Listiana Satiawati
Yusraida Khairani Dalimunthe

MATEMATIKA TEKNIK

PENERBIT UNIVERSITAS TRISAKTI, JAKARTA

MATEMATIKA TEKNIK

Judul Buku	:	Matematika Teknik
Penulis	:	Listiana Satiawati dan Yusraida Khairani Dalimunthe
Diterbitkan Oleh	:	Penerbit Universitas Trisakti, Jakarta
Cetakan Pertama	:	2022
ISBN	:	978-602-0750-46-0

LISTIANA SATIAWATI
YUSRAIDA KHAIRANI DALIMUNTHE

MATEMATIKA TEKNIK

Penerbit Universitas Trisakti, Jakarta

MATEMATIKA TEKNIK

Listiana Satiawati
Yusraida Khairani Dalimunthe

Penerbit Universitas Trisakti
Anggota Ikatan Penerbit Indonesia (IKAPI)
Tanda Anggota No. 134/DKI/99
Jl. Kyai Tapa No. 1 Grogol
Jakarta 11440

Cetakan Pertama : 2022

PRAKATA

Assalamu'alaikum Wr. WB

Alhamdulillah kami panjatkan kehadirat Allah SWT atas rahmat dan hidayahnya maka kami bisa menyelesaikan penulisan buku Matematika Teknik ini. Sholawat dan salam kami panjatkan kepada junjungan kami Nabi Muhammad SAW yang telah membawa petunjuk dan kebenaran serta agama Islam sebagai rahmat bagi seluruh alam.

Penulisan buku ini kami maksudkan untuk membantu para mahasiswa dalam memahami materi kuliah Matematika Teknik dan juga diharapkan dapat dipergunakan untuk para dosen yang mengajar mata kuliah yang sama. Buku ini adalah merupakan kumpulan dari perkuliahan selama 1 semester atau 14 kali tatap muka, untuk memenuhi beban 3 SKS dan diberikan kepada mahasiswa semester 4. Tujuan kuliah ini adalah untuk mempelajari pemodelan dari sistem yang berhubungan dengan masalah pada Teknik Perminyakan yang dijelaskan dengan kaidah ilmu fisika dan dianalisa dan diselesaikan dengan metode matematika.

Selama proses penyuntingan sampai selesai penyusunan buku ini kami mengucapkan banyak terima kasih kepada pimpinan Universitas Trisakti yang telah memberikan fasilitas dan kesempatan kepada kami untuk menyusun buku ajar ini. Juga kepada pimpinan prodi Teknik Perminyakan FTKE dan semua rekan dosen, tenaga pendidik yang telah membantu dan memberikan semangat kepada kami selama penulisan buku ini kami juga mengucapkan terima kasih.

Kemudian rasa syukur kami ucapkan kepada seluruh keluarga kami yang selalu memberikan dorongan dan suasana yang bahagia didalam kehidupan kami.

Sebelumnya kami memohon maaf apabila dalam penulisan buku ini masih banyak kekurangan-kekurangannya. Untuk hal tersebut kami memohon saran dan kritik untuk perbaikan buku ini.

Akhir kata kami selaku penulis mengharapkan agar buku ini bisa bermanfaat bagi dunia pendidikan di negeri tercinta Indonesia.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

BAB 1
PEMODELAN (*MODELLING*)

Standar Kompetensi

1. Mampu menerapkan Ilmu dasar, komunikasi dan pendukung ilmu perminyakan dan atau panas bumi (CPP 1)
2. Mampu menerapkan pemikiran Logis, Kritis, Sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi Perminyakan dan atau panas bumi (CPKU 1)

Kompetensi Dasar

Mampu memahami tentang sistem, merumuskan model matematika dan mencari solusi sistem yang berhubungan dengan Teknik Perminyakan dan Panas bumi (CPP1)

Indikator

1. Mahasiswa mengerti tentang sistem terutama sistem fisika
2. Mahasiswa dapat mengerti tentang membuat model dari suatu sistem
3. Mahasiswa mengerti cara-cara membuat model suatu sistem
4. Mahasiswa mengerti kegunaan dari permodelan sistem

Deskripsi:

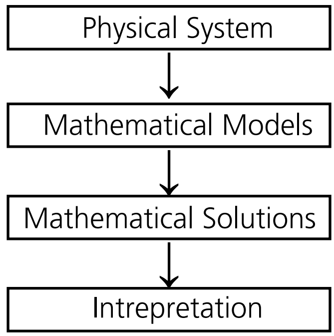
Pemodelan (*modelling*) dari suatu sistem meliputi pemilihan variabel yang mempengaruhi sistem, penggunaan kaidah-kaidah ilmu fisika, penyusunan model matematika dari sistem, solusi persamaan matematika dengan syarat batas tertentu yang merupakan interpretasi dari sistem tersebut. Referensi (Kreyzic, 2011)

1.1. Konsep Dasar Permodelan

Di dalam persoalan teknik seringkali dihadapkan pada masalah sistem yang rumit. Sistem itu bisa berupa suatu peralatan dengan beberapa input variabel yang memengaruhinya, untuk mengintepretasikan output sebagai akibat dari beberapa input tersebut salah satu cara adalah dengan memodelkan sistem tersebut. Tujuannya adalah untuk mengatasi apabila ada kendala yang merugikan atau menurunkan performa dari peralatan tersebut atapun untuk meningkatkan kemampuan dari alat dengan cara menganalisa model matermatika dari sistem tersebut.

Jadi jika kita ingin menyelesaikan suatu problem-problem teknik / *engineering problems* (bisanya dalam bentuk problem fisika), pertama kita harus memformulasikan problem tersebut sebagai suatu ekspresi matematis dalam bentuk variabel-variabel, fungsi-fungsi, dan persamaan-persamaan. Ekspresi yang demikian dikenal sebagai suatu model matematis dari sistem yang diberikan.

Biasanya model matematis yang diturunkan dari suatu sistem atau suatu problem teknik adalah merupakan suatu persamaan yang berisi penurunan-penurunan (*derivatives*) dari suatu fungsi-fungsi yang tidak diketahui atau biasanya disebut Persamaan Diferensial (PD). Kemudian kita harus mendapatkan suatu solusi (yaitu suatu fungsi yang memenuhi persamaan itu), dari solusi tersebut bisa digunakan menyelidiki sifat-sifatnya, membuat grafik, mendapatkan nilai-nilainya dan mengintrepretasikan dalam bentuk sedemikian hingga kita bisa mengerti sistem fisika (*physical system*) tersebut secara keseluruhan. Secara singkat dituliskan *modeling – solving – interpreting*.



Beberapa sistem yang akan dibahas di buku ini adalah sistem-sistem fisika yang berhubungan dengan Teknik Perminyakan, yaitu

a. Sistem tangki yag berisi cairan /fluida variabel-variabel nya adalah ketinggian cairan, diameter atau jari-jari tangki dan pipa-pipa, aliran masuk dari materi misalkan garam
b. Sistem rangkaian listrik variabel-variabelnya adalah arus listrik, tahanan (resistor), kapasitor, induktor dan sumber emf
c. Sistem pegas variabel-variabelnya adalah konstanta pegas, masa bola besi, koefisien peredaman serta gaya luar yang mempengaruhi (osilator)
d. Sistem pelampung di air variabel-variabelnya adalah masa dan volume pelampung dan berat jenis cairan
e. Perambatan panas pada suatu bahan variabel-variabelnya adalah panjang / luas dan materi dari bahan

Dari sistem-sistem diatas didapatkan model matematika sistem. Model matematika yang didapatkan umumnya berbentuk persamaan diferensial. Ada beberapa macam persamaan diferensial yang didapatkan, yaitu

a. Persamaan Diferensial Biasa (*Ordinary Differetial Equations* = ODE) homogen / non homogen orde 1 atau 2
b. Persamaan Diferensial Parsial (*Partial Differential Equations* = PDE)

Kemudian dicari solusi dari Persamaan Diferensial (PD) yang didapatkan yang merupakan model matematika dari sistem yang sedang diteliti. Solusi PD dikerjakan dengan beberapa metode, yaitu:

a. Pemisahan variabel
b. Analitis
c. Transformasi Laplace
d. Deret

Sesudah didapatkan solusi dari model matematika sistem kemudian digambar grafik yang merupakan intepretasi dari sistem, maka dari grafik yang didapatkan performa dari sistem tersebut.

RANGKUMAN:

Pembuatan model matematika yang mempresentasikan suatu sistem merupakan cara untuk mengalisa suatu sistem dengan membuat model yang mewakili sistem. Model ini bisa digunakan untuk meningkatkan performa dari sistem tersebut.

