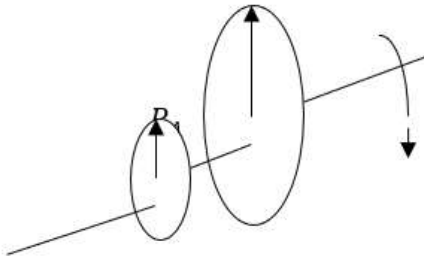
Gerak Melingkar Berubah Beraturan (GMBB) ($\alpha \neq 0, \alpha = \text{konstan / fungsi waktu}$)

GLB	GMB
$s = x = vt$	$\theta = \omega t$
GLBB	GMBB
$a = \frac{dv}{dt}$ $v = \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt}$ $v = v_0 \pm at$ $s = x = v_0 t \pm \frac{1}{2}at^2$ $v^2 = v_0^2 \pm 2a$	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ $\omega = \omega_0 \pm \alpha t$ $\theta = \omega_0 t \pm \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega^2 = \omega_0^2 \pm 2a\theta$

Penggunaan gerak melingkar beraturan

Hubungan antar roda-roda

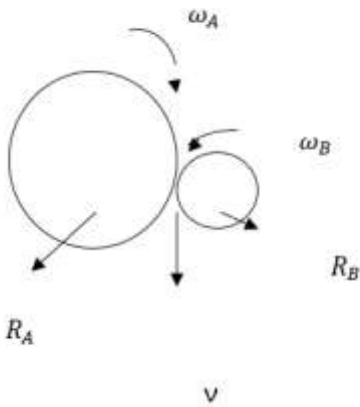
- Roda A dan B sepusat



$$\omega \quad \omega_A = \omega_B$$

$$\frac{v_A}{R_A} = \frac{v_B}{R_B}$$

- Roda A dan roda B bersinggungan



$$v_A = v_B$$

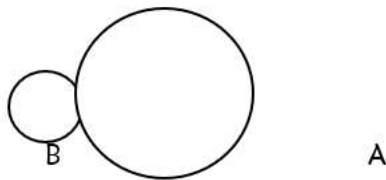
$$\omega_A R_A = \omega_B R_B$$

$$R_A > R_B \rightarrow \omega_A < \omega_B$$

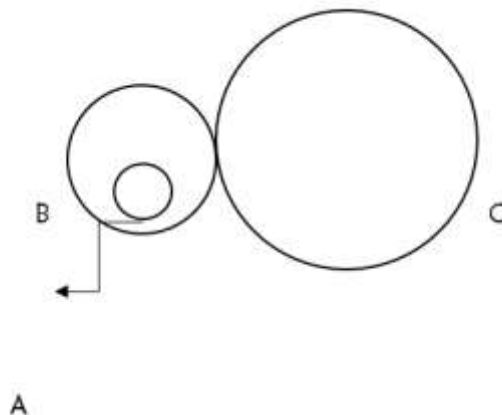
untuk jari-jari yang lebih kecil, kecepatan sudutnya lebih besar

Soal:

- Dua buah roda A dan B bersinggungan, jari-jari roda A 20 cm roda B 50 cm. Kecepatan linier roda A dan B adalah 20 m/s. Berapa kecepatan sudut roda A dan B?
- Pada gambar berikut, hitunglah kecepatan sudut dan kecepatan linier roda A



Gambar a



Gambar b

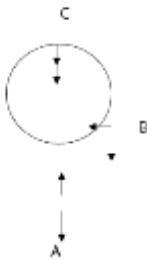
Diketahui:

Jari-jari roda A, B, dan C masing-masing 90 cm, 60 cm, dan 180 cm.

- Pada gambar (a) roda B berputar dengan frekuensi putar 30 rpm
- Pada gambar (b) roda C berputar dengan frekuensi putar 60 rpm

1. Gerak benda pada lingkaran vertical

Benda diikat pada tali dan diputar pada bidang vetikal



Arah tegangan tali (T) selalu menuju kepusat

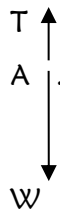
Gaya sentripetal adalah resultan gaya-gaya radial

$$F_s = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R$$

Gaya yang menuju pusat berharga positif

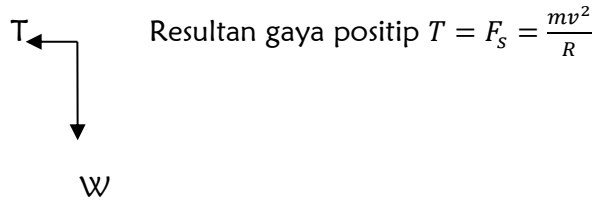
- Titik A (terendah)

$$\text{Resultan gaya positif } T - W = F_s = \frac{mv^2}{R}$$

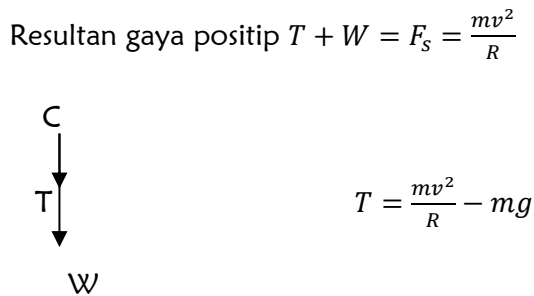


$$T = \frac{mv^2}{R} + mg$$

- Titik B



- Titik C (tertinggi)



Soal :

Sebuah benda dengan massa 20 kg diikat dengan tali panjangnya 2 meter lalu diputar didalam satu bidang vertikal kecepatan sudutnya 4 rad/s, dan percepatan gravitasi bumi 10 m/s². Hitung tegangan tali di titik tertinggi dan terendah.

Contoh Soal

1. Sebuah roda dengan diameter 40 cm berputar dengan frekuensi putar 120 rpm. Hitunglah kecepatan linier dan percepatan centripetal yang dialami roda tersebut.

Jawab: $d = 40 \text{ cm}$

$$r = \frac{d}{2} = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$$

$$f = 120 \text{ rpm} = \frac{120}{60} \text{ rps} = 2 \text{ rps}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 2 \frac{\text{rad}}{\text{det}} = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{detik}}$$

Kecepatan linier

$$v = \omega r = 4\pi \cdot 0,2 = 0,8\pi \text{ m/s}$$

Percepatan centripetal

$$a_R = \omega^2 r = (4\pi)^2 r = 16\pi^2 \cdot 0,2 = 3,2\pi^2 \text{ m/s}^2$$

2. Sebuah roda dipercepat beraturan, sehingga kecepatan sudutnya bertambah dari 30 rad/s menjadi 60 rad/s dalam waktu 10 detik. Hitunglah percepatan sudut dari sudut yang ditempuh dalam peristiwa tersebut. Selanjutnya jika jari-jari roda sebesar 30 cm, hitung jarak linier yang ditempuh roda.

Jawab:

$$\omega_0 = 30 \text{ rad/s} \quad \omega_t = 60 \text{ rad/s} \quad t = 10 \text{ s}$$

$$\omega_t = \omega_0 + \alpha t \rightarrow 60 = 30 + \alpha \cdot 10 \quad \alpha = \frac{30}{10} = 3 \text{ rad/s}^2$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 = 30 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^2 = 300 + 150 = 450 \text{ rad}$$

$$R = 30 \text{ cm} = 0,3 \text{ m} \rightarrow S = \theta R = 450 \cdot 0,3 \text{ m} = 135 \text{ m}$$

Jarak linier yang ditempuh adalah 135 meter

3. Sebuah disk dengan diameter 20 cm berputar dengan frekuensi putar 90 rpm. Saat sumber dimatikan, dalam waktu 30 detik disk tersebut berhenti. Hitunglah percepatan sudut dan percepatan tangensial pada disk tersebut. Selanjutnya hitung percepatan radial yang dialami disk saat 15 detik.

Jawab: $d = 20 \text{ cm} \rightarrow r = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$

$$f = 90 \text{ rpm} = \frac{90}{60} \text{ rps} = \frac{3}{2} \text{ rps}$$

$$\omega_0 = 2\pi f = 2\pi \cdot \frac{3}{2} \text{ rad/s} = 3\pi \text{ rad/s}$$

$$t = 30 \text{ detik} \quad \omega_t = 0$$

Percepatan sudut

$$\alpha = \frac{\omega_t - \omega_0}{t} = \frac{0 - 3\pi}{30} = -0,1\pi \text{ rad/s}^2$$

Percepatan tangensial

$$a_T = r \alpha = 0,1(-0,1\pi) = -0,01\pi \text{ m/s}^2$$

$$t = 15 \text{ detik} \quad \omega_t = \omega_0 + \alpha t$$

$$\omega_t = 30\pi + (-0,1\pi) \cdot 15$$

$$\omega_t = 3\pi - 1,5\pi = 1,5\pi$$

Percepatan radial

$$a_R = \omega^2 r = (1,5\pi)^2 \cdot 0,1 = 0,225\pi^2 \text{ m/s}^2$$

4. Sebuah titik mengalami lintasan lingkaran dengan persamaan $s = t^3 + 2t^2$, s dalam detik meter t dalam detik. Jika pada saat $t = 2$ detik, percepatan total yang dialami oleh titik tersebut sebesar $(16\sqrt{2}) \text{ m/s}^2$. Hitung jari-jari lintasan yang dialami oleh titik tersebut.

Jawab:

$$s = t^3 + 2t^2$$

$$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 + 4t$$

$$t = 2 \text{ detik}, v = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 12 + 8 = 20 \text{ m/s}$$

$$a_{tot} = 16\sqrt{2} \text{ m/s}^2 = \sqrt{a_R^2 + a_T^2}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 + 4t) = 6t + 4$$

$$t = 2 \text{ detik} \rightarrow a_T = 6 \cdot 2 + 4 = 12 + 4 = 16 \text{ m/s}^2$$

$$(16\sqrt{2})^2 = a_R^2 + 16^2$$

$$512 = a_R^2 + 256$$

$$a_R^2 = 512 - 256 = 256$$

$$a_R = \sqrt{256} = 16 \text{ m/s} = \frac{v^2}{r}$$

$$r = \frac{v^2}{a_R} = \frac{20^2}{16} = 25 \text{ m}$$

Jadi jari-jari lintasan yang dialami oleh titik tersebut

5. Sebuah roda mula-mula diam dipercepat beraturan sehingga 10 detik kemudian kecepatannya menjadi 90 rpm, dan selanjutnya roda dibiarkan berputar dengan kecepatan konstan selama 5 menit. Akhirnya roda direm dan dalam waktu 30 detik, roda tersebut berhenti. Jika diameter roda tersebut sebesar 80 cm, hitunglah jarak linier yang ditempuh oleh roda tersebut.

Jawab:

$$I. \omega_0 = 0 \quad \text{GMBB}$$

$$t = 10 \text{ s}$$

$$\omega_t = 90 \text{ rpm} = \frac{90 \cdot 2\pi}{60} \text{ rad/s} = \frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3\pi \text{ rad/s}$$

$$\omega_t = \omega_0 + \alpha t$$

$$3\pi = 0 + \alpha \cdot 10 \rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{10} = 0,3\pi \text{ rad/s}^2$$

$$\theta_1 = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 = 0 + \frac{1}{2} (0,3\pi) \cdot 10^2 = 15\pi \text{ rad}$$

II. GMB

$$\omega = 3\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad t = 5 \text{ menit} = 5 \cdot 60 = 300 \text{ detik}$$

$$\theta_2 = \omega t = 3\pi \cdot 300 = 900 \text{ rad}$$

III. GMBB

$$\omega_0 = 3\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad t = 30 \text{ s}$$

$$\begin{aligned}\omega_t &= 0 & \omega_t &= \omega_0 + \alpha t \\ 0 &= 3\pi + \alpha \cdot 30\end{aligned}$$

$$\alpha = -\frac{3\pi}{30} = -0,1\pi \text{ rad/s}^2$$

$$\theta_3 = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 = 3\pi \cdot 30 + \frac{1}{2} \cdot (-0,1\pi) 30^2$$

$$\theta_3 = 90\pi - 45\pi = 45\pi \text{ rad}$$

Diameter $d = 80 \text{ cm} \rightarrow$ jari2 $r = 40 \text{ cm} = 0,4 \text{ m}$

$$s = r(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = 0,4(15 + 900 + 45)\pi = 0,4 \cdot 960 \cdot 3,14 = 125,8 \text{ m}$$

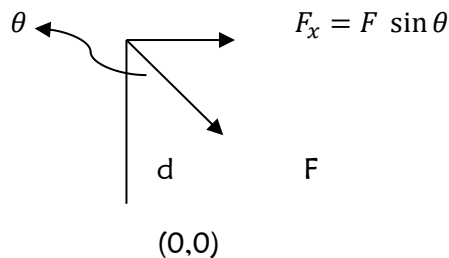
Maka jarak linier yang ditempuh 125,8 meter

BAGIAN 6

GERAK ROTASI BENDA TEGAR (*RIGID BODY*)

Benda tegar adalah benda yang tidak mengalami perubahan bentuk dan volume selama bergerak. Umumnya benda yang bergerak akan mengalami 2 macam gerakan yaitu gerak translasi dan rotasi.

Gerak rotasi terjadi bila gaya yang bekerja pada benda tidak melalui pusat massa benda, sehingga terjadi momen gaya. Momen gaya (torsi) terhadap suatu titik adalah hasil kali gaya tersebut dengan jarak titik terhadap gaya



F adalah gaya [N]

$(0,0)$ adalah pusat massa

d adalah lengan momen (m)

θ adalah sudut antara lengan momen dengan gaya [rad]

τ adalah momen gaya [N m]

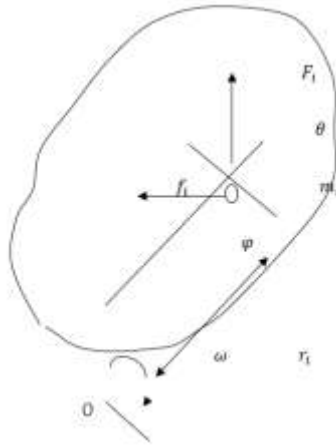
$$\tau = \vec{d} \times \vec{F} = F d \sin \theta$$

Hubungan antara gerak translasi and rotasi

Besaran	Gerak translasi	Gerak rotasi	relasi
Kecepatan rata-rata	$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$	$v = \omega R$
Percepatan rata-rata	$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t}$	$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t}$	$a = \alpha R$
Gerak berubah beraturan	$v_t = v_0 + at$ $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\omega_t = \omega_0 + \alpha t$ $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$s = \theta R$
Hukum Newton II	$F = m a$	$\tau = I \alpha$	$F = \frac{\tau}{R}$
Usaha / kerja	$W = F s$	$W = \tau \theta$	
Daya	$P = F v$	$P = \tau \omega$	
Energi kinetik	$E_K = \frac{1}{2}mv^2$	$E_K = \frac{1}{2}I\omega^2$	
Momentum	$p = m v$	$L = I \omega$	$p = \frac{L}{R}$
Impuls	$i = F \Delta t$	$H = \tau \Delta t$	$i = \frac{H}{R}$
Massa	m	I	$m = \frac{I}{R^2}$

Momen inersia dan torsi :

Didalam benda yang berputar



Pada m_i bekerja 2 gaya F_i (gaya luar) dan f_i (gaya dalam). f_i adalah resultan gaya-gaya yang dikerjakan oleh semua elemen-elemen massa lainnya didalam benda itu.

Hukum Newton II

$$\sum (\vec{F}_i + \vec{f}_i) = m_i \vec{a}_i$$

Radial

$$F_i \cos \theta_i + f_i \cos \varphi_i = m_i a_{iR} = 0,$$

karena benda tidak bergerak kearah tangensial (benda tegar)

Tangensial

$$F_i \sin \theta_i + f_i \sin \varphi_i = m_i a_{iT} = m_i r_i \alpha, \text{ dikalikan } r_i$$

$$F_i r_i \sin \theta_i + f_i r_i \sin \varphi_i = m_i r_i^2 \alpha, \text{ untuk 1 elemen massa}$$

α , percepatan sudut untuk semua elemen sama

$F_i r_i \sin \theta_i$ adalah momen gaya luar

$f_i r_i \sin \varphi_i$ adalah momen gaya dalam

Untuk semua elemen ;

Jumlah momen gaya luar + jumlah momen gaya dalam = $\sum m_i r_i^2 \alpha$

Jumlah momen gaya luar = torsi (τ)

jumlah momen gaya dalam = 0, karena benda tegar

$$\sum m_i r_i^2 \alpha = \left(\sum m_i r_i^2 \right) \alpha = I \alpha$$

Jadi $I = \sum m_i r_i^2$ = momen inersia.

Suatu benda yang bergerak memutar terhadap suatu sumbu tertentu, mempunyai kecepatan linier (v) dan kecepatan sudut (ω), energi kinetiknya linier

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

energi kinetik rotasi

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

I adalah momen kelembaman dari benda tersebut.

Untuk benda diskrit

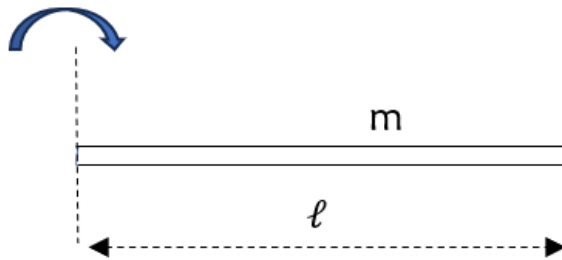
$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Untuk benda kontinu

$$I = \int r^2 dm$$

Perhitungan Momen Kelembaman (I)

1. Sebuah tongkat tipis panjangnya ℓ dan masa m , diambil sumbu yang tengah lurus pada salah satu ujungnya, maka



$$\Delta m = \frac{\Delta x}{\Delta \ell} \cdot m$$

Untuk Δx kecil $\rightarrow dx$, maka $\Delta m \rightarrow dm$

$$dm = \frac{m}{\ell} dx$$

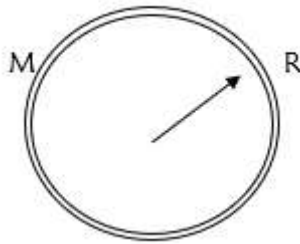
$$I = \int r^2 dm = \int_0^\ell x^2 \frac{m}{\ell} dx = \frac{m}{\ell} \int_0^\ell x^2 dx$$

$$I = \frac{m}{\ell} \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^\ell = \frac{m}{\ell} \left(\frac{1}{3} (\ell^3 - 0^3) \right)$$

$$I = \frac{1}{3} m \ell^2$$

Maka momen kelembaman tongkat tipis panjangnya ℓ dan masa m adalah $I = \frac{1}{3} m\ell^3$

2. Sebuah silinder lempeng tipis berbentuk cakram dengan masa M dan jari-jari R , hitung momen kelembaman terhadap sumbu dari pusat lempung tengah lurus lempung tersebut.



$$dL = 2\pi r dr \rightarrow \text{luas} \quad dv = 2\pi r h dr$$

$$dv = h dL \rightarrow \text{volume}$$

h = tebal lempeng

Densitas $\rho = \frac{M}{v} \rightarrow M = \rho v$, untuk masa yang kecil

$$dM = \rho dV = \rho 2\pi r h dr$$

Momen Kelembaman R

$$\begin{aligned} I &= \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho h (2\pi r) dr \\ &= 2\pi \rho h \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho h \frac{1}{4} r^4 \bigg|_0^R \\ &= 2\pi \rho h \cdot \frac{1}{4} R^4 \\ &= 2\pi \frac{M}{v} h \frac{1}{4} R^4 = \frac{\pi h R^2}{V} \left(\frac{1}{2} M R^2 \right) \end{aligned}$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

Maka momen kelembaman silinder lempeng tipis berbentuk cakram dengan masa M dan jari-jari R adalah $I = \frac{1}{2} MR^2$

Momen Kelembaman Beberapa Benda

- Silinder Pejal berputar terhadap sumbunya, m = masa silinder, R adalah jari-jari silinder

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

- Bola Pejal berputar pada garis potong pusat, m= masa bola, R adalah jari-jari bola

$$I = \frac{2}{5}mR^2$$

- Silinder Berongga berputar terhadap sumbunya m adalah massa silinder, R_1 adalah jari-jari dalam dan R_2 = jari-jari luar

$$I = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)$$

- Kulit Silinder (berbanding tipis) berputar terhadap sumbunya dan R adalah jari-jari silinder

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

- Tongkat Tipis berputar melalui pusat tongkat m adalah massa tongkat dan ℓ adalah panjang tongkat

$$I = \frac{1}{2}m\ell^2$$

- Tongkat tipis berputar terhadap sumbu melalui bagian tepi tongkat ℓ adalah panjang tongkat dan m adalah massa tongkat

$$I = \frac{1}{2} m \ell^2$$

Soal :

1. Tiga benda kecil yang dapat dianggap sebagai titik-titik materi dihubungkan oleh batang kaku yang massanya diabaikan. Berapa momen inersia sistem ini
 - a. Terhadap sumbu yang melalui titik A
 - b. Terhadap sumbu yang berhimpit dengan batang AC.
2. Tentukan momen inersia sebuah batang terhadap sebuah sumbu melalui O, yang tegak lurus batang
 - a. Pada jarak L dari salah satu ujungnya
 - b. Pada tengah batang.

Nilai dari momen inersia untuk benda2 yang teratur bentuknya bisa dilihat di Tabel momen inersia

Contoh soal

1. Sebuah silinder pejal dengan masa 2 kg dan jari-jari 20 cm menggelinding pada bidang datar dengan kecepatan linier 10 m/s. Hitunglah energi kinetik yang dimiliki oleh silinder tersebut. Jika selanjutnya, silinder menabrak dinding tengah dan terpantul kembali dengan kecepatan linier 8 m/s. Hitunglah energi yang hilang karena peristiwa tumbukan tersebut.

Diketahui : silinder pejal $m = 2 \text{ kg}$ $r = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$

$$v_1 = 10 \text{ m/s}$$

$$v_2 = 8 \text{ m/s}$$

Ditanyakan : E_k dan Energi yang hilang

Jawab : $v_1 = 10 \text{ m/s}$ $\omega_1 = \frac{v_1}{r} = \frac{10}{0,2} = 50 \text{ rad/s}$

$r = 0,2 \text{ m}$

$$E_k = E_k \text{ linier} + E_k \text{ rotasi}$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

$$I_1 = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (0,2)^2 = 0,04 \text{ kg/m}^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^2 + \frac{1}{2} \cdot 0,04 \cdot 50^2 = 100 + 50 = 150 \text{ j}$$

$v_2 = 8 \text{ m/s}$ $\omega_2 = \frac{v_2}{r} = \frac{8}{0,2} = 40 \text{ rad/s}$

$r = 0,2 \text{ m}$

$$E'_k = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2$$

$$E'_k = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8^2 + \frac{1}{2} \cdot 0,04 \cdot 40^2 = 96 \text{ j}$$

Jadi energi yang hilang $E_k - E'_k = 150 - 96 = 54 \text{ j}$

2. Bola pejal dengan masa 2 kg, dari keadaan diam digelindingkan dari puncak bidang miring setinggi 2m. Hitunglah kecepatan linier bola saat melewati bidang miring. Selanjutnya jika bola dan

silinder pejal serentak digelindingkan dari puncak bidang miring, mana yang lebih dulu sampai di kaki bidang miring.

Diketahui : Bola pejal $m = 2\text{ kg}$ $v_0 = 0$ $h = 2\text{ m}$

Ditanyakan : $v_{\text{bola}} = \dots$

Silinder pejal $v_{\text{silinder}} = \dots$

Jawab :

$$I_{\text{bola}} = \frac{2}{5}mR^2 \quad \text{dan} \quad I_{\text{silinder}} = \frac{1}{2}mR^2$$

$$E_A = E_b$$

$$mgh = E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

BOLA

$$2 \cdot 10 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot 2 \cdot r^2 \left(\frac{v^2}{r^2} \right)$$

$$40 = v^2 + \frac{2}{5}v^2 = \frac{7}{5}v^2$$

$$v^2 = \frac{5 \cdot 40}{7} = \frac{200}{7} \rightarrow v = 5,345 \text{ m/s}$$

SILINDER

$$2 \cdot m \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \left(\frac{v^2}{r^2} \right)$$

$$4 = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{4}v^2 = \frac{3}{4}v^2$$

$$v^2 = \frac{4 \cdot 4}{3} = 5,3 \rightarrow v = 2,3094 \text{ m/s}$$

Bola yang lebih dahulu sampai.