UJI CAPAIAN PEMBELAJARAN:

Mahasiswa ditugaskan untuk mencari contoh dari beberapa sistem pada Teknik Perminyakan.

BAHAN DISKUSI:

Dari sistem Teknik Perminyakan dicoba untuk mencari kaidah-kaidah ilmu fisika yang sesuai dengan sistem yang didiskusikan, kemudian di cari model matematika yang mencerminkan keadaan sistem. Kemudian dicari solusi dari model matematika yang didapatkan.

BAB 2
DERET (*SERIES*)

Standar Kompetensi

1. Mampu menerapkan Ilmu dasar, komunikasi dan pendukung ilmu perminyakan dan atau panas bumi (CPP 1)
2. Mampu menerapkan pemikiran Logis, Kritis, Sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi Perminyakan dan atau panas bumi (CPKU 1)

Kompetensi Dasar

Mampu memahami tentang sistem, merumuskan model matematika dan mencari solusi sistem yang berhubungan dengan Teknik Perminyakan dan Panas bumi (CPP1)

Indikator

1. Mahasiswa mengerti arti dan macam-macam deret
2. Mahasiswa mengerti cara penurunan rumus-rumus deret
3. Mahasiswa mengerti penggunaan rumus-rumus deret
4. Mahasiswa mengerti tentang penjabaran/ekspansi deret dan kegunaannya

Deskripsi:

Pembelajaran mengenai deret ini adalah merupakan pengulangan pembelajaran tentang deret. Akan tetapi lebih diperdalam dengan cara menurunkan rumus-rumus yang dipergunakan. Juga selanjutnya akan dipergunakan penjabaran deret untuk memecahkan persoalan model matematika yang akan didapat dari permodelan sistem. Referensi dari (Boas, 1983)

2.1 Deret Geometris (*Geometric Series*)

- Jumlah poplasi yang berkembang setiap jam:
  2, 4, 8, 16, 32, …, … → semakin besar (divergen)
- Pantulan bola setiap waktu 2/3 dari tinggi semula:
  $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}$,…, …. → semakin kecil (konvergen)

Tota

$$= 1 + 2.\frac{2}{3} + 2.\frac{4}{9} + 2.\frac{8}{27} + 2.\frac{16}{81} + \cdots$$

$$= 1 + 2.\left(\underbrace{\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \cdots}_{\text{deret geometris}}\right)$$

Dere ulis

a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1} + ...

Misalkan untuk n = 5, maka jumlah deret:

$S_n = S_5 =$ a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ...

r S_5 = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + ...

dikurangkan

$S_5 - r\,S_5 = a - ar^5$

Maka untuk r ≠ 1 $S_5 = \dfrac{a - ar^5}{1 - r} = \dfrac{a(1 - r)^5}{1 - r}$ ditulis Sn = $\dfrac{a(1-r)^n}{1-r}$

Untuk deret $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}$,….,… di atas, maka jumlahnya adalah :

$$Sn = \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \ldots \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{dan } a = \frac{2}{3}, r = \frac{2}{3}, \text{n adalah jumlah suku}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{\frac{1}{3}} = 2\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

Untuk harga n mendekati ∞, maka harga $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ mendekati nol.

Maka jumlah deret geometris menjadi $\boxed{Sn = \frac{a}{1-r}}$ (2.1)

Contoh soal:

Gunakan persamaan diatas untuk menghitung bilangan decimal yang berulang

1. 0.583333…=
2. 0.185185…=
3. 0.5555……=
4. 0.818181…=
5. 0.243243…=

a. 0,583333 … $= \frac{58}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} + \frac{3}{1000000} + \cdots$

$$= \frac{58}{100} + \left(\underbrace{\frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \frac{3}{10^6} + \cdots}_{\text{deret geometris}}\right)$$

Deret geometris dengan:

$$a = \frac{3}{10^3} \qquad r = \frac{1}{10}$$

Jumlah deret geometris $\boxed{S = \frac{a}{1-r}}$

$$S = \frac{{}^{3}/_{10^3}}{1-{}^{1}/_{10}} = \frac{3}{10^3} \cdot \frac{1}{{}^{9}/_{10}} = \frac{3}{10^3} \cdot \frac{10}{9}$$

$$= \frac{1}{3 \,.\, 10^2} = \frac{1}{300}$$

$$0{,}583333 = \frac{58}{100} + \frac{1}{300} = \frac{58{,}3+1}{300} = \frac{174+1}{300}$$

$$= \frac{175}{300} = \frac{7}{12}$$

b. $0{,}185185 \ldots = \underbrace{\frac{185}{1000} + \frac{185}{1000000}}_{\text{deret geomteris dengan } a=\frac{185}{10^3} \;\; r=\frac{1}{10^3}}$

Jumlah deret geometris $S = \dfrac{a}{1-r}$

$$S = \frac{{}^{185}/_{10^3}}{1-{}^{1}/_{1000}} = \frac{{}^{185}/_{1000}}{{}^{999}/_{1000}} = \frac{185}{999} = \frac{5}{27}$$

c. $0{,}5555 \ldots = \underbrace{\frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{5}{10000}}_{\text{deret geomteris dengan } a=\frac{5}{10} \;\; r=\frac{1}{10}}$

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{{}^{5}/_{10}}{1-{}^{1}/_{10}} = \frac{{}^{5}/_{10}}{{}^{9}/_{10}} = \frac{5}{9}$$

d. $0{,}818181 \ldots = \frac{81}{100} + \frac{81}{10000} + \frac{81}{1000000} + \cdots$

$$a = \frac{81}{100} \quad r = \frac{1}{100}$$

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{{}^{81}/_{100}}{1-{}^{1}/_{100}} = \frac{{}^{81}/_{100}}{{}^{99}/_{100}} = \frac{81}{99} = \frac{9}{11}$$

e. $0{,}243243 \ldots = \frac{243}{1000} + \frac{243}{1000000} + \cdots$

$$a = \frac{243}{1000} \quad r = \frac{1}{1000}$$

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{{}^{243}/_{1000}}{1-{}^{1}/_{1000}} = \frac{{}^{243}/_{1000}}{{}^{999}/_{1000}} = \frac{243}{999} = \frac{9}{37}$$

f. $0{,}61111\ldots = \frac{6}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{10000}$

$$a = \frac{1}{100} \quad r = \frac{1}{10}$$

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{1/100}{1-1/10} = \frac{1/100}{9/10} = \frac{1}{100}.\frac{10}{9} = \frac{1}{90}$$

$0{,}61111\ldots = \frac{6}{10} + \frac{1}{90} = \frac{54+1}{90} = \frac{55}{90} + \frac{11}{18}$

g. $0777\ldots = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{7}{10000}$

$$a = \frac{7}{10} \quad r = \frac{1}{10}$$

$$S = \frac{7/10}{1-1/10} = \frac{7/100}{9/10} = \frac{7}{9}$$

h. $0{,}2666\ldots = \frac{2}{10} + \underbrace{\frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{6}{10000}}_{a=\frac{6}{100}\ r=\frac{1}{10}}$

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{6/100}{1-1/10} = \frac{6/100}{9/10} = \frac{6}{100}.\frac{10}{9} = \frac{6}{90} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

$0{,}2666\ldots = \frac{2}{10} + \frac{1}{15} = \frac{6+2}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

i. $0{,}69444\ldots = \frac{69}{100} + \underbrace{\frac{4}{10^3} + \frac{4}{10^4} + \frac{4}{10^5}}_{a=\frac{4}{10^3}\quad r=\frac{1}{10}}$

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{4/1000}{1-1/10} = \frac{4/1000}{9/10} = \frac{4}{1000}.\frac{10}{9} = \frac{4}{900} = \frac{2}{450} = \frac{1}{225}$$

$0{,}69444\ldots = \frac{69}{100} + \frac{1}{225} = \frac{69.255+100}{22500} = \frac{15625}{225000}$

2.2 Definisi dan Notasi

Bentuk deret dan sumasi:

1. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 + \cdots = (x+a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2$
2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots \frac{1}{2^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$
3. $x - x^2 + \frac{X^3}{2} - \frac{x^4}{6} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{(n-1)!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{(n-1)!}$
4. $1 - \frac{x}{2} + \frac{X^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \cdots + \frac{(-x)^n}{2^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{2^n}$
5. $x - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$
6. $x - \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$
7. $1 + \frac{(x+2)}{\sqrt{2}} + \frac{(x+2)^2}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n+1}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n+1}}$

Tulis deret dibawah ini

1. $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots$
2. $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} = \frac{(-1)^1}{1} + \frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^4}{4} + \cdots$