3. Ulangi soal no 1 di atas bila benda yang menggelinding berupa bola pejal. Masa dari jari-jari dan bola pejal sama dengan silinder pejal dalam soal no. 1 diatas.

Diketahui : Bola pejal $m = 2\text{ kg}$ $r = 0,2\text{ m}$

$$v_1 = 10\text{ m/s} \quad v_2 = 8\text{ m/s}$$

Ditanyakan : E_k dan Energi yang hilang

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mR^2 \cdot 50^2 \\ &= 10^2 + 500 \cdot 2 \cdot 0,2^2 = 100 + 40 = 140\text{ J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E'_k &= \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot 2 \cdot 0,2^2 \cdot 40^2 \\ &= 64 + 25,6 = 89,6\text{ J} \end{aligned}$$

$$\Delta E_k = 140 - 89,6 = 50,4$$

Jadi energi yang hilang adalah 50,4 J

4. Sebuah bola pejal dengan masa 2 kg menggelinding pada dinding datar dengan kecepatan linier sebesar 8 m/s. Tiba-tiba menaiki bidang miring dengan sudut kemiringan terhadap bidang datar sebesar 30° . Sampai sejauh mana bola pejal tersebut dapat menaiki bidang miring sampai berhenti?

Selanjutnya bandingkan hasilnya jika bola pejal diganti dengan silinder pejal dengan masa dan jari-jari sama besar dengan bola pejal.

Diketahui: $m = 2\text{ kg}$

$$v = 8 \text{ m/s}$$

Ditanyakan : $s = \dots?$ $\theta = 30^\circ$

Jawab:

$$E_{MA} = E_{MB}$$

$$E_{PA} + E_{KLA} + E_{KRA} = E_{PB} + E_{KLB} + E_{KRB}$$

$$mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}I\omega_A^2 = mgh_B + 0 + 0$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mR^2 \frac{v_A^2}{R^2} = 2mgh_B$$

$$\frac{1}{2} \cdot 8^2 + \frac{8^2}{5} = 10 \cdot h$$

$$\frac{64}{2} + \frac{64}{5} = 10h \rightarrow$$

$$32 + 12,8 = 10h$$

$$h = \frac{44,8}{10} = 4,48 \text{ m}$$

$$s = \frac{h}{\sin 30} = \frac{4,48}{1/2} = 8,96 \text{ m}$$

Silinder

$$mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}I\omega_A^2 = mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}I\omega_B^2$$

$$0 + \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mR^2 \frac{v_A^2}{R^2} = mgh + 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot 8^2 + \frac{1}{4} \cdot 8^2 = 10 \cdot h$$

$$\frac{64}{2} + \frac{64}{4} = 10h$$

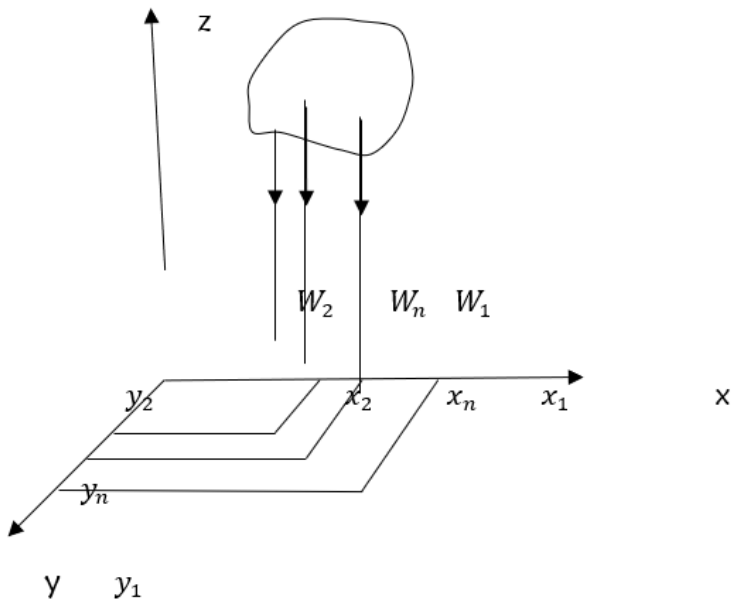
$$32 + 12,8 = 10h \rightarrow h = \frac{48}{10} = 4,8m$$

$$s = \frac{h}{\sin 30} = \frac{4,8}{1/2} = 4,6 m$$

Jadi bola pejal tersebut dapat menaiki bidang miring sampai berhenti adalah sepanjang 8,96 m dan silinder dapat menaiki bidang miring sampai berhenti adalah sepanjang 4,6 m

Titik berat

Bila sebuah benda terletak pada suatu ruang maka setiap titik dalam benda tersebut akan mendapat gaya berat yang arahnya selalu menuju ke pusat bumi.



Resultan dari gaya berat = berat benda itu

$$W = \sum W_i = W_1 + W_2 + \dots W_n$$

Titik tangkap dari gaya berat disebut titik berat (x_c, y_c, z_c)

Untuk menentukan titik berat suatu gaya digunakan momen gaya

Titik berat benda-benda yang tidak homogen (berat jenis tidak sama)

$$\begin{aligned} W x_c &= \sum W_i x_i & W y_c &= \sum W_i y_i & W z_c &= \sum W_i z_i \\ x_c &= \frac{\sum W_i x_i}{W} = \frac{\sum W_i x_i}{\sum W_i} = \frac{W_1 x_1 + W_2 x_2 + \dots + W_n x_n}{W_1 + W_2 + \dots + W_n} \\ y_c &= \frac{\sum W_i y_i}{W} = \frac{\sum W_i y_i}{\sum W_i} = \frac{W_1 y_1 + W_2 y_2 + \dots + W_n y_n}{W_1 + W_2 + \dots + W_n} \\ z_c &= \frac{\sum W_i z_i}{W} = \frac{\sum W_i z_i}{\sum W_i} = \frac{W_1 z_1 + W_2 z_2 + \dots + W_n z_n}{W_1 + W_2 + \dots + W_n} \end{aligned}$$

Untuk benda homogen (berat jenis sama) :

- Untuk benda 3 dimensi $\rho = \frac{W}{V} \rightarrow W = \rho V$ ρ : berat persatuan volume

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum \rho V_i x_i}{\sum \rho V_i} = \frac{\sum V_i x_i}{\sum V_i} = \frac{V_1 x_1 + V_2 x_2 + \dots}{V_1 + V_2 + \dots} \\ y_c &= \frac{\sum \rho V_i y_i}{\sum \rho V_i} = \frac{\sum V_i y_i}{\sum V_i} = \frac{V_1 y_1 + V_2 y_2 + \dots}{V_1 + V_2 + \dots} \end{aligned}$$

$$z_c = \frac{\sum \rho V_i z_i}{\sum \rho V_i} = \frac{\sum V_i z_i}{\sum V_i} = \frac{V_1 z_1 + V_2 z_2 + \dots}{V_1 + V_2 + \dots}$$

- Untuk benda 2 dimensi $\rho = \frac{W}{A} \rightarrow W = \rho A$ ρ : berat persatuan luas

$$x_c = \frac{\sum \rho A_i x_i}{\sum \rho A_i} = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots}{A_1 + A_2 + \dots}$$

$$y_c = \frac{\sum \rho A_i y_i}{\sum \rho A_i} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots}{A_1 + A_2 + \dots}$$

$$z_c = \frac{\sum \rho A_i z_i}{\sum \rho A_i} = \frac{\sum A_i z_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2 + \dots}{A_1 + A_2 + \dots}$$

- Untuk benda 1 dimensi $\rho = \frac{W}{L} \rightarrow W = \rho L$ ρ : berat persatuan panjang

$$x_c = \frac{\sum \rho L_i x_i}{\sum \rho L_i} = \frac{\sum L_i x_i}{\sum L_i} = \frac{L_1 x_1 + L_2 x_2 + \dots}{L_1 + L_2 + \dots}$$

$$y_c = \frac{\sum \rho L_i y_i}{\sum \rho L_i} = \frac{\sum L_i y_i}{\sum L_i} = \frac{L_1 y_1 + L_2 y_2 + \dots}{L_1 + L_2 + \dots}$$

$$z_c = \frac{\sum \rho L_i z_i}{\sum \rho L_i} = \frac{\sum L_i z_i}{\sum L_i} = \frac{L_1 z_1 + L_2 z_2 + \dots}{L_1 + L_2 + \dots}$$

Titik pusat massa

Karena $W = m g$, maka

$$x_c = \frac{\sum W_i x_i}{W} = \frac{\sum m_i g x_i}{\sum m_i g} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$

$$y_c = \frac{\sum W_i y_i}{W} = \frac{\sum m_i g y_i}{\sum m_i g} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$$

$$z_c = \frac{\sum W_i z_i}{W} = \frac{\sum m_i g z_i}{\sum m_i g} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

Untuk benda homogen titik pusat massa berhimpit dengan titik berat.

Untuk benda yang kontinyu (merupakan fungsi matematis) maka titik berat / titik pusat massa berbentuk integral :

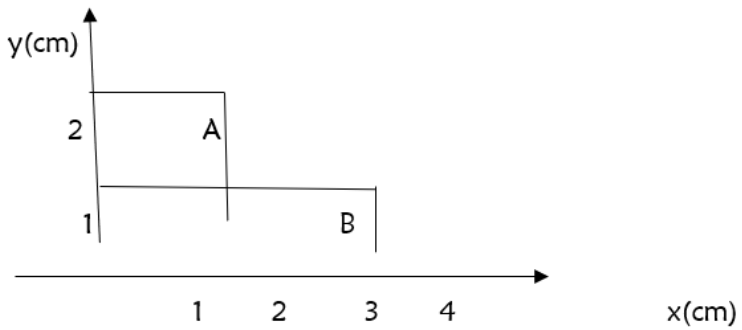
$$x_c = \frac{\int x \, dm}{\int dm}, \quad x_c = \frac{\int x \, dV}{\int dV}, \quad x_c = \frac{\int x \, dA}{\int dA}, \quad \text{dan} \quad x_c = \frac{\int x \, dL}{\int dL}$$

$$y_c = \frac{\int y \, dm}{\int dm}, \quad y_c = \frac{\int y \, dV}{\int dV}, \quad y_c = \frac{\int y \, dA}{\int dA}, \quad \text{dan} \quad y_c = \frac{\int y \, dL}{\int dL}$$

$$z_c = \frac{\int z \, dm}{\int dm}, \quad z_c = \frac{\int z \, dV}{\int dV}, \quad z_c = \frac{\int z \, dA}{\int dA}, \quad \text{dan} \quad z_c = \frac{\int z \, dL}{\int dL}$$

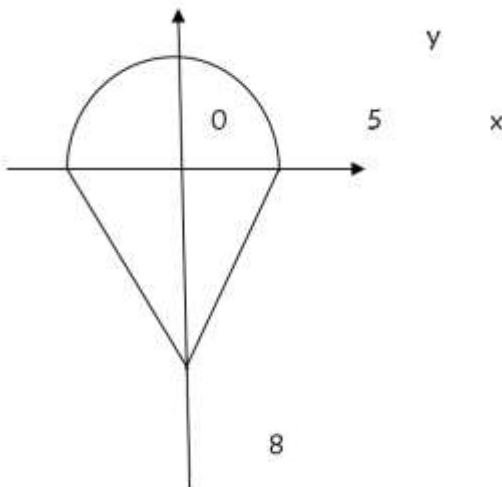
Soal

1.



Hitunglah koordinat titik berat benda A dan B yang berbentuk keping homogen seperti gambar diatas.

2.



Sebuah benda pejal homogen dari atas kebawah terdiri dari setengah bola yang direkatkan pada bidang alas kerucut. Jari-jari bola 5 cm tinggi kerucut 8 cm. tentukan letak titik berat benda terhadap perpotongan setengah bola dengan kerucut.

A. KESETIMBANGAN

Benda dikatakan dalam keadaan setimbang bila gaya-gaya yang bekerja tidak mengubah keadaan translasi dan rotasi benda. Jika benda selalu berada pada keadaan awalnya (diam atau bergerak lurus beraturan), dikatakan benda dalam keadaan kesetimbangan translasi. Jika gaya-gaya luar tidak menyebabkan benda berotasi (berotasi dengan kelajuan sudut konstan), dikatakan benda dalam keadaan kesetimbangan rotasi.