   $= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots.$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+5} = \frac{1}{6} + \frac{2}{7} + \frac{3}{8} + \frac{4}{9} + \frac{5}{10} + \cdots$
4. $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{m+1} = \frac{\sqrt{1}}{1+1} + \frac{\sqrt{2}}{2+1} + \frac{\sqrt{3}}{3+1} + \frac{\sqrt{4}}{4+1} + \cdots$

   $= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{4}}{5} + \cdots.$
5. $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2n(2n+1)n}{3n+5} = \frac{2.1(2.1+1)}{3.1+5} + \frac{2.2(2.2+1)}{3.2+5} + \frac{2.3(2.3+1)}{3.3+5} + \cdots$

   $= \frac{2(3)}{8} + \frac{4(5)}{6+5} + \frac{6(7)}{6+5} + \cdots = \frac{6}{8} + \frac{20}{11} + \frac{42}{14}$

6. $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(1!)^2}{(2.1)!} + \frac{(2!)^2}{(2.2)!} + \frac{(3!)^2}{(2.3)!} + \frac{(4!)^2}{(2.4)!} + \cdots$

$$= \frac{1}{2} + \frac{4}{4.3.2.1} + \frac{(3.2.1)^2}{6.5.4.3.2.1} + \frac{(4.3.2.1)^2}{8.7.6.5.4.3.2.1} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{4}{24} + \frac{36}{720} + \frac{576}{40320} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{20} + \frac{1}{70} + \cdots$$

Tulislah deret berikut dalam bentuk sumasi (Σ)

1. $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{4}{7} + \frac{8}{9} + \frac{16}{11} + \cdots =$

   $\frac{2^0}{2.1+1} + \frac{2}{2.2+1} + \frac{2^2}{2.3+1} + \frac{2^3}{2.4+1} + \frac{2^4}{2.5+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2(n+1)+1}$

   atau

   $\frac{2^0}{2.1+1} + \frac{2^1}{2.2+1} + \frac{2^2}{2.3+1} + \frac{2^3}{2.4+1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{2n+1}$

2. $\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \cdots. \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

3. $\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \cdots =$

   $\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^2}$

4. $\frac{1}{7} + \frac{2}{9} + \frac{3}{11} + \frac{4}{13} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+5}$

5. $\frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1}}$

6. $\frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} + \frac{ln\, 4}{4} - \frac{ln\, 5}{5} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}$

2.3 Deret Power

Deret yang bentuk suku-sukunya merupakan perkalian dari fungsi x atau dari fungsi (x-a). Bentuk umum deret power.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots$$

an dengan n = 0,1,2,3, … adalah konstanta

2.4 Mengembangkan fungsi dengan deret Power

$\sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$

untuk $x = 0, \sin 0 = 0, \rightarrow a_0 = 0$

diturunkan terhadap x

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x = a_1 + 2\, a_2\, x + 3\, a_3\, x^2 + 4\, a_4\, x^3 + \cdots + n\, a_n\, x^{n-1} + \cdots$$

untuk $x = 0$, $\cos 0 = 1$, $\rightarrow a_1 = 1$

diturunkan terhadap x

$$\frac{d}{`dx}(\cos x) = -\sin x = 2\, a_2 + 3.2\, a_3\, x + 4.3\, a_4\, x^2 + \cdots + n(n-1)\, a_n\, x^{n-2} + \cdots$$

untuk $x = 0$, - $\sin 0 = 0$, $\rightarrow a_2 = 0$

diturunkan terhadap x

$$\frac{d}{dx}(-\sin x) = -\cos x = 3.2\, a_3 + 4.3.2\, a_4\, x + \cdots + n(n-1)(n-2)\, a_n\, x^{n-3} + \cdots$$

untuk $x = 0$, - $\cos 0 = 1$, $\rightarrow a_3 = \frac{-1}{3.2} = \frac{-1}{3!}$

diturunkan terhadap x

$$\frac{d}{`dx}(-\cos x) = \sin x = 4.3.2\, a_2 + 5.4.3.2\, a_5 x + n(n-1)(n-2)\, a_n\, x^{n-4} + \cdots$$

untuk $x = 0, \sin 0 = 0, \rightarrow a_4 = 0$

diturunkan terhadap x

$$\frac{d}{`dx}(\sin x) = \cos x = 5.4.3.2\, a_3 + 4.3.2\, a_5 + 6.5.4.3.2\, a_6\, x + \cdots$$

$$+ n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) a_n\, x^{n-5} + \cdots$$

untuk $x = 0$, $\cos 0 = 1$, $\rightarrow a_5 = \frac{-1}{5.4.3.2} = \frac{-1}{5!}$

dan seterusnya

Kemudian konstanta a_0, a_1, a_2, a_3, a_4,…. di substitusi ke persamaan awal. Maka dihasilkan:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

Cara ini disebut deret Mc Laurin atau deret Taylor pada $(0,0)$ atau a = 0.

2.5 Deret Taylor

$f(x) = a + 0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + a_3\,(x - a)^3 + a_4\,(x - a)^4 + \cdots + a_n\,(x - a)^n + \cdots$

$f'(x) = a_1 + 2a_2\,(x - a) + 3a_3\,(x - a)^2 + 4a_4\,(x - a)^3 + \cdots + n\,a_n$ (x-a)^(n-1)+⋯

$f''(x) = 2a_2 + 3.2a_3\,(x - a) + 4.3a_3\,(x - a)^2 + 5.4a_4\,(x - a)^3 + \cdots + n(n - 1)\,a_n\,(x - a)^{n-2} + \cdots$

$f'''(x) = 3.2\,a_3 + 4.3.2\,a_4\,(x - a) + 5.4.3\,a_5\,(x - a)^2 + \cdots + n(n - 1)(n - 2)\,a_n\,(x - a)^{n-3} + \cdots$

$= 3!\,a_3 + 4!\,a_4\,(x - a) + 5.4.3\,a_5\,(x - a)^2 + \cdots + n(n - 1)(n - 2)\,a_n\,(x - a)^{n-3} + \cdots$

$f^n(x) = n(n - 1)(n - 2)(n - 3) \ldots 1\,a_n + \cdots$ bentuk yang berisi $(x - a)$

$f^n(x) = n!a_n + \cdots$ bentuk yang berisi $(x - a)$

Untuk $x = a$

$f(a) = a_0$

$f'(a) = a_1$

$f''(a) = 2\,a_2$

$f'''(a) = 3!\,a_3$

$f^n(a) = n!\,a_n$

Maka deret Taylor untuk f(z) disekitar (x - a) adalah

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2!}(x-a)^2 f^n(a) + \cdots + \frac{1}{n!}(x-a)^n f^n(a) + \cdots \quad (2.2)$$

Dengan menggunakan penurunan seperti diatas didapatkan penjabaran deret yang disebut:

Ekspansi deret dasar:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \to \text{konvergen untuk semua x}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \to \text{konvergen untuk semua x}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots + \to \text{konvergen untuk semua x}$$

$$\text{In}\,(1-\text{x}) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \to \text{konvergen untuk } 1 < x \le 1$$

Contoh penggunaan ekspansi deret

Hitunglah

$$\frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{1}{x}\sin x\right) |x = 0.1 = \cdots$$

Bisa dihitung dengan 4 kali penurunan kemudian dihitung hasilnya, tetapi bisa juga dengan ekspansi deret $\sin x$, dibagi x, kemudian diturunkan 4 kali, dan dimasukkan harga $x = 0.1$.

$$\frac{1}{x}\sin x = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

dideferensialkan 4 kali

$$\frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{1}{x}\sin x\right) = \frac{4.3}{5!} - \frac{6.5.4.3\,x^2}{7!} + \frac{8.7.6.5\,x^4}{9!} + \cdots$$

dimasukkan harga $x = 0.1$

$$\frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{1}{x}\sin x\right) = 0.1 - 7.14286 + 0.0000463 - \cdots = -7.0428137$$

Aplikasi deret untuk sistem selanjutnya dibahas pada bagian persamaan diferensial orde dua non homogen dengan gaya luar yang tidak sinusiodal, setelah penurunan model dari sistem sudah dikerjakan yaitu dengan menggunakan deret Fourier untuk menyelesaikan persamaan diferensialnya.

RANGKUMAN:

Pada bab ini sudah dipelajari tentang deret Geometris, deret Power, deret Taylor, deret Mc Laurin dan penggunaan ekspansi deret pada soal.

UJI CAPAIAN PEMBELAJARAN:

Soal:

Tulislah bentuk deret

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \cdots$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{2n+1} = \cdots$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \cdots$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \cdots$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+5} = \cdots$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \cdots$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(2n+1)}{3n+5} = \cdots$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \cdots$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^2} = \cdots$

BAHAN DISKUSI:

Pada pembelajaran tentang deret ditingkatkan pembelajarannya dengan mempelajari tentang Deret Fourier yang akan dipergunakan untuk penyelesaian persamaan diferensial (PD) hasil pemodelan sistem pada bab 3.

BAB 3
PERSAMAAN DIFERENSIAL (PD)

Standar Kompetensi

1. Mampu menerapkan Ilmu dasar, komunikasi dan pendukung ilmu perminyakan dan atau panas bumi (CPP 1)
2. Mampu menerapkan pemikiran Logis, Kritis, Sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi Perminyakan dan atau panas bumi (CPKU 1)

Kompetensi Dasar

Mampu memahami tentang sistem, merumuskan model matematika dan mencari solusi sistem yang berhubungan dengan Teknik Perminyakan dan Panas bumi (CPP1)

Indikator

3. Mahasiswa memahami bentuk Persamaan Diferensial (PD) orde 1,2, ..dan seterusnya.
4. Mahasiswa memahami bentuk Persamaan Diferensial homogen dan non homogen
5. Mahasiswa memahami dan mencari solusi PD biasa
6. Mahasiswa memahami dan mencari solusi PD Parsial
7. Mahasiswa memahami dan mencari solusi PD Total
8. Aplikasi PD pada penyelesaian persoalan sistem fisika

3.1 Persamaan Diferensial Biasa / Sederhana (*Ordinary Differential Equation* / ODE)

Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan yang berisi satu atau beberapa penurunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui. Biasanya disebut $y(x)$ atau $y(t)$. Misal $y = y(x)$, $y = f(x)$, $y = y(t)$, atau $y = f(t)$.

1. $y' = \cos x$
2. $y'' + 9y = e^{-2x}$
3. $y''' - 3/2\ (y')^2 = 0$

$\cos x$, e^{-2x} adalah fungsi

y', y'', y''' adalah turunan (*derivatives*)

9, 2 dan 3/2 adalah konstanta

Beberapa bentuk persamaan diferensial biasa (ODE) adalah:

$F(x,y) = 0$, adalah bentuk implisit

$y = f(x)$, adalah bentuk eksplisit

Solusi (penyelesaian) adalah fungsi $y = h(x)$ yang bisa digambarkan dengan grafik (kurva solusi). Berikut beberapa contoh soal persamaan diferensial biasa, yang diberikan di buku referensi (Kreyzic, 2011)

Verifikasi Solusi x

1. Persamaan $xy' = -y$ untuk semua $x \neq 0$, penyelesaiannya adalah $y = \frac{c}{x}$, c adalah konstanta. Buktikan.
2. Solusi dengan kalkulus.Kurva solusi
   Dapatkan solusi dari persamaan diferensial $y' = \frac{dy}{dx} = \cos x$
3. Pertumbuhan eksponensial (*exponential growth*) dan peluruhan/pengurangan eksponensial (*exponential decay*)
   Persamaan eksponensial dengan persamaan $y = c\ e^{0,2t}$ mempunyai turunan $y = \frac{dy}{dx} c\ e^{0,2t} = 0,2y$, persamaan diferensial umum adalah $y' = ky$. Konstanta k positif adalah

pertumbuhan eksponensial. Konstanta k negatif adalah peluruhan eksponensial

4. Syarat batas (*initial condition*)

   Hitunglah solusi dari $y' = 3y$. Dengan keadaan awal $y(t = 0) = 5.7$

Jawaban:

1. Verifikasi Solusi

   Persamaan $xy' = -y$ untuk semua $x \neq 0$, penyelesaiannya adalah $y = \frac{c}{x}$, c adalah konstanta. Buktikan $y = \frac{c}{x} = cx^{-1}$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(cx^{-1}) = c\frac{d}{dx}x^{-1} = c.-1x^{-2} = -\frac{c}{x^2}$$

   distirbusikan ke persamaan awal

$$xy' = -y$$

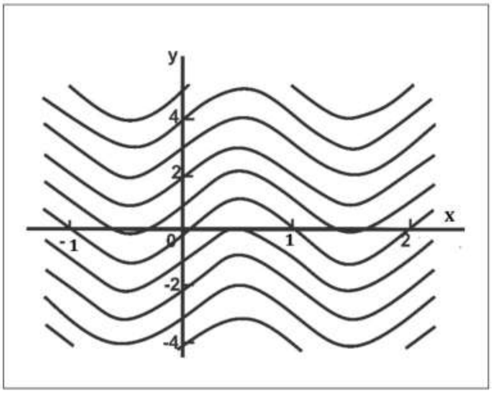
$$x\left(-\frac{c}{x^2}\right) = -\frac{c}{x} \rightarrow \ -\frac{c}{x} = -\frac{c}{x} \ \text{(terbukti)}$$

2. Solusi dengan kalkulus kurva solusi. Dapatkan solusi dari persamaan $y' = \frac{dy}{dx} = cosx$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \cos x \rightarrow dy = cosx.dx$$

$$y = \int cosx\,dx = sinx + c$$

   Kurva solusi pada gambar 3.1 untuk harga-harga $c = \ldots, -4, -3, -2, -2, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$



Gambar 3. 1 Grafik sinus untuk beberapa konstanta

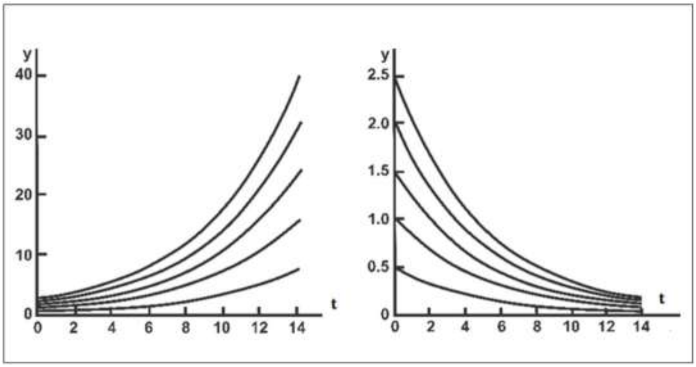
3. Pertumbuhan eksponensial dan peluruhan eksponensial

$$y = ce^{0,2t}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = c.0,2.e^{0,2t} = 0,2.\underbrace{ce^{0,2t}}_{y} = 0,2y$$

$$y' = 0,2y$$

lihat Gambar 3.2



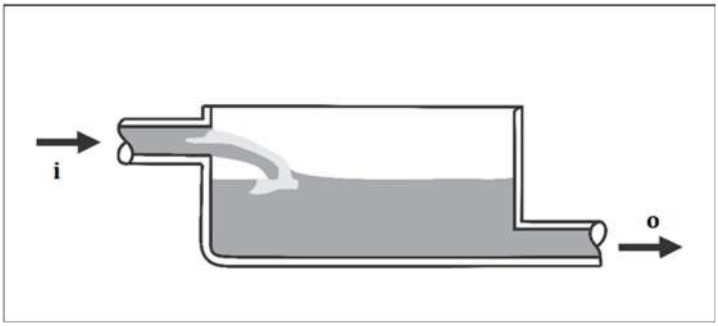
Gambar 3. 2 Pertumbuhan dan peluruhan eksponensial

4. Syarat batas (*initial condition*)
   Hitunglah keadaan awal dari $y' = 3y, y(0) = 5{,}7$
   $y' = \frac{dy}{dx} = 3y \rightarrow$ solusinya adalah: $y(x) = ce^{3x}$… seperti nomor 3
   Pemakaian syarat batas:
   $y(0) = y(x = 0) = 5{,}7 = c.e^{3.0} = c.e^{0} = c$
   Jadi $c = 5{,}7 \rightarrow$
   $$y(x) = 5{,}7e^{3x}$$
   adalah solusi dari persamaan diatas

Aplikasi permodelan

Mendisain model yang bagus tidak bisa dilakukan oleh komputer. Oleh karena itu menyiapkan model menjadi hal yang penting dalam matematika terapan modern. Untuk mendapatkan permodelan yang bagus adalah memeriksa dengan hati-hati proses permodelan diberbagai bidang dan aplikasi. Dengan demikian permodelan akan berguna bagi semuanya baik mahasiswa maupun praktisi dan sarjana teknik dan sains. Beberapa contoh aplikasi pemodelan dari referensi (Kreyzic, 2011) hal 14:

1. Tangki berisi 1000 galon air yang awalnya 100 lb garam dilarutkan. Air garam dimasukkan (i adalah input) dengan laju 10 galon/menit, masing-masing gallon berisi 5 lb garam yang dilarutkan. Campuran dianggap konstan dengan cara pengadukan. Air garam yang keluar (o adalah *output*) dengan laju 10 galon/menit. Dapatkan jumlah garam pada tangki setiap saat t. lihat gambar 3.3



Gambar 3. 3 Tangki air garam

Misal

$y\ (t)$ adalah jumlah garam pada tangki untuk waktu t dan $y'\ (t)$ adalah perubahan jumlah garam terhadap waktu

Aliran garam yang masuk tiap menit adalah $5\ \mathrm{lb} \times 10 = 50\ \mathrm{lb}$

Aliran air garam yang keluar 10 galon → $\frac{10}{100} = 0{,}01\ (1\%)$ dari total air garam dalam tangki.