Kesetimbangan translasi (kondisi benda diantara GLB)

$$\Sigma F = 0 \text{ atau } \Sigma F_x = 0 \text{ dan } \Sigma F_y = 0$$

Kesetimbangan Rotasi (kondisi benda diam atau GMB)

$$\Sigma F = 0 \text{ atau } \Sigma F_x = 0 \text{ dan } \Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma \tau = 0$$

τ adalah Torsi (momen gaya)

$$\tau = F \cdot d$$

Suatu benda tegar dikatakan seimbang memenuhi :

jumlah gaya = jumlah momen gaya = 0

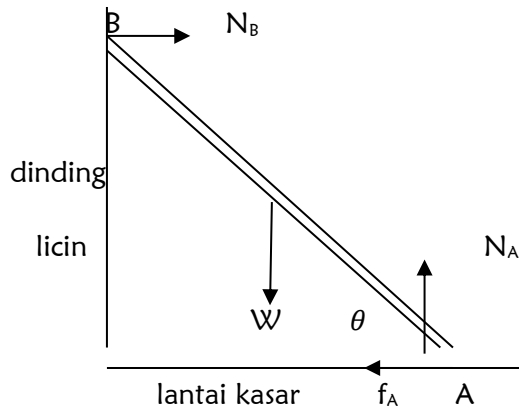
$$\sum F = 0 \text{ dan } \sum \tau = 0.$$

Jadi benda dalam keadaan seimbang akan mempunyai 2 kemungkinan, yaitu :

- Diam ($v = 0$ dan $\omega = 0$) atau
- Bergerak lurus beraturan ($v = c$, $\omega = c$, $a = \alpha = 0$)

v kecepatan linier, ω kecepatan sudut, a percepatan linier, α percepatan sudut dan c adalah konstanta.

Batang homogen AB dengan berat W bersandar pada tembok licin dan lantai kasar



Gaya gaya yang berpengaruh :

- N_A gaya normal lantai
- N_B gaya normal tembok

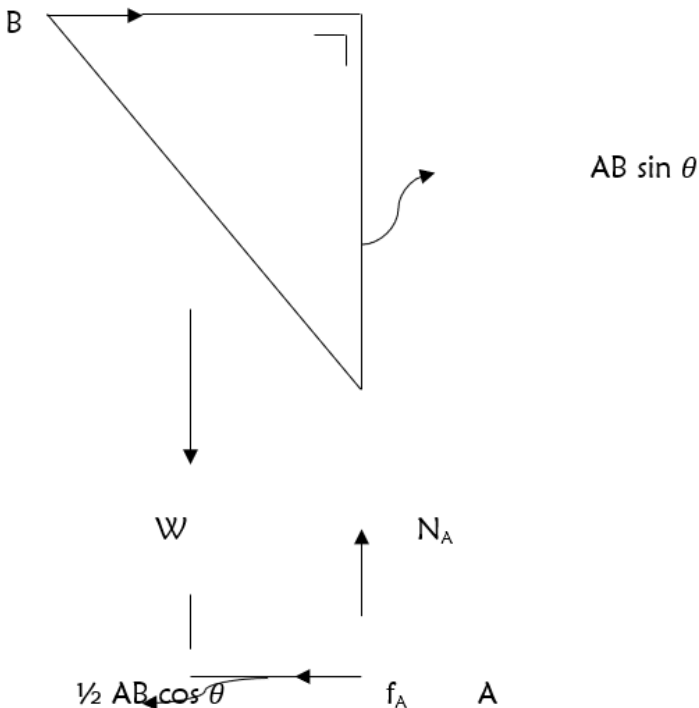
- W gaya berat
- f_A gaya gesekan lantai, karena lantai kasar

Batang AB seimbang $\sum F = 0$ dan $\sum \tau = 0$

Jumlah gaya searah sumbu x : $\sum F_x = 0 \rightarrow N_B - f_A = 0$

Jumlah gaya searah sumbu y : $\sum F_y = 0 \rightarrow N_A - W = 0$

Jumlah momen dititik A : $\sum \tau_A = 0 \rightarrow AB \sin \theta N_B - \frac{1}{2} AB \cos \theta W = 0$



Gaya gesekan $f_A = \mu_A N_A$ $f_B = \mu_B N_B$

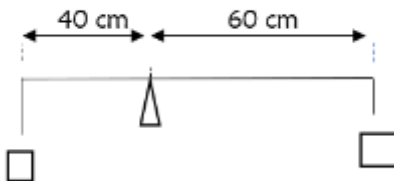
Soal : Batang AB homogen panjang 12 cm, berat 200 N bersandar vertikal pada dinding yang licin di B dan bertumpu pada lantai datar di A yang kasar seperti gambar. Hitunglah

- Besar gaya normal di A dan di B
- Koefisien gesekan di A.

Contoh soal

Latihan

- Sebuah tongkat degan panjang 1 m dengan masa diabaikan, pada jarak 40 dari ujung kiri diberi tumpuan (lihat gambar). Jika pada ujung kiri digantungi beban 4 kg, hitung masa beban ujung kanan agar tetap dalam kondisi seimbang.



$$\Sigma \tau = 0$$

$$0,6 \text{ m} \cdot W_B - 0,4 \text{ m} \cdot W_A = 0$$

$$0,6 \text{ m} \cdot m_B \cdot g - 0,4 \text{ m} \cdot m_A \cdot g = 0$$

$$m_B = \frac{0,4 \text{ m} \cdot 4 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2}{0,6 \text{ m} \cdot 10 \text{ m/s}^2}$$

$$= \frac{0,4}{0,6} \cdot 4 \text{ kg} = 2,67 \text{ kg}$$

Jadi masa beban ujung kanan adalah 2,67 kg

2. Sebuah jembatan homogen dengan panjang 2 m dan masa 100 kg, ditumpu pada kedua ujungnya. Seorang anak dengan masa 50 gr berjalan dari salah satu ujung jembatan ke ujung yang lain. Tentukan gaya reaksi masing-masing tumpuan sebagai fungsi posisi anak tersebut. Selanjutnya hitung gaya reaksi kedua tumpuan saat posisi anak 50 cm dari salah satu tumpuan jembatan.

$$\ell = 2m \quad W = m.g$$

$$m_1 = 100 \text{ kg} \quad W_1 = 100 \cdot 10 \text{ N}$$

$$m_2 = 50 \text{ kg} \quad W_2 = 50 \cdot 10 \text{ N}$$

$$\Sigma \tau_A = 0 \quad x W_2 + 1 W_1 - 2 N_B = 0$$

$$x \cdot 50 \cdot 10 + 1 \cdot 100 \cdot 10 - 2 N_B = 0$$

$$500x + 1000 = 2 N_B$$

$$N_B = \frac{500x + 1000}{2} = 250x + 500$$

$$\Sigma \tau_B = 0 \quad 2.N_A - (2 - x) W_2 - 1 W_1 = 0$$

$$2.N_A - (2 - x) 50 \cdot 10 - 100 \cdot 10 = 0$$

$$2.N_A = (2 - x) 500 + 1000$$

$$N_A = \frac{(2 - x) 500x + 1000}{2}$$

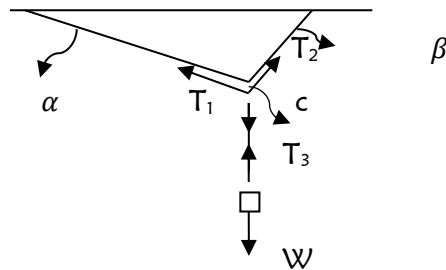
$$N_A = (2 - x) 250 + 500$$

$$x = 50 \text{ cm} = 0,5 \text{ m}$$

$$N_A = (2 - 0,5) 250 + 500 = 1,5 \cdot 250 + 500 = 875 \text{ N}$$

$$N_B = 250x + 500 = 250 \cdot 0,5 + 500 \\ = 625$$

3. Hitunglah gaya tegangan-tegangan tali pada gambar berikut
(masa beban = 5 kg)



$$\text{alfa} = 30^\circ$$

$$\frac{T_1}{\sin a} = \frac{T_2}{\sin b} = \frac{T_3}{\sin c}$$

$$\text{beta} = 60^\circ$$

$$c = 180 - (30 + 60) \\ = 90^\circ$$

$$\frac{T_1}{\sin 30} = \frac{T_2}{\sin 60} = \frac{T_3}{\sin 90} = \frac{W}{\sin 90}$$

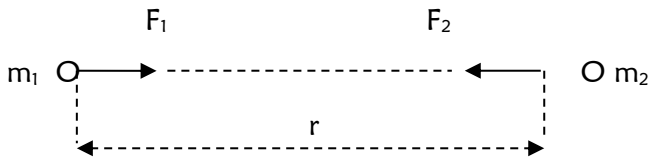
$$\frac{T_1}{\frac{1}{2}} = \frac{T_3}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{W}{1} \rightarrow T_1 = \frac{W}{2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ N}$$

$$\frac{T_2}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = W \rightarrow T_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot W = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot \sqrt{3} = 25\sqrt{3} \text{ N}$$

B. GAYA GRAVITASI

1. Hukum Newton tentang gravitasi :

Setiap partikel di alam semesta akan menarik partikel lain dengan gaya yang besarnya berbanding lurus dengan massa partikel itu dan berbanding terbalik dengan kuadrat jarak antara kedua partikel



$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

F gaya tarik menarik [N]

m_1, m_2 massa masing-masing partikel [kg]

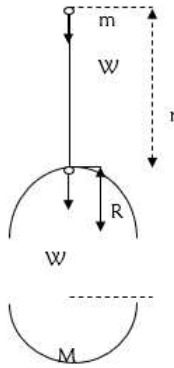
R jarak antara kedua partikel [m]

G konstanta gravitasi = $6,673 \times 10^{-11} \left[\frac{Nm^2}{kg^2} \right]$

2. Percepatan gravitasi bumi

Pengaruh rotasi bumi terhadap benda sangat kecil, sehingga berat benda adalah merupakan gaya tarik bumi yang bekerja pada benda tersebut.

Bila massa benda m dan massa bumi M , maka besar percepatan gravitasi di permukaan bumi Adalah



$$W = m g \text{ dan } F = \frac{G m M}{r^2} \text{ sedangkan } W = F, \text{ maka } m g = \frac{G m M}{r^2} \text{ atau } g = \frac{G M}{r^2}$$

m massa benda [kg]

M massa bumi [kg]

R jari-jari bumi [m]

r jarak benda dengan pusat bumi [m]

W berat benda [N]

g percepatan gravitasi bumi [m/s^2]

percepatan gravitasi untuk benda berjarak r dari pusat bumi $g = \frac{G M}{r^2}$

percepatan gravitasi untuk benda pada permukaan bumi

$$g = \frac{G M}{R^2}$$

Soal :

1. Bumi mempunyai massa $5,97 \times 10^{24}$ kg dan jari-jari $6,37 \times 10^6$ m. sebuah benda massanya 2 kg berada diatas permukaan bumi. Berapa besar gaya gravitasi yang dialami oleh benda tersebut, dan berapa kecepatan gravitasi bumi pada benda tersebut ?

2. Bila percepatan gravitasi pada permukaan bumi $9,8 \text{ m/s}^2$.
Tentukan percepatan gravitasi bumi pada jarak R dari permukaan bumi (R adalah jari-jari bumi).

Energi potensial gravitasi

$$E_{P_g} = -\frac{G M m}{r} \text{ [J]}$$

m massa benda, M massa bumi, r jarak benda terhadap pusat bumi dan G adalah konstanta gravitasi.

Dari hukum kekekalan energi mekanik

$$E_{P_A} + E_{K_A} = E_{P_B} + E_{K_B}$$

$$-\frac{G M m}{r_A} + \frac{1}{2} m v_A^2 = -\frac{G M m}{r_B} + \frac{1}{2} m v_B^2$$

Bila suatu benda (massa m) bergerak dengan suatu kecepatan diatas permukaan bumi (massa M) sehingga bisa keluar dari orbit maka kecepatan benda tersebut disebut kecepatan lepas.

v_A adalah kecepatan lepas

v_B adalah kecepatan diruang angkasa = 0

r_A adalah jari – jari bumi = R

r_B adalah jarak pusatbumi ke angkasa $\approx 2R$

$$-\frac{G M m}{r_A} + \frac{1}{2} m v_A^2 = -\frac{G M m}{r_B} + \frac{1}{2} m v_B^2$$

Persamaan diatas menjadi

$$-\frac{G M m}{R} + \frac{1}{2} m v_A^2 = -\frac{G M m}{2R} + \frac{1}{2} m \cdot 0$$

$$-\frac{G M}{2R} + \frac{1}{2} v_A^2 = 0$$

Maka

$$v_A = \sqrt{\frac{G M}{R}}$$

Soal :

Percepatan gravitasi di permukaan bumi adalah 10 m/s^2 dan jari-jari bumi adalah $6,37 \times 10^6 \text{ m}$. Berapa besar kecepatan awal yang harus diberikan pada suatu benda yang ditembakkan vertikal keatas dari permukaan bumi agar benda sampai ke angkasa ?

BAGIAN 7

MEKANIKA FLUIDA

Fluida terdiri dari : zat cair dan gas

Densitas (*density*) = masa jenis : adalah masa (m) persatuan volume (V)

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Satuannya kg/m^3 atau gram/cm^3 dengan konversi

$$1 \text{ gram/cm}^3 = 1000 \text{ kg/m}^3$$

Graviti spesifik (*specific gravity*) adalah suatu bilangan tanpa satuan / dimensi (dimensionless)

Graviti spesifik dari suatu bahan adalah perbandingan densitasnya dengan densitas air pada suhu $4,0^\circ\text{C}$, yaitu 1000 kg/m^3 .

$$\gamma_i = \frac{\rho_i}{\rho_{\text{air}}}$$

Tekanan : (*pressure*) adalah gaya normal F_\perp per satuan luas (A)

$$p = \frac{F_\perp}{A}$$

Satuan tekanan dalam SI adalah pascal

$$1 \text{ pascal} = 1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

Sedangkan $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ atau $1 \text{ milibar} = 100 \text{ Pa}$

Tekanan atmosfer (*atmospheric pressure*) dengan simbol p_a adalah tekanan di bumi, besarnya tergantung temperatur dan ketinggian. Tekanan pada permukaan air laut adalah 1 atmosfer (atm)

$$p_a = 1 \text{ atm} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa} = 1,013 \text{ bar} = 14,70 \text{ lb/in}^2$$

Percobaan B. Pascal adalah : tekanan dalam fluida yang mempunyai densitas homogen adalah

$$p = p_0 + \rho gh$$

g adalah percepatan gravitasi dan bentuk bejana tidak berpengaruh

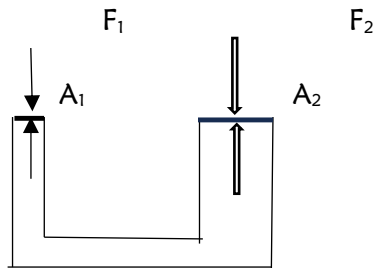
Hukum Pascal : Tekanan yang diberikan oleh fluida tertutup akan diteruskan tanpa mengalami pengurangan ke setiap bagian fluida dan dinding bejana.

Peralatan yang menggunakan prinsip hukum Pascal antara lain, kursi dokter gigi, pengangkat mobil , pompa hidrolik dan dongkrak, elevator, rem hidrolik

Contohnya pada pompa hidrolik :

Sebuah piston dengan luas permukaan penampang kecil A_1 memberikan gaya F_1 pada permukaan cairan, minyak. Tekanan yang diberikan adalah $p = F_1/A_1$, diteruskan melalui pipa yang menghubungkan dengan piston yang lebih besar dengan luas A_2 . Tekanan yang diberikan kepada kedua silinder mempunyai besar yang sama, sehingga

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1$$



Tekanan absolut, tekanan alat (gauge) dan alat pengukur tekanan

Misal:

tekanan ban suatu mobil diukur $32 \text{ lb/in}^2 = 32 \text{ psig} = 220 \text{ kPa} = 2,2 \times 10^5 \text{ Pa}$ (tekanan gauge), tekanan atmosfer adalah $14,7 \text{ lb/in}^2 = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa}$ maka tekanan absolut adalah $46,7 \text{ lb/in}^2 = 46,7 \text{ psia} = 321 \text{ kPa}$

Contoh soal :

Menentukan tekanan absolut dan tekanan gauge

Sebuah sistem pemanas air menggunakan panel matahari di atas atap, 12 meter di atas tangki penyimpanan. Tekanan air pada panel adalah 1 atmosfer. Berapa tekanan absolut dan tekanan gauge pada tangki ? Perubahan tekanan karena ketinggian 12 meter bisa diabaikan.

Perhitungan tekanan absolut

$$p = p_0 + \rho gh = (1,01 \times 10^5 \text{ Pa}) + (1000 \text{ kg/m}^3)(9,8 \text{ m/s}^2)(12,0 \text{ m}) = 2,19 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$= 2,19 \text{ atm} = 31,8 \text{ lb/in}^2.$$

Maka tekanan gauge adalah

$$p - p_0 = (2,19 - 1,01) \times 10^5 \text{ Pa} = 1,16 \text{ atm} = 17,1 \text{ lb/in}^2$$

Alat ukur tekanan :

1. Manometer tabung terbuka

Tabung berbentuk U berisi cairan (air raksa atau air) dengan densitas ρ . Salah satu ujungnya dihubungkan dengan bejana yang akan diukur tekanannya, dan ujung yang lain dibiarkan terbuka ke atmosfer pada tekanan $p_0 = p_a$.

Tekanan tabung bagian bawah pada fluida dalam kolom sebelah kiri adalah $p + \rho g y_1$. Tekanan tabung bagian bawah pada fluida dalam kolom sebelah kanan adalah $p_a + \rho g y_2$. Kedua tekanan diukur pada titik yang sama sehingga

$$\begin{aligned} p + \rho g y_1 &= p_a + \rho g y_2 \\ p - p_a &= \rho g (y_2 - y_1) = \rho g h \end{aligned}$$

p adalah tekanan absolut, p_a adalah tekanan atmosfer dan $p - p_a$ adalah tekanan gauge

2. Barometer air raksa (*mercury barometer*)

Terdiri atas sebuah gelas tabung panjang, tertutup pada salah satu ujungnya, yang telah diisi air raksa dan dibalikkan kedalam wadah air raksa. Ruang di atas kolom air raksa hanya berisi uap air raksa, tekanannya dapat diabaikan. Sehingga tekanan p_0 diatas air raksa adalah sama dengan nol

$$p = p_0 + \rho gh$$

$$p_a = 0 + \rho g(y_2 - y_1) = \rho gh$$

Barometer membaca tekanan atmosfer p_a langsung dari ketinggian kolom air raksa.

Tekanan 1 mmHg disebut 1 torr

Contoh soal :

Hitunglah tekanan atmosfer p_a pada suatu hari dimana ketinggian kolom air raksa dalam barometer adalah 760 mm.

$$p_a = \rho gh$$

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2 \quad h = 760 \text{ mm} = 0,76 \text{ m}$$

$$\text{densiti air raksa } \rho = 13,6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$p_a = 13,6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 9,8 \text{ m/s}^2 \times 0,76 \text{ m} = 1,01 \times 10^5$$

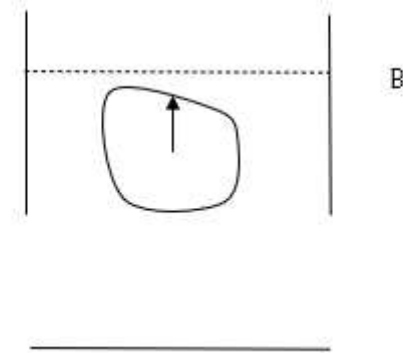
$$\text{N/m}^2 = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa} = 1,01 \text{ bar} = 1 \text{ atm}$$

A. KETERAPUNGAN (*BUOYANCY*)

Benda yang di masukkan ke dalam air seakan-akan mempunyai berat yang lebih ringan (seakan-akan berkurang beratnya. Hal ini akan diterangkan dengan Prinsip Archimedes.

B. PRINSIP ARCHIMEDES

Ketika sebuah benda sebagian atau seluruhnya dimasukkan kedalam zat cair, maka cairan akan memberikan gaya keatas pada benda setara dengan berat cairan yang dipindahkan benda tersebut.



B adalah gaya apung (*buoyant force*). Gaya ini yang menyebabkan benda tertekan keatas.

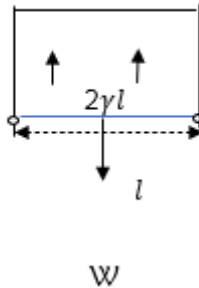
Masa jenis air 1000 kg/m^3

Masa jenis air laut 1030 kg/m^3

C. TEGANGAN PERMUKAAN (*SURFACE TENSION*)

Permukaan cairan berperilaku seperti lapisan yang memiliki tegangan, penjepit kertas yang densitasnya jauh lebih besar dari air akan mengapung di atas air, dan beberapa serangga juga dapat berjalan di atas permukaan air, kakinya membuat lekukan di atas permukaan air tetapi tidak masuk ke dalam air. Ini karena ada tegangan permukaan cairan.

Pengukuran tegangan permukaan dengan kawat berbentuk U yang dicelup ke dalam air sabun



Tegangan permukaan (γ) adalah Gaya tegangan permukaan yang diberikan oleh air sabun pada peluncur (F) dan gaya ini sama dengan gaya berat (W) dan tegangan tali (T)

$$\gamma = \frac{F}{2l}$$

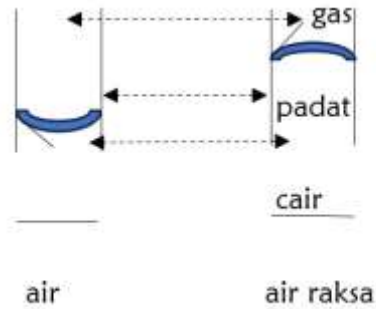
Satuannya adalah dyne/cm atau N/m ; $1 \text{ dyne/cm} = 10^{-3} \text{ N/m} = \text{mN/m}$.

Karena tegangan permukaan tergantung pada tarik-menarik antar molekul di dalamnya, semakin tinggi temperaturnya maka molekul akan bergetar semakin cepat. Maka nilai tegangan permukaan akan tergantung pada temperatur

D. KAPILARITAS (*CAPILLARITY*)

Tegangan permukaan menyebabkan menyebabkan terbentuknya bagian yang tinggi dan bagian yang rendah dari cairan pada bagian

tabung yang sempit, sehingga terbentuk lengkungan. Sudut θ yang dibentuk lengkungan itu disebut **sudut kontak** (*contact angle*).



Sudut kontak air $\theta < 90$, sudut kontak air raksa $\theta > 9$

E. ALIRAN FLUIDA

- Aliran laminar adalah aliran fluida yang mempunyai pola aliran yang tetap
- Aliran turbulen adalah aliran fluida yang mempunyai pola aliran yang berubah

F. PERSAMAAN KONTINUITAS (*CONTINUITY EQUATION*)

Prinsipnya adalah masa fluida yang bergerak tidak berubah ketika mengalir

Selama selang waktu yang kecil dt fluida pada A bergerak sejauh $v dt$, v adalah kecepatan fluida. Sehingga volume silinder dengan luas alas A dan tinggi $v dt$ adalah $dV = A v dt$. Maka masa dm yang

masuk silinder dan yang keluar dalam selang waktu t adalah $dm = \rho A v dt$. Karena ρ konstan maka persamaan untuk aliran masuk (1) dan keluar (2) adalah

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Disebut dengan **Persamaan kontinuitas** fluida inkompresible.