Jadi garam yang keluar tangki 0,01 y setiap menit

Prinsip dasar: $y'\ (t)$ adalah perubahan jumlah garam terhadap waktu = laju aliran garam masuk – laju aliran garam keluar tangki

Bentuk matematikanya adalah:

$$y' = 50 - 0{,}01\ y = -0{,}01[y - 5000]$$

atau

$$\frac{dy}{dt} = -0{,}01(y - 5000)$$

Ini merupakan model matematis sistem. Karena model matematis dari sistem yang didapatkan bersifat variabelnya bisa dipisahkan (*separable*) maka penyelesaiannya menggunakan pemisahan variabel,

$$\frac{dy}{dt} = -0{,}01(y - 5000)$$

$$\frac{dy}{y-5000} = -0{,}01\ dt \ \text{ diintegralkan}$$

$$\int \frac{dy}{y - 5000} = -0{,}01 \int dt$$

$$\ln(y - 5000) = -0{,}01t + c'$$

$$e^{\ln(y-5000)} = e^{(-0{,}01t+c')}$$

$$y - 5000 = e^{-0{,}01t} e^{c'}$$

Konstanta $e^{c'} = C$

$$y - 5000 = C\ e^{-0{,}01t}$$

Maka

$$y = C\ e^{-0{,}01t} + 5000$$

Adalah penyelesaian umum dari model matematis diatas

Untuk mendapatkan solusi akhir harus dihitung harga C dan cara menghitungnya dengan menggunakan keadaan awal (*initial condition*) yang diberikan di soalnya. Pada mulanya jumlah garam adalah 100 lb,

$y\ (t = 0) = 100$ lb garam, disubstitusikan ke solusi umum,

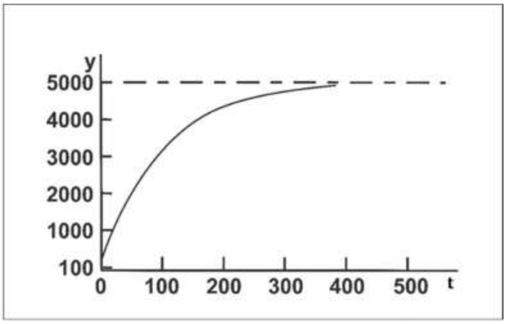
$$100 = C\ e^{-0{,}01\ 0} + 5000$$

Didapatkan $C = -4900$

Maka solusi akhir adalah $y(t) = 5000 - 4900e^{-0{,}01t}$

Persamaan ini menyatakan hubungan antara jumlah garam y terhadap waktu t

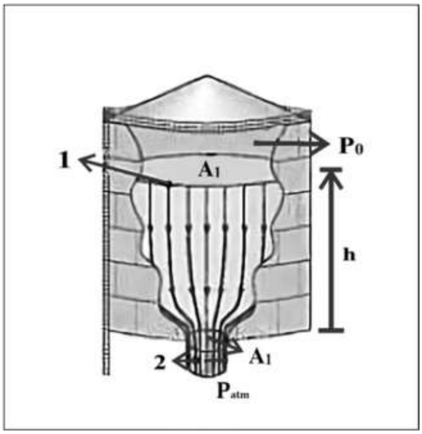
Digambarkan grafik fungsinya adalah pada Gambar 3.4 pada bagian sebelah kanan grafik menunjukkan limit. Garam naik dengan bertambahnya waktu sampai mendekati harga 5000 lb sesuai dengan sifat grafik eksponensial.



Gambar 3. 4 Grafik tangki air garam

Theorema Torricelli. Referensi (Hugh D. Young, 2012) hal 471

Gambar 3.5 memperlihatkan tangki penyimpanan fluida yang luas dan penampung atas A1, diisi setinggi fluida h. Ruang diatas fluida adalah udara dengan tekana P0, dan fluida mengalir keluar melalui lubang kecil dengan luas penampang A2. Tekanan dititik 2 adalah tekanan atmosfir Pa karena berhubungan dengan udara luar.



Gambar 3. 5 Percobaan Torricelli

Persamaan Bernoulli untuk titik 1 dan 2, dan y = h = 0 pada titik 2 (dasar tangki),

$$P_0 + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_a + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2\left(\frac{P_0 - P_a}{\rho}\right) + 2gh$$

v adalah kecepatan.

Karena A_2 jauh lebih kecil dar pada A_1, maka v_1^2 jauh lebih kecil dari pada v_2^2 sehingga diabaikan. Persamaan menjadi:

$$v_2^2 = 2\left(\frac{P_0 - P_a}{\rho}\right) + 2gh$$

Jika bagian atas tangki dibiarkan terbuka maka tekanan P_0 adalah sama dengan tekanan atmosfir, sehingga $P_0 - P_a = 0$,

$$v_2 = \sqrt{2gh} \qquad (3.1)$$

$h = h(t)$ adalah ketinggian fluida fungsi waktu t, dan $v2$ disebut laju eflux.

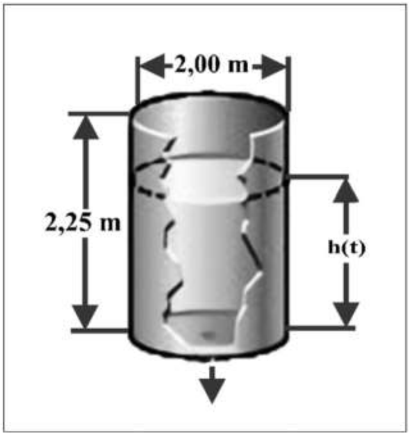
Laju eflux dari lubang berjarak h dibawah permukaan cairan adalah sama dengan laju benda yang jatuh bebas dari ketinggian h, ini disebut Theorema Torricelli. Hal ini juga berlaku untuk lubang di dinding pada kedalaman h dibawah permukaan cairan.

J.C. Borda memperkenalkan faktor kontraksi (*contraction factor*) = 0.6. Sehingga persamaan diatas secara umum menjadi:

$$v = 0{,}6\sqrt{2gh}$$

2. Cairan yang mengalir melalui suatu lubang (*Torricelli's law*) dari referensi (Kreyzic, 2011) hal 17.

   Aliran keluar air dari suatu tangki silinder dengan suatu lubang pada dasarnya. Diameter tangki 2 meter, diameter lubang 1 centimeter, tinggi awal 2,25 meter. Kapan tangki menjadi kosong? Lihat Gambar 3.6



Gambar 3. 6 Tangki silinder dengan lubang kecil pada dasarnya

   Dari Teorema Torricelli dan Borda didapat kecepatan aliran air keluar adalah

$$\boxed{v(t) = 0{,}6\sqrt{2gh(t)}}$$

   $h(t)$ = tinggi air tangki pada waktu t
   g = percepatan gravitasi = 980 cm/s2
   v = kecepatan
   V = volume

Pada saluran/lubang kecil di bawah tangki maka volume (V) adalah panjang (l) dikalikan luas penampang (A) saluran,

$$\mathrm{V} = lA$$

Sedangkan panjang saluran adalah kecepatan aliran fluida (v) dikalikan waktu (t)

$$l = vt$$

Maka perubahan volume air yang keluar pada selang waktu t adalah

$$\Delta V = Av\Delta t$$

Volume tangki adalah tinggi cairan (h) dikalikan luas penampang tangki (A)

$$V = Bh$$

Maka perubahan volume air pada tangki pada selang waktu t

$$\Delta V = -B\Delta h$$

Keterangan:

A = luas penampang lubang keluar

B = luas penampang tangki

h = h(t) = tinggi fluida adalah fungsi waktu

Tanda (-) artinya air dalam tangki berkurang

Prinsip: perubahan volume air pada tangki = perubahan volume air yang keluar pada selang waktu t

$$Av\Delta t = -B\Delta h$$

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = -\frac{A}{B}v = -\frac{A}{B}0{,}6\sqrt{2gh(t)}$$