Laju aliran volume adalah

$$\frac{dV}{dt} = Av$$

G. PERSAMAAN BERNOULLI (*BERNOULLI'S EQUATION*)

Kerja yang dilakukan pada satu satuan volume fluida oleh fluida sekitarnya adalah sama dengan jumlah perubahan energi kinetik dan potensial tiap satuan volume yang terjadi selama aliran

$$dW = dK + dU$$

$$(p_1 - p_2) dV = \frac{1}{2} \rho dV (v_2^2 - v_1^2) + \rho dV g (y_2 - y_1)$$

$$(p_1 - p_2) = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) + \rho g (y_2 - y_1)$$

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \dots \text{Persamaan}$$

Bernoulli

atau

$$p + \rho g y + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{konstan}$$

Soal Tekanan air di dalam rumah:

Air mengalir ke dalam rumah melalui pipa dengan diameter dalam 2 cm pada tekanan absolut $3,5 \times 10^5$ Pa (sekitar 3,5 atm). Pipa berdiameter 1,5 cm digunakan untuk aliran yang menuju kamar mandi lantai 2 setinggi 5,5 m, ketika laju air pada pipa masukan adalah 1,25 m/s, tentukan laju aliran, tekanan, dan laju aliran volume di dalam kamar mandi.

H. VISKOSITAS (VISCOSITY)

Viskositas adalah gesekan internal fluida, Gaya vikos melawan gerakan sebagian fluida relatif terhadap yang lain. Fluida viskos cenderung melekat pada permukaan padat yang bersentuhan dengannya, terdapat lapisan batas fluida tipis di dekat permukaan, dimana fluida hampir diam terhadap permukaan.

Viskositas (η) didefinisikan sebagai perbandingan antara tegangan geser F/A dengan laju regangan v/l

$$\eta = \frac{F/A}{v/l}$$

Maka gaya yang diperlukan untuk melakukan suatu gerakan adalah

$$F = \eta A \frac{v}{l}$$

Satuan viskositas dalam sistim SI adalah $\text{N m (m}^2 \text{ m/s)} = \text{N s/m}^2 = \text{Pa s}$

$1 \text{ poise} = 1 \text{ dyne s/cm}^2 = 10^{-1} \text{ N s/m}^2$

Persamaan Bernoulli

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \dots$$

atau

$$p + \rho g y + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{konstan}$$

Bentuk lain dari Persamaan Bernoulli :

Dalam bentuk tekanan : $p + \rho g y + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{konstan}$

Dalam bentuk energi / masa : $\frac{p}{\rho} + g y + \frac{1}{2} v^2 = \text{konstan}$

Dalam bentuk ketinggian : $\frac{p}{\rho g} + y + \frac{v^2}{2g} = \text{konstan}$

atau $\frac{p}{\gamma} + y + \frac{v^2}{2g} = \text{konstan}$

Persamaan ini terdiri dari : energi aliran, energi potensial, dan energi kinetik. Didalam pembelajaran Mekanika Fluida ada faktor-faktor lagi yang ditambahkan yaitu energi karena friksi/ gesekan, pompa atau turbin.

Tambahan:

$$SG_x = \frac{\rho_x}{\rho_{ref}} = \frac{g \rho_x}{g \rho_{ref}} = \frac{\gamma_x}{\gamma_{ref}}$$

Densitas = kerapatan

Masa jenis : $\rho [kg/m^3]$

$$\text{Berat jenis : } \gamma [kg/m^3 \times m/s^2] = [N/m^3]$$

Contoh soal :

Melalui sebuah pipa dengan diameter 25 cm, dari kota A pada ketinggian 75 meter ke kota B dengan ketinggian 125 meter diatas permukaan laut, dialirkan minyak mentah dengan grafitasi spesifik (*specific gravity*) $SG = 0,8$ dengan laju aliran 250 liter/detik dan aliran steady state. Jika jarak kota A dan B adalah 10 kilometer, dan tekanan di B $68,5 \times 10^3 \text{ N/m}^2$. Berapakah tekanan di kota A ?

Diketahui:

$$d = 25 \text{ cm} = 25 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$h_A = 75 \text{ m}$$

$$h_B = 125 \text{ m}$$

$$q = 250 \text{ liter/s}$$

$$P_B = 68,5 \times 10^3 \text{ N/m}^2 = 68,5 \times 10^3 \text{ Pa}$$

$$SG = 0,8$$

Ditanyakan: P_A

$$\text{Jawab: } SG = \frac{\rho_{\text{minyak}}}{\rho_{\text{air}}} \text{ maka } \rho_{\text{minyak}} = S.G. \times \rho_{\text{air}}$$

$$\rho_{\text{minyak}} = 0,8 \times 1000 \text{ kg/m}^3 = 800 \text{ kg/m}^3$$

Persamaan Bernoulli untuk sistem diatas

$$P_A + \rho g h_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = P_B + \rho g h_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

Kecepatan $v_A = v_B = q/A$

$$P_A + \rho g h_A = P_B + \rho g h_B$$

$$P_A = P_B + \rho g (h_B - h_A)$$

$$P_A = 68,5 \times 10^3 \text{ Pa} + 800 \text{ kg/m}^3 \times 9,8 \text{ m/s}^2 \times (125 - 75) \text{ m}$$

$$= 68\,500 \text{ Pa} + 392\,000 \text{ Pa} = 460\,500 \text{ Pa} = 4,6 \times 10^5 \text{ Pa}$$

I. ANALISA DIMENSI

Prosedur pemilihan kombinasi dari beberapa variabel yang terdapat dalam satu persoalan sedemikian sehingga berkelompok menjadi bilangan tak berdimensi disebut analisa dimensional. Dengan analisa dimensional, gejala-gejala fisis dapat diformulasikan sebagai hubungan antara variabel-variabel yang berpengaruh.

Persamaan-persamaan dapat diekspresikan dalam parameter-parameter non-dimensi dengan membagi setiap sukunya dengan salah satu suku yang lainnya, sebagai contoh perhatikan Persamaan Bernoulli

$$\frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1$$

Kedua bagian sisinya dibagi dengan gz_2 , maka persamaan dapat dituliskan :

$$\frac{v_2^2}{2gz_2} + \frac{p_2}{\gamma z_2} + 1 = \left(\frac{v_1^2}{2gz_1} + \frac{p_1}{\gamma z_1} + 1 \right) \frac{z_1}{z_2}$$

Bentuk $\frac{v^2}{gz}$ dan $\frac{p}{\gamma z}$ adalah parameter-parameter non-dimensi

Contoh:

Pada suatu aliran fluida inkompressible melalui pipa, turunkan faktor gesekan / friksi (f) suatu pipa diketahui tergantung pada diameter pipa (D), masa jenis (ρ), viskositas dinamis (μ), kekasaran absolut permukaan pipa (ε) dan kecepatan aliran (v) dengan menggunakan metoda analisa dimensional

No.	besaran	simbol	dimensi
1	Diameter	D	$[L]$
2	Masa jenis	ρ	$[ML^{-3}]$
3	Viskositas dinamis	μ	$[ML^{-1}T^{-1}]$
4	Kekasaran absolut permukaan pipa	ε	$[L]$
5	Kecepatan aliran	v	$[LT^{-1}]$
6	Faktor friksi	f	-

$$f = F(D, \rho, \mu, \varepsilon, v)$$

Atau

$$F(f, D, \rho, \mu, \varepsilon, v) = 0$$

Dimensi dasar yang terlibat adalah 3 buah $[M, L, T]$, atau $m = 3$

Jumlah variabel $n = 6$

Jumlah suku-suku π adalah : $n - m = 6 - 3 = 3$

$$\therefore F(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$$

$$(1). \pi_1 = D^{x_1} \rho^{y_1} \mu^{z_1} \varepsilon$$

$$(2). \pi_2 = D^{x_2} \rho^{y_2} \mu^{z_2} v$$

$$(3). \pi_3 = D^{x_3} \rho^{y_3} \mu^{z_3} f$$

3 dimensi digunakan, dengan 6 besaran, akan ada 3 parameter :

$\pi_1, \pi_2, \text{ dan } \pi_3$

$$1) \pi_1 = D^{x_1} \rho^{y_1} \mu^{z_1} \varepsilon = 0$$

$$\pi_1 = [L]^{x_1} [ML^{-3}]^{y_1} [ML^{-1}T^{-1}]^{z_1} [L] = 0$$

$$\text{Eksponen dari } [L] : x_1 - 3y_1 - z_1 + 1 = 0$$

$$\text{Eksponen dari } [M] : y_1 + z_1 = 0$$

$$\text{Eksponen dari } [T] : -z_1 = 0$$

$$\text{Maka } z_1 = 0, y_1 = 0 \text{ dan } x_1 = -1$$

$$\text{Dan } \pi_1 = D^{x_1} \rho^{y_1} \mu^{z_1} \varepsilon = D^{-1} \rho^0 \mu^0 \varepsilon$$

$$\pi_1 = \frac{\varepsilon}{D} \text{ atau } \pi_1 = \frac{D}{\varepsilon}$$

$$2) \pi_2 = D^{x_2} \rho^{y_2} \mu^{z_2} v = 0$$

$$\pi_2 = [L]^{x_2} [ML^{-3}]^{y_2} [ML^{-1}T^{-1}]^{z_2} [LT^{-1}] = 0$$

$$\text{Eksponen } [L] : x_2 - 3y_2 - z_2 + 1 = 0$$

$$\text{Eksponen } [M] : y_2 + z_2 = 0$$

$$\text{Eksponen } [T] : -z_2 - 1 = 0$$

$$\text{Maka } z_2 = -1, y_2 = 1 \text{ dan } x_2 = 1$$

$$\text{Dan } \pi_2 = D^1 \rho^1 \mu^{-1} v = \frac{D \rho v}{\mu}$$

$$\pi_2 = \frac{D \rho v}{\mu} \text{ atau } \pi_2 = \frac{\mu}{D \rho v}$$

$$3) \pi_3 = D^{x_3} \rho^{y_3} \mu^{z_3} f = [L]^{x_3} [ML^{-3}]^{y_3} [ML^{-1}T^{-1}]^{z_3} = 0$$

$$\text{Eksponen } [L] : x_3 - 3y_3 - z_3 = 0$$

$$\text{Eksponen } [M] : y_3 + z_3 = 0$$

$$\text{Eksponen } [T] : -z_3 = 0$$

$$\text{Maka } z_3 = 0, y_3 = 0 \text{ dan } x_3 = 0$$

$$\text{Dan } \pi_3 = D^0 \rho^0 \mu^0 f = f$$

$$\pi_3 = f$$

$$\text{Sehingga hubungan fngsionalnya } F\left(\frac{\varepsilon}{D}, \frac{D \rho v}{\mu}, f\right) = 0$$

Atau

$$f = \phi\left(\frac{\varepsilon}{D}, \frac{D \rho v}{\mu}\right)$$

Dimana f adalah faktor friksi, $\frac{\varepsilon}{D}$ adalah kekasaran plat dari pipa,

$\frac{D \rho v}{\mu}$ adalah bilangan Reynolds (Re), ϕ adalah fungsi

$$f = \phi\left(\frac{\varepsilon}{D}, \frac{D \rho v}{\mu}\right)$$

$$f = \phi\left(\frac{\varepsilon}{D}, Re\right)$$

Kehilangan (loses) tiap satuan panjang dari pipa adalah $\frac{\Delta h}{l}$ (tidak berdimensi) pada aliran turbulen melalui suatu pipa yang halus, tergantung pada kecepatan v , diameter D , gravitasi g , viskositas dinamik μ dan massa jenis (densiti) (ρ). Dengan analisa dimensi (teorema π), nyatakan bentuk umum dari persamaan $F\left(\frac{\Delta h}{l}, v, D, g, \mu, \rho\right) = 0$

Pilih parameter repeating ρ, v , dan D .

No	besaran	simbol	dimensi
1	Loses	$\frac{\Delta h}{l}$	-
2	Kecepatan	v	$[LT^{-1}]$
3	Diameter	D	$[L]$
4	Gravitasi	g	$[LT^{-2}]$
5	Viskositas dinamik	μ	$[ML^{-1}T^{-1}]$
6	Densiti	ρ	$[ML^{-3}]$

Maka $n = 6$ dan $m = 3$, jadi jumlah π adalah $n - m = 3$, yaitu π_1, π_2 , dan π_3

$$4) \pi_1 = \rho^{x_1} v^{y_1} D^{z_1} \mu$$

$$\pi_1 = [ML^{-3}]^{x_1} [LT^{-1}]^{y_1} [L]^{z_1} [ML^{-1}T^{-1}] = 0$$

Eksponen $[L] : -3x_1 + y_1 + z_1 - 1 = 0$

Eksponen $[M] : x_1 + 1 = 0$

Eksponen $[T] : -y_1 - 1 = 0$

Maka $x_1 = -1$, $y_1 = -1$, dan $z_1 = -1$

Sehingga

$$\pi_1 = \rho^{x_1} v^{y_1} D^{z_1} \mu = \rho^{-1} v^{-1} D^{-1} \mu$$

$$\pi_1 = \frac{\mu}{\rho v D}$$

5) $\pi_2 = \rho^{x_2} v^{y_2} D^{z_2} g$

$$\pi_2 = [ML^{-3}]^{x_2} [LT^{-1}]^{y_2} [L]^{z_2} [LT^{-2}] = 0$$

Eksponen $[L] : -3x_2 + y_2 + z_2 + 1 = 0$

Eksponen $[M] : x_2 = 0$

Eksponen $[T] : -y_2 - 2 = 0$

Maka $x_2 = 0$, $y_2 = -2$, dan $z_2 = 1$

Sehingga

$$\pi_2 = \rho^{x_2} v^{y_2} D^{z_2} g = \rho^0 v^{-2} D^1 g$$

$$\pi_2 = \frac{Dg}{v^2}$$

6) $\pi_3 = \rho^{x_3} v^{y_3} D^{z_3} \frac{\Delta h}{l}$

$$\pi_3 = [ML^{-3}]^{x_3} [LT^{-1}]^{y_3} [L]^{z_3} = 0$$

Eksponen $[L]$: $-3x_3 + y_3 + z_3 = 0$

Eksponen $[M]$: $x_3 = 0$

Eksponen $[T]$: $-y_3 = 0$

Maka $x_3 = 0$, $y_3 = 0$, dan $z_3 = 0$

Sehingga

$$\pi_3 = \rho^{x_3} v^{y_3} D^{z_3} \frac{\Delta h}{l} = \rho^0 v^0 D^0 \frac{\Delta h}{l}$$

$$\pi_3 = \frac{\Delta h}{l}$$

$$\text{Jadi } F\left(\frac{\mu}{\rho v D}, \frac{Dg}{v^2}, \frac{\Delta h}{l}\right) = 0$$

Keterangan : $\frac{\mu}{\rho v D} = Re$ adalah bilangan Reynold (*Reynold number*), jadi bisa ditulis

$$F\left(Re, \frac{Dg}{v^2}, \frac{\Delta h}{l}\right) = 0$$

Atau

$$\frac{\Delta h}{l} = F\left(Re, \frac{Dg}{v^2}\right)$$

Atau

$$\frac{\Delta h}{l} = F\left(Re, \frac{1}{D} \frac{v^2}{g}\right)$$

Pada hubungan fungsional antara tekanan Δp , panjang l , kecepatan v , gravitasi g , viskositas μ , densitas ρ , kecepatan suara c , tegangan permukaan σ , dan kecepatan sudut Ω . Dengan menggunakan v , l , dan ρ sebagai variabel berulang, hubungan terakhir dari suku-suku nondimensi memberikan hubungan

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2} = F\left(\frac{v^2}{lg}, \frac{\rho vl}{\mu}, \frac{v}{c}, \frac{\rho lv^2}{\sigma}, \frac{\Omega l}{v}\right)$$

Setiap suku yang muncul pada hubungan ini merupakan parameter yang penting dalam situasi-situasi aliran tertentu. Suku non-dimensi dengan nama umumnya diurutkan sbb :

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2} = Eu, \text{ adalah Bilangan Euler}$$

$$\frac{v}{\sqrt{lg}} = Fr, \text{ adalah Bilangan Froude}$$

$$\frac{\rho vl}{\mu} = Re, \text{ adalah Bilangan Reynold}$$

$$\frac{v}{c} = M, \text{ adalah Bilangan Mach}$$

$$\frac{\rho lv^2}{\sigma} = We, \text{ adalah Bilangan Weber}$$

$$\frac{\Omega l}{v} = St, \text{ adalah Bilangan Strouhal}$$

Bilangan-bilangan ini adalah parameter-parameter non dimensi utama dalam studi Mekanika fluida. Bilangan Euler ingin diketahui dalam kebanyakan aliran, bilangan Froude dalam aliran-aliran

yang memiliki permukaan bebas dimana gravitasi signifikan (misalkan pergerakan gelombang), bilangan Reynolds di dalam aliran-aliran dimana efek kekentalan menjadi penting, bilangan Mach di dalam aliran-aliran kompresile, bilangan Weber di dalam aliran yang dipengaruhi oleh tegangan permukaan (misal semprotan yang mengandung butiran-butiran) dan bilangan Strouhal di dalam aliran-aliran dimana rotasi atau pergerakan periodik memegang peranan.

J. RUGI-RUGI

Rugi-rugi (losses) aliran

Rugi-rugi aliran adalah berkurangnya masa, volume, dan kecepatan suatu fluida yang melewati suatu pipa.

Jenis rugi-rugi

- Rugi minor adalah rugi yang disebabkan oleh gangguan lokal seperti perubahan penampang, adanya katup, belokan dll.
- Rugi mayor adalah rugi yang terjadi akibat gesekan fluida dengan dinding pipa. Profil aliran fluida dalam pipa ditentukan dari bilangan Reynolds
 - Aliran laminar $Re < 2300$
 - Aliran transisi $2300 < Re < 4000$
 - Aliran turbulen $Re > 4000$

Bilangan Reynolds (tidak berdimensi)

Reynolds menyimpulkan bahwa jenis aliran tergantung pada: kecepatan aliran fluida rata-rata, diameter pipa, viskositas dan densitas fluida

$$R_e = \frac{v d}{\nu} = \frac{v d \rho}{\mu}$$

Dengan,

v adalah kecepatan aliran fluida (m/s)

d adalah diameter pipa (m)

ν adalah viskositas kinematik (m²/s)

μ adalah viskositas dinamik (kg/(m s))

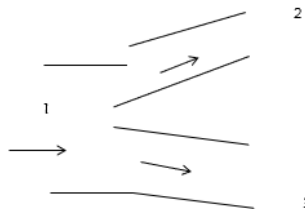
Persamaan Energi untuk fluida yang inkompresible

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + h_L$$

h_L adalah head loss, untuk harga h_L yang kecil dan mendekati nol, persamaan menjadi Persamaan Bernoulli

$$\frac{p}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g} = \text{konstan}$$

Contoh soal 1 Air mengalir dalam suatu sistem pipa seperti gambar:



Air mengalir masuk pada pipa 1 yang berdiameter 150 mm dengan laju aliran volume 0,02 m³/det. Sementara cabang pipa lainnya masing-masing mempunyai diameter pipa 2 adalah 50 mm dan pipa 3 adalah 100 mm.

Jika kecepatan aliran rata2 pada pipa berdiameter 50 mm (pipa 2) adalah 3 m/det. Tentukan kecepatan aliran dan laju aliran volume pada setiap pipa

Diketahui: $D_1 = 150 \text{ mm} = 0,15 \text{ m}$

$$D_2 = 50 \text{ mm} = 0,05 \text{ m}$$

$$D_3 = 100 \text{ mm} = 0,1 \text{ m}$$

$$Q_1 = 0,02 \text{ m}^3/\text{det}$$

$$v_2 = 3 \text{ m/det}$$

Ditanya: Q_2 , Q_3 , v_1 , v_3

Jawab:

Laju aliran volume / debit / discharge (Q) sama dengan luas penampang pipa (A) dikali kecepatan aliran fluida (v)

$$Q = Av$$

Persamaan kontinuitas

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Pada pipa 1

$$Q_1 = A_1 \times v_1$$

$$v_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{Q_1}{\frac{\pi}{4} \times D_1^2} = \frac{0,02 \text{ m}^3/\text{det}}{\frac{\pi}{4} \times (1,5 \text{ m})^2} = 1,132 \text{ m/det}$$

Pada pipa 2

$$\begin{aligned} Q_2 = A_2 \times v_2 &= \frac{\pi}{4} \times D_2^2 \times v_2 = \frac{\pi}{4} \times (0,05 \text{ m})^2 \times 3 \frac{\text{m}}{\text{det}} \\ &= 0,00589 \text{ m}^3/\text{det} \end{aligned}$$

Pada pipa 3

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

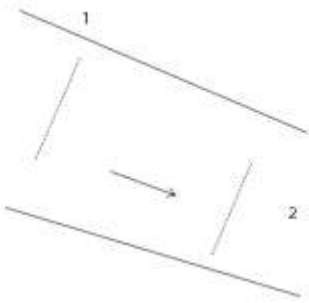
$$Q_3 = Q_1 - Q_2 = 0,02 \frac{\text{m}^3}{\text{det}} - 0,00589 \frac{\text{m}^3}{\text{det}} = 0,01411 \frac{\text{m}^3}{\text{det}}$$

$$Q_3 = A_3 \times v_3$$

$$v_3 = \frac{Q_3}{A_3} = \frac{0,01411 \frac{\text{m}^3}{\text{det}}}{\frac{\pi}{4} \times (0,1 \text{ m})^2} = 1,797 \text{ m/det}$$

Contoh soal 2

Air mengalir dalam pipa dari titik 1 ke titik 2, seperti gambar



Tentukan kecepatan aliran dan tekanan pada titik 2. Diasumsikan rugi total dari titik 1 ke titik 2 adalah 3 meter. Jika diketahui diameter pada titik 1 adalah 100 mm, diameter pada titik 2 adalah 50 mm, tekanan di titik 1 adalah 300 kPa, kecepatan aliran di titik 1 adalah 2 m/det dan perbedaan elevasi titik 1 dan titik 2 adalah 2 m.

Diketahui: $D_1 = 100 \text{ mm} = 0,1 \text{ m}$

$$D_2 = 50 \text{ mm} = 0,05 \text{ m}$$

$$P_1 = 300 \text{ kPa}$$

$$z_1 - z_2 = 2 \text{ m}$$

$$v_1 = 2 \text{ m/det}$$

$$h_{L,1-2} = 3 \text{ m}$$

Ditanya: v_2 dan P_2

Jawab:

Persamaan kontinuitas

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} \times v_1 = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 \times v_1 = \left(\frac{0,1 \text{ m}}{0,05 \text{ m}}\right)^2 \times 2 \frac{\text{m}}{\text{det}} = 8 \text{ m/det}$$

Persamaan Bernoulli dengan memperhatikan rugi2

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h_{L,1-2}$$

$$P_2 = \gamma \left(\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} + (z_1 - z_2) - h_{L,1-2} \right)$$

$$\gamma = \rho g$$

$$\rho_{\text{air}} = 1\,000 \text{ kg/m}^3$$

$$g = 9,79 \text{ m/det}^2$$

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h_{L,1-2}$$

$$\frac{300.000}{9790} + \frac{2^2}{2 \times 9,79} + 2 = \frac{P_2}{9790} + \frac{8^2}{2 \times 9,79} + 0 + 3$$

$$\frac{300.000}{9790} + \frac{4}{19,58} + 2 = \frac{P_2}{9790} + \frac{64}{19,58} + 3$$

$$\frac{300.000}{9790} - \frac{60}{19,58} - 1 = \frac{P_2}{9790}$$

$$P_2 = 260,27 \text{ kPa}$$

Contoh soal:

Sistem pipa seperti gambar di bawah menghubungkan 3 Reservoir (A, B, dan C) yang berisi air. Temperatur air rata-rata 20° dengan:

$$\rho = 99,82 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} ; \mu = 1,005 \times 10^{-3} \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}$$

Pipa	L (m)	Di (cm)	ε (mm)	Z (m)
A	3.000	100	0,2	30
B	600	45	0,9	18
C	1.000	60	0,6	9

Hitung : Q_1 , Q_2 , dan Q_3 dalam m^3/s

$$\text{Solusi} \quad \frac{\varepsilon}{D_i} : \quad A \quad : \quad B \quad : \quad C$$

0,0002	0,002	0,001
--------	-------	-------

Prinsip:

$$Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0$$

$$\text{Atau } \Delta Q = Q_1 - (Q_2 + Q_3) = 0$$

ε = Kekerasan pipa (pipe roughness)

$\frac{\varepsilon}{D}$ = Kekerasan pipa relatif (relative pipa roughness)

f = friction factor

Asumsi 1 : $Z_j + \frac{P_j}{\gamma} = 23\text{m}$ Diasumsikan aliran complete turbulent