Untuk Δt mendekati nol ($\Delta t \rightarrow 0$)

Maka $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ menjadi $\frac{dh}{dt}$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A}{B}0{,}6\sqrt{2gh(t)}$$

2 Harga A dan B dicari dengan:

$d_A = 1\ cm = 10^{-2}\ m$ $\quad$ $d_B = 2\ m$ $\quad$ d adalah diameter

$r_A = ½\ cm = 5.10^{-3}\ m$ $\quad$ $rB = 1\ m$ $\quad$ r adalah jari-jari

$A = \pi r_A = \pi.25.10^{-6}m^2$ $\quad$ $B = \pi r_B^2 = \pi\ .1m^2 = \pi m^2$ $\quad$ $r = \frac{d}{2}$

$$\frac{A}{B} = \frac{\pi.25.10^{-6}m^2}{\pi.m^2} = 25.10^{-6}$$

Maka persamaan diatas menjadi

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A}{B}0{,}6\sqrt{2gh(t)}$$

$$\frac{dh}{dt} = -25.10^{-6}.0{,}6\sqrt{2.980.h(t)}$$

$$\frac{dh}{dt} = -0{,}000664\sqrt{h(t)}$$

Persamaan ini adalah model matematika perubahan tinggi air dalam tangki terhadap waktu

Persamaan bisa diselesaikan dengan pemisahan variabel

$$\frac{dh}{dt} = -0{,}000664\sqrt{h(t)} \rightarrow \frac{dh}{\sqrt{h(t)}} = -0{,}000664\ dt$$

Diintegralkan

$$\int \frac{dh}{h^{1/2}} = -0{,}000664 \int dt$$

$$\int h^{-1/2} dh = -0{,}000664 \int dt \rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} = 0{,}000664t + c'$$

$$h^{1/2} = -\tfrac{1}{2}.0{,}000664t + \tfrac{1}{2}c' \qquad\qquad \tfrac{1}{2}c' = c$$

$$h^{1/2} = 0{,}000332t + C$$

$$h = (c - 0{,}000332t)^2$$

Persamaan ini merupakan solusi umum dari model matematika diatas, untuk mendapatkan solusi akhir maka harga c dihitung dengan mempergunakan syarat batas yang di dapat dari soal

Syarat batas $h\,(t = 0) = 225\ cm$, disubstitusikan ke persamaan

$$225 = (c - 0{,}000332.0)^2 \rightarrow c = 15$$

$$h(t) = (15 - 0{,}000332t)^2$$

Persamaan diatas adalah solusi akhir

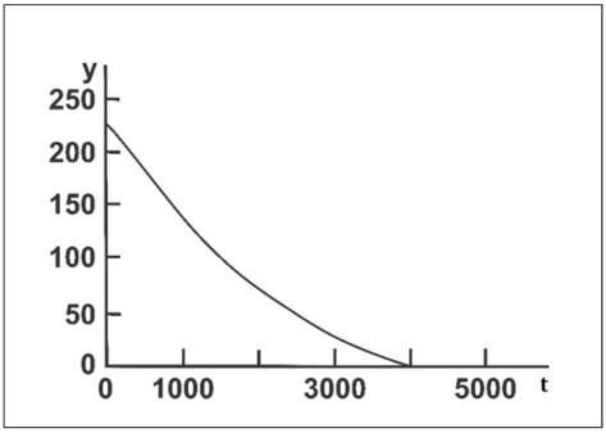
Tangki kosong pada t berapa?

$h\,(t) = 0$, disubstitusikan ke persamaan solusi akhir didapatkan

$$0 = (15 - 0{,}000332t)^2 \rightarrow t = \frac{15}{0{,}000322}\,\text{det}$$

$t = 46583{,}85\ det = 12{,}6$ jam

Jadi tangki kosong dalam waktu 12,6 jam. Lihat Gambar 3.7



Gambar 3. 7 Grafik solusi tangki silinder dengan lubang kecil pada dasarnya

3.2. Persamaan diferensial (ODE) homogen dan non homogen orde I

3.2.1 Persamaan diferensial homogen orde 1

Persamaan atau model matematis yang didapatkan dari 2 soal diatas adalah merupakan

contoh dari persamaan diferensial homogen orde 1. Bentuk umumnya adalah

$$y' + p(x)y = 0$$

$$y = f(x) \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

Solusinya

$$y' + p(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y \rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

diintegralkan

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \to \ln y = -\int p(x)dx + c'$$

$$e^{\ln y} = e^{-\int p(x)d(x)+c'} = e^{-\int p(x)dx)} \, . \, e^{c'} \, , \, e^{c'} = C$$

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx} \qquad (4)$$

Adalah merupakan solusi dari persamaan diferensial homogen orde 1

3.2.2 Persamaan diferensial non homogen orde 1

$$y' + p(x)y = r(x)$$

$$y = f(x)$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

dikali dengan F

$Fy' + FPy = Fr$ untuk $FPy = F'y$

Ruas sebelah kiri = $(Fy)'$

$(Fy)' = F'y + y'F$

$Fpy = F'y \to Fp = F' \to Fp = \frac{dF}{dx}$

$\frac{dF}{F} = pdx$ diintegrasikan

$\int \frac{dF}{F} = \int pdx$

$\ln F = \int pdx = h \to \ln F = h \to e^{\ln F} = e^h \to F = e^h$

$h = \int pdx \to \frac{dh}{dx} = \frac{d}{dx}\int pdx = p \to h' = p$

Dimasukkan ke persamaan

$$Fy' + FPy = Fr$$

$$e^h y' + e^h h' y = e^h y' + (e^h)' y$$

$$= (e^h y)'$$

$$= e^h r = re^h$$

$$(e^h y)' = \frac{d}{dx}(e^h y) = re^h$$

$$d(e^h y) = re^h dx$$

$$\int d(e^h y) = \int re^h dx \rightarrow e^h y = \int re^h\, dx + c$$

$$y = e^{-h}(\int e^h r dx + c)$$

$$y = e^{-h}(\int e^h r dx + c) \text{ dengan } h = \int p(x)dx \qquad (3.2)$$

Adalah penyelesaian ODE non homogen orde I

$$y(x) = e^{-h} (\int e^h rdx + c)$$

$$= e^{-h} \int e^h rdx + ce^{-h}$$

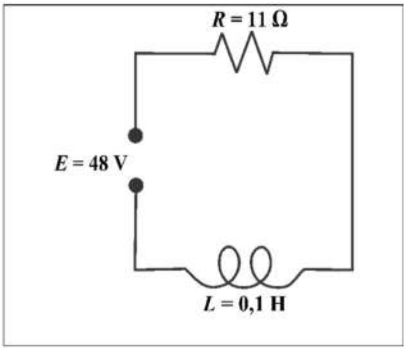
Keterangan : *y (x)* output total

e-h $\int e^h rdx$ respon terhadap input *r*

ce^{-h} respon terhadap data awal

Rangkaian Listrik

Model rangkaian listrik RL lihat Gambar 3.8 sumber referensi (Kreyzic, 2011) hal 30.



Gambar 3. 8 Rangkaian Listrik R dan L

Selesaikan persamaan diferensial biasa (ODE) untuk arus $I(t)$ dengan satuan A (Ampere), dimana t satuan detik adalah waktu. Dan gambarkan grafik fungsi $I(t)$.

Dimisalkan rangkaian berisi EMF (*electromotive force*) $E(t)$ sebuah baterai $E = 48\ V$ (Volt), besarnya konstan, sebuah resistor R = 11 Ω (ohm) dan induktor $L = 0{,}1\ H$ (Henry), dan arus pada awalnya nol.

Penurunan model matematika

Arus I pada rangkaian menyebabkan suatu voltage drop RI melewati resistor (Hukum Ohm) dan $LI' = L\frac{dI}{dt}$ melewati induktor. Jumlah kedua voltage drop sama dengan EMF (*Kirchoff Voltage Law*, KVL).

Menururt hukum-hukum diatas model dari rangkaian RL adalah:

$$LI' + RI = E\ (t) \text{ atau } I' + \frac{R}{L}I = \frac{E(t)}{L}$$

Model matematika rangkain listrik ini berbentuk PD non homogen orde 1, yang bentuk umumnya adalah,

$$y' + p(x)y = r(x)$$

dan solusinya adalah

$y(x) = e^{-h} (\int e^h\, rdx + c)$ dengan $h = \int_0^t p(x)dx$

untuk

$$x = t, \quad y = I, \quad \frac{R}{L} = p \quad r = \frac{E(t)}{L}$$

$$h = \int \frac{R}{L} dt = \frac{R}{L} t$$

maka solusi umumnya adalah

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left(\int e^{\frac{R}{L}t}\frac{E(t)}{L}dt + c\right)$$

$$E(t) = E = \text{konstan}$$

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{E}{L}\int \frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t} + c\right)$$

$$= e^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{E}{L}.\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t} + c\right)$$

$$= \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}.e^{\frac{R}{L}t} + ce^{-\frac{R}{L}t}$$

$$= \frac{E}{R} + ce^{-\frac{R}{L}t}$$

Nilainya dimasukkan

$$\frac{R}{L} = \frac{11}{0,1} = 110 \qquad \frac{E(t)}{R} = \frac{E}{R} = \frac{48}{0,1} = 480 \rightarrow I = \frac{480}{110} + ce^{-110t}$$

Kondisi awal $t = 0$ $I = 0 \rightarrow$ dimasukkan ke persamaan diatas untuk mendapatkan harga I

$$I = \frac{48}{11} + c.e^{-110.0} = 0 \rightarrow \frac{48}{11} + c.1 = 0$$

Maka $c = \frac{48}{11}$

$$I = \frac{48}{11} - \frac{48}{11}.e^{-110t} = \frac{48}{11}(1 - e^{-110t})$$

Kemudian digambar fungsi grafik $I = f(t)$ untuk mendapatkan respon arus terhadap waktu.

3.3 Persamaan diferensial homogen orde 2 (*Second order homogenous* ODE)

Model dari sistem masa pegas, lihat Gambar 3.7 sumber referensi [3] hal 62

Hukum Hooke $F1 = -ky$ gaya pemulihan (*restoring force*), arah negatif adalah keatas. Gerakan dari sistem dinyatakan dalam Hukum Newton II

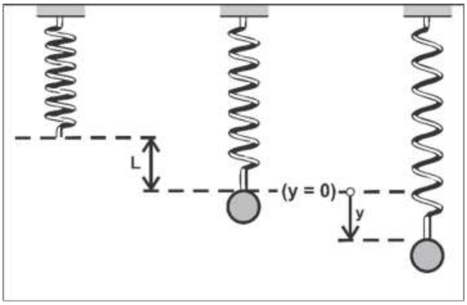
$$\sum \text{gaya} = \text{massa x percepatan}$$

$$\sum F = m.a = my''$$

$$F_1 = my''$$

$$-ky = my''$$

$$my'' + ky = 0$$



Gambar 3. 9 Sistem masa dan pegas

Kecepatan sudutnya adalah

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

k = konstanta pegas

m = massa benda

y = simpangan

sedangkan relasi antara kecepatan sudut dan frekuensi adalah

$$\omega_0 = 2\pi f$$

$$2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Disebut frekuensi harmonik

Apabila pada sistem diatas ditambah dengan peredam, sumber referensi no (Kreyzic, 2011) hal 64 lihat Gambar 3.9 maka penurunan model matematikanya adalah:

Hukum Newton II

$$\sum F = ma$$

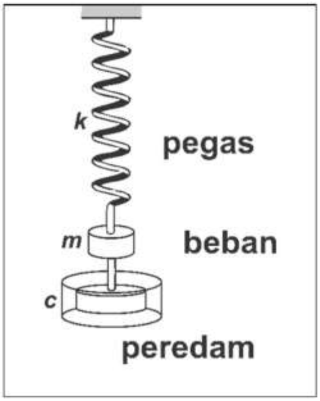
$$F_1 + F_2 = ma$$

$$-ky - cy' = my''$$

$$my'' + cy' + ky = 0 \qquad (6)$$

$$y' = \frac{dy}{dt} = v$$

c = konstanta peredam / *damping contant*



Gambar 3. 10 Sistem masa, pegas teredam

Penyelesaiannya dengan persamaan karakteristik

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

dengan rumus abc didapat

$$\lambda_1 = -\alpha + \beta_1 \lambda_2 = -\alpha - \beta$$

$$\text{dimana } \alpha = \frac{c}{2m} \quad \beta = \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4mk}$$

$$c^2 - 4mk \text{ disebut determinan}$$

Untuk persamaan diferensial berbentuk

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Maka determinan (*d*) adalah

$$d = b^2 - 4ac$$

Ada 3 kemungkinan yang muncul

1. Determinan positip: $c^2 > 4mk \rightarrow$ dihasilkan 2 akar real λ_1 dan λ_2 (*overdamping*)
   Solusi $y(t) = c_1 e^{-(\alpha - \beta)t} + c_2 e^{-(\alpha + \beta)t} = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ (3.3)

2. Determinan nol: $c^2 = 4mk \rightarrow$ dihasilkan 2 akar yang sama λ (*critically damping*)

   Solusi $y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\lambda t}$ (3.4)

3. Determinan negatip: $c^2 < 4mk \rightarrow$ dihasilkan 2 akar komplek berpasangan atau komplek conjugate λ_1 dan λ_2 (*under damping*)

   $\beta = i\omega^*$

   $\omega^* = \frac{1}{2m}\sqrt{4mk - c^2}$

   $\lambda_1 = -\alpha + i\omega^* \quad \lambda_2 = -\alpha - i\omega^* \quad \alpha = \frac{c}{2m}$

   Solusi $y(t) = e^{-\alpha t}(A \cos \omega^* t + B \sin \omega^* t)$ (3.5)

   atau

   $y(t) = ce^{-\alpha t}\cos(\omega^* t - \delta)$

   $\delta = \tan^{-1}\dfrac{B}{A}$

   $C = \sqrt{A^2 + B^2}$

Contoh soal, sumber referensi no (Kreyzic, 2011) hal 68.

Jika suatu sistem massa – pegas dari bola besi berat $W = 98$ N. Bola menarik pegas ini sepanjang 1,09 meter dengan konstanta damping

a. $c = 100\ kg/s^2$

b. $c = 60\ kg/s^2$

c. $c = 10\ kg/s^2$

Berapa frekuensi sistem? Bagaimana geraknya bila pada awalnya bola ditarik sepanjang 16 cm dengan kecepatan awal nol?

Jawab:

Sistem massa pegas

$$\left.\begin{array}{l} W = 98\text{ N} \\ y = 1{,}09\text{ m} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{gaya Hooke} \quad F = ky \\ k = \frac{F}{y} = \frac{98\,N}{1{,}09\,m} = 90\ \frac{kg\,m}{det^2}.\frac{1}{m} = 90\ \frac{kg}{det^2} = 90\frac{N}{m} \end{array}$$

Massa bola besi W = mg → $m = \frac{w}{g} = \frac{98N}{9{,}8\ m/s^2} = 10\ kg$

Dengan g = percepatan gravitasi = $9{,}8\ m/s^2$

f = frekuensi

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{90\ N/m}{10\ kg}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9kg\ m}{det^2 m/kg}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9}{det^2}} = \frac{1}{2\pi}\frac{3}{det} = \frac{3}{2\pi}hz = 0{,}48\ hz$$

Kemudian dihitung simpangan $y = y(t)$ sistem, dari persamaan

$$my'' + cy' + ky = 0$$

Dimasukkan harga-harganya

Untuk contoh soal a konstanta damping $c = 100\ kg/s^2$

$$10y'' + 100y' + 90y = 0 \rightarrow y'' + 10y' + 9y = 0$$

Maka determinan (d) adalah

$$d = 10^2 - 4.9 = 64$$

Maka sistemnya disebut *over damping*, solusinya adalah

Persamaan karakteristik dari sistem diatas adalah

$$\lambda^2 + 10\lambda + 9 = 0$$

Difaktorisasi menjadi,

$$(\lambda + 9)(\lambda + 1) = 0$$

Maka didapat 2 suku bilangan *real* yaitu: $\lambda_1 = -9$ dan $\lambda_1 = -1$

Solusi dari kasus *over damping* adalah

$$y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$y = c_1 e^{-9t} + c_2 e^{-t}$$

Ini adalah solusi umu untuk persamaan diferensial diatas, untuk mendapatkan solusi akhir dihitung dulu koefisien-koefisien

$c1$ dan $c2$ dengan menggunakan syarat batas yang terdapat pada soal.