Aliran 1 : Dari diagram Moody

$$\frac{\varepsilon}{D} = 0,0002 \rightarrow \text{maka } f = 0,014$$

f = friction factor

$$H_{f1} = f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g}$$

$$(30-23) = 0,014 \cdot \frac{3000}{1} \frac{v_1^2}{2 \cdot 9,81} \rightarrow v_1 = 1,8 \text{ m/s}$$

Checking f_1

$$N_R = \rho \frac{vD}{\mu} = \frac{998,2 \cdot 1,8 \cdot 1}{1,005 \times 10^{-3}} = 1,8 \times 10^6 = \text{Reynold Number}$$

Dari Moody diagram

$$\left. \begin{array}{l} N_R = 1,8 \times 10^6 \\ \frac{\varepsilon}{D} = 0,0002 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(OK !)} \\ f_1 = 0,014 \end{array}$$

$$Q_1 = \frac{\pi}{4} D_1^2 V_1 = \frac{\pi}{4} \cdot 1^2 \cdot (1,8) = 1,413 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Aliran 2 : $\frac{\varepsilon}{D} = 0,0002 \rightarrow$ maka $f = 0,024$ (dari diagram Moody)

$$H_{f2} = f_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{V_2^2}{2g}$$

$$(23 - 18) = 0,024 \cdot \frac{600}{0,45} \frac{v_2^2}{2 \cdot 9,81} \rightarrow v_2 = 1,75 \text{ m/s}$$

Checking f_2

$$N_R = \frac{998,2 \cdot 1,75 \cdot 0,45}{1,005 \times 10^{-3}} = 7,8 \times 10^5$$

$$\left. \begin{array}{l} N_R = 7,8 \times 10^5 \\ \frac{\varepsilon}{D} = 0,002 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Dari Moody diagram} \\ F_2 = 0,024 \end{array} \quad \text{(OK !)}$$

$$Q_2 = \frac{\pi}{4} \cdot (0,45)^2 \cdot 1,75 = 0,278 \text{ m}^3/\text{s}$$

Aliran 3: $\frac{\varepsilon}{D} = 0,001 \rightarrow$ maka $f_3 = 0,02$ (dari diagram Moody dan aliran diasumsikan complete turbulence)

$$H_{f3} = f_3 \frac{L_3}{D_3} \frac{V_3^2}{2g}$$

$$(23 - 9) = 0,02 \cdot \frac{1000}{0,6} \frac{v_3^2}{2 \cdot 9,81} \rightarrow v_3 = 2,87 \text{ m/s}$$

Checking f_3

$$\left. \begin{aligned} N_R &= \frac{2,87 \times 0,6 \times 998,2}{1,005 \times 10^{-3}} = 1,7 \times 10^6 \\ \frac{\varepsilon}{D} &= 0,001 \\ Q_3 &= \frac{\pi}{4} \cdot (0,6)^2 \cdot (2,87) = 0,811 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} F_3 &= 0,02 \\ (\text{OK !}) \end{aligned}$$

Error = $\Delta Q_1 = Q_1 - (Q_2 + Q_3) = 0,324 \text{ m}^3/\text{s}$ (kurang memenuhi karena error harus mendekati nol)

Asumsi 2: $Z_j + \frac{P_j}{\gamma} = 24 \text{ m}$

Aliran 1 : Asumsi complete turbulence, dari Moody diagram :

$$\frac{\varepsilon}{D} = 0,0002 \rightarrow f_1 = 0,014$$

$$H_{f1} = f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g}$$

$$(30-23) = 0,014 \cdot \frac{3000}{1} \frac{v_1^2}{2 \cdot 9,81} \rightarrow v_1 = 1,674 \text{ m/s}$$

Checking

$$\left. \begin{aligned} N_R &= \frac{1,674 \cdot 1 \cdot 998,2}{1,005 \times 10^{-3}} = 1,7 \times 10^6 \\ \frac{\varepsilon}{D} &= 0,0002 \rightarrow f_1 = 0,014 \quad (\text{OK!}) \\ Q_1 &= \frac{\pi}{4} \cdot 1^2 \cdot (1,674) = 1,314 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \end{aligned} \right\}$$

Aliran 2 : $\frac{\varepsilon}{D} = 0,002 \rightarrow f = 0,024$

$$(24 - 18) = 0,024 \cdot \frac{600}{0,45} \frac{v_2^2}{2 \cdot 9,81} \rightarrow v_2 = 1,918 \text{ m/s}$$

$$\left. \begin{aligned} N_R &= \frac{1,918 \cdot 0,45 \cdot 998,2}{1,005 \times 10^{-3}} = 8,6 \times 10^5 \\ \frac{\varepsilon}{D} &= 0,002 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} F_2 &= 0,024 \\ (\text{OK !}) \end{aligned}$$

$$Q_2 = \frac{\pi}{4} \cdot (0,45)^2 \cdot 1,918 = 0,305 \text{ m}^3/\text{s}$$

Aliran 3: $\frac{\varepsilon}{D} = 0,001 \rightarrow \text{maka } f_3 = 0,02$

$$(24 - 9) = 0,02 \cdot \frac{1000}{0,6} \frac{v_3^2}{2 \cdot 9,81} \rightarrow v_3 = 2,971 \text{ m/s}$$

Cek

$$N_R = \frac{2,971 \cdot 0,6 \cdot 998,2}{1,005 \times 10^{-3}} = 1,8 \times 10^6 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad F = 0,02$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = 0,001 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad (\text{OK !})$$

$$Q_3 = \frac{\pi}{4} \cdot (0,6)^2 \cdot (2,971) = 0,840 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\begin{aligned} \Delta Q &= Q_1 - (Q_2 + Q_3) \\ &= 1,314 - (0,305 + 0,840) = 0,169 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

(Belum memenuhi)

Dari kedua asumsi diatas (27 dan 24)

Dihitung H_{fj} dengan menggunakan interpolasi

$$\left(Z + \frac{P}{\gamma} \right)_1 = 23 \text{ m}, \Delta Q_1 = 0,324 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$\left(Z + \frac{P}{\gamma} \right)_2 = 24 \text{ m}, \Delta Q_2 = 0,169 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Interpolasi

$$x = \dots \quad Y = 0$$

$$x_1 = 23 \quad Y_1 = 0,324$$

$$x_2 = 24 \quad Y_2 = 0,169$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \rightarrow x = x_1 + (x_2 - x_1) \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$\begin{aligned} x &= 23 + (24 - 23) \frac{0 - 0,324}{0,169 - 0,324} \\ &= 25,09 \text{ m} \end{aligned}$$

Dihitung kembali untuk $Z_j + \frac{P_j}{\gamma} = 25,09 \text{ m}$ seperti tadi

$$f_1 = 0,14 \quad f_2 = 0,024 \quad f_3 = 0,02$$

$$H_f = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$$

$$\text{Aliran 1 } (30 - 25,09) = 0,014 \frac{3000}{1} \frac{v_1^2}{2 \cdot 9,81}$$

$$V_1 = 1,51 \text{ m/s}$$

$$Q_1 = \frac{\pi}{4} \cdot 1 \cdot (1,51)^2 = 1,189 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\text{Aliran 2 } (25,09 - 18) = 0,024 \frac{600}{0,45} \frac{v_2^2}{2 \cdot 9,81}$$

$$V_2 = 2,08 \text{ m/s}$$

$$Q_2 = \frac{\pi}{4} \cdot (10,45)^2 \cdot (2,08) = 0,331 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\text{Aliran 3 } (25,09 - 9) = 0,020 \frac{1000}{0,6} \frac{v_3^2}{2 \cdot 9,81}$$

$$V_3 = 3,07 \text{ m/s}$$

$$Q_3 = \frac{\pi}{4} \cdot (0,6)^2 (3,07) = 0,870 \text{ m}^3/\text{s}$$

Cek erornya

$$\Delta Q = Q_1 - (Q_2 + Q_3)$$

$$= 1,189 - (0,331 + 0,870) = 0,012 \text{ m}^3/\text{s} \text{ (mendekati nol)}$$

Jadi aliran masuk \simeq aliran keluar atau

$$Q_1 \simeq Q_2 + Q_3$$

$$Q_1 = 1,189 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_2 = 0,331 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_3 = 0,870 \text{ m}^3/\text{s}$$

DAFTAR PUSTAKA

- Merle C. Potter & David C. Wiggert, Schaum's outlines Mekanika Fluida, Penerit Erlangga, Jakarta, 2008, hal. 80-84
- Lilik Zabidi, Modul kuliah Mekanika Fluida <https://www.slideshare.net/alipane/modul-mekanika-fluida-dasar2-perhitungan-aliran-fluida>
- Young, H.D., dan Freedman, R.A., (2002), Fisika Universitas. Edisi kesepuluh Jilid 1. Penerbit Erlangga.
- Halliday, D., Resnick, R., dan Walker, J. (2008), Fundamentals of Physics (Extended). John Wiley & Sons, Inc.
- Hugh D. Young and Roger A. Freedman, (2012), University Physics, 12nd edition, Pearson Addison Wesley.
- Listiana Satiawati (2018.1), Penurunan Persamaan Darcy dari Persamaan Navier-Stokes untuk Resrvoir Aliran Linier dan Radial, Jurnal Petro 2019 VOLUME VIII No. 2, Trijurnal Lemlit Universitas Trisakti, Jakarta.
- Tarek Ahmed, Ph.D., P.E., (2001), Reservoir Engineering Handbook, Second edition, Gulf Professional Publishing USA., p. 363-39.
- Tarek Ahmed and D. Nathan Meehan, (2012). Advanced Reservoir Management and Engineering, Second edition, Gulf Professional Publishing USA., p. 23-32

TENTANG PENULIS



Listiana Satiawati

Lahir di Bondowoso 10 September 1961 Penulis pernah menempuh pendidikan S1 jurusan Fisika Teknik di FTI Institut Teknologi Sepuluh November (ITS) di Surabaya, S2 jurusan Ilmu Fisika di FMIPA Universitas Indonesia (UI) Jakarta dan S3 jurusan Ilmu Bahan-bahan FMIPA di Universitas Indonesia (UI) di Jakarta. Penulis bekerja sebagai dosen tetap di Prodi Strata 1 Teknik Perminyakan FTKE Universitas Trisakti. Bidang keahlian penulis antara lain: Fisika Dasar,

Matematika Teknik, Program komputer Fortran dan Latex.

Pembaca dapat berkomunikasi dengan penulis melalui: Email: listianasatiawati@trisakti.ac.id.



Yusraida Khairani Dalimunthe

Lahir di Sidikalang, 19 Juli 1989. Penulis pernah menempuh pendidikan S1 pada Program Studi Pendidikan Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan (UNIMED) lulus tahun 2011, S2 pada Program Studi Ilmu Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada (UGM) lulus tahun 2014 dan S3 pada Program Studi Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu

Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung (ITB) lulus tahun 2025 dengan memperoleh predikat Cumlaude. Penulis bekerja sebagai dosen tetap di Prodi Strata 1 Teknik Perminyakan, Fakultas Teknologi Kebumihan dan Energi (FTKE) Universitas Trisakti, Jakarta.

Penulis aktif menulis diberbagai jurnal nasiona maupun internasional serta aktif sebagai pembicara di berbagai konferensi internasional. Bidang kepakaran penelitian penulis adalah Energi Terbarukan Sub Bidang Bioenergi.

Pembaca dapat berkomunikasi dengan penulis melalui: Email: yusraida@trisakti.ac.id



Pauhesti

lahir di Bandung 12 November 1965. Penulis menempuh pendidikan S1 dan S2 di jurusan Teknik Perminyakan Universitas Jakarta. Penulis bekerja sebagai dosen tetap di Prodi Sarjana Teknik Perminyakan Fakultas Teknologi Kebumihan dan Energi Universitas Trisakti Jakarta. Bidang keahlian penulis di bidang Teknik Perminyakan.

Pembaca dapat berkomunikasi melalui email : pauhesti@trisakti.ac.id

Penerbit :

Penerbit Buku Sonpedia

Buku Gudang Ilmu, Membaca Solusi
Kebodohan, Menulis Cara Terbaik
Mengikat Ilmu. Everyday New Books



Redaksi :

Jl. Premix No. 07 Kenali Asam Bawah Kota Baru
Kota Jambi 36129

Tel +6282177858344

Email: penerbitbukusonpedia@gmail.com

Website: <https://buku.sonpedia.com/>