Syarat batas untuk $t = 0 \rightarrow y = 0{,}16\ m$ dan $y' = 0\ m/s$

Pertama dipakai syarat batas yang pertama $t = 0 \rightarrow y = 0{,}16\ m$, dimasukkan ke persamaan

$$y = c_1\, e^{-9t} + c_2\, e^{-t}$$

$$0{,}16 = c_1\, e^{-0} + c_2\, e^{-0} \rightarrow c_1 + c_2 = 0{,}16$$

Syarat batas yang ke dua $t = 0 \rightarrow y' = 0\ m/s$. Persamaan dideferensialkan untuk mendapatkan y'

$$y' = \frac{dy}{dt} = -9c_1e^{-9t} - c_2e^{-t}$$

Dimasukkan harganya

$$0 = -9c_1\, e^{-0} - c_2\, e^{0} \rightarrow 9c_1 + c_2 = 0$$

$$\begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0{,}16 \\ 9c_1 + c_2 = 0 \\ \hline -8c_1 = 0{,}16 \end{array} \quad -$$

$$c_1 = -\frac{0{,}16}{8} = -\,0{,}02$$

$$c_1 + c_2 = 0{,}16$$

$$c_2 = 0{,}18$$

Maka solusi akhir adalah

$$y = -0{,}02e^{-9t} + 0{,}18e^{-t}$$

Untuk contoh soal a konstanta damping $c = 60\ kg/s^2$ persamaan menjadi:

$$10y'' + 60y' + 90 = 0$$

atau

$$y'' + 6y' + 9 = 0$$

Maka persamaan karakteristiknya

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$$

Di hitung determinannya

$$d = 6^2 - 4.1.9 = 0$$

Maka sistemnya adalah *critically damping*, maka yang dihasilkan adalah 1 akar real

$$(\lambda + 3)^2 = 0$$

$$\lambda = 3$$

Solusi dari sistem dengan kasus *critically damping* adalah

$$y = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t}$$

$$y = (c_1 + c_2 t)\, e^{-3t} = c_1 e^{-3t} + c_2 te^{-3t}$$

Ini adalah solusi umumnya, untuk mencari solusi akhir di substitusikan kondisi awal yang terdapat pada soal

Syarat batas untuk $t = 0 \rightarrow y = 0{,}16\ m$ dan $y' = 0\ m/s$

Syarat batas yang pertama adalah

$$t = 0 \rightarrow y = 0{,}16$$

kemudian di substitusi hasilnya adalah

$$0{,}16 = c_1 e^{-3.0} + c_2.0.e^{-3.0}$$

$$c_1 = 0{,}16$$

Syarat batas yang ke dua $t = 0 \rightarrow y' = 0\ m/s$. Persamaan dideferensialkan untuk mendapatkan y'

$$y' = \frac{dy}{dt} = -3c_1e^{-3t} + c_2(e^{-3t} - 3te^{-3t})$$

$$y' = (-3c_1 + c_2 - 3tc_2)e^{-3t}$$

Disubstitusi harganya

$$0 = (-3c_1 + c_2 - 3.0.c_2)e^{-3.0}$$

$$\left.\begin{array}{l} -3c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 = 0{,}16 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -3.0{,}16 + c_2 = 0 \\ c_2 = 0{,}48 \end{array}$$

Maka solusi akhir adalah

$$y = (0{,}16 + 0{,}48t)e^{-3t}$$

Untuk contoh soal a konstanta damping c = 10 kg/s^2

Maka model matematka yang didapatkan adalah:

$$10y'' = 10y' + 90y = 0$$

atau

$$y'' + y' + 9y = 0$$

Determinannya dihitung

$$d = 1^2 - 4.1.9 = -36$$

Maka sistemnya adalah *under damping*, maka yang dihasilkan adalah 2 akar bilangan komplek yang berpasangan atau komplek konjuget. Cara mendapatkannya dengan memakai rumus abc. Untuk persamaan diferensial dengan bentuk umum

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$$\lambda_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\lambda_{12} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 36} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{35}{4}}$$

$$\lambda_{12} = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{35}{4}}\, i = -0{,}5 \pm i2{,}96 = -0{,}5 \pm 2{,}96\, i$$

Artinya $\alpha = 0{,}5$ dan $\omega^* = 2{,}96$

Solusi untuk kasus *under damping* adalah

$$y = e^{-\alpha t} (A \cos \omega^* t + B \sin \omega^* t)$$

$$y = e^{-0{,}5t} (A \cos(2{,}96t) + B \sin(2{,}96t))$$

Ini merupakan solusi umum dari persamaan di atas, untuk mendapatkan solusi akhir maka koefisien A dan B dicari dari syarat batas

Syarat batas untuk $t = 0 \rightarrow y = 0{,}16\ m$ dan $y' = 0\ m/s$

Syarat batas yang pertama adalah

$$t = 0 \rightarrow y = 0{,}16$$

Disubstitusiskan ke solusi umum menjadi

$$0{,}16 = \underbrace{e^{-0{,}5.0}}_{=1} (A \sin 0 + B \cos 0) \rightarrow A = 0{,}16$$

Kemudian solusi umum dideferensialkan terhadap waktu t didapatkan

$$y' = \frac{dy}{dt} = -0{,}5e^{-0{,}5t}(A\cos(2{,}96t) + B\sin(2{,}96t))$$

$$+ e^{-0{,}5t}(-2{,}96\,A\sin(2{,}96t) + 2{,}96\,B\cos(2{,}96t))$$

Syarat batas yang ke dua adalah $t = 0 \rightarrow y' = 0$, disubstitusikan ke y' didapatkan

$$0 = -0{,}5e^{0}\,(A\cos 0 + B\sin 0)$$
$$+ e^{0}\,(-2{,}96\,A\sin 0 + 2{,}96\,B\cos 0)$$

didapatkan

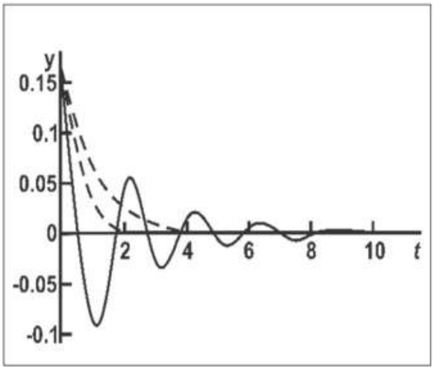
$$0 = -0{,}5A + 2{,}96B$$

$$0 = -0{,}5.0{,}16 + 2{,}96B \rightarrow B = \frac{0{,}5.0{,}16}{2{,}96} = 0{,}03$$

Maka solusi didapatkan

$$y = e^{-0{,}5t}\,(0{,}16\cos(2{,}96t) + 0{,}03\sin(2{,}96t))$$

Intepretasi dari ketika kasus: *over, critically* dan *under damping* digambarkan dalam satu grafik, yaitu pada Gambar 3. dibawah ini



Gambar 3. 11 Grafik solusi ketiga persamaan diferensial pada masa dan pegas teredam

3.4 Persamaan diferensial non homogen orde 2

(Second order non homogenous ODE)

Bentuk umum

$$y'' + p(x)y' + Q(x)y = r(x)$$

Solusi akhir adalah $y = y_h + y_p$

y_h adalah solusi umum (*general solution*)

y_p adalah solusi khusus (*particular solution*)

Solusi umum adalah solusi ODE non homogen $(r(x) = 0)$, kemudian dihitung determinannya sehingga diketahui solusinya (*overdamping, critically damping* atau *under damping*).

Sedangkan solusi khusus y_p dapat dilihat pada Tabel 3.1 dibawah

Tabel 3. 1 Solusi khusus

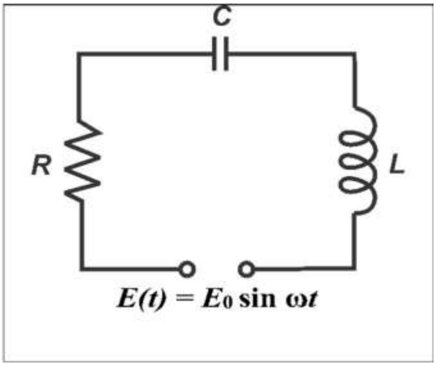
Bentuk dari $r(x)$	Solusi khusus $y_p(x)$
$ke^{\gamma x}$	$Ce^{\gamma x}$
$kx^n \quad (n = 0, 1, \ldots)$	$K_n x^n + K_{n-1}x^{n-1} + \cdots + K_1 x + K_0$
$k \cos \omega x$	$K \cos \omega x + M \sin \omega x$
$k \sin \omega x$	
$ke^{\alpha x} \cos \omega x$	$e^{\alpha x}(K \cos \omega x + M \sin \omega x)$
$ke^{\alpha x} \sin \omega x$	

Contoh soal

Rangkaian listrik. Lihat gambar 3.12 dan Tabel 3.2. sumber referensi (Kreyzic, 2011) hal 93

Persamaan matematika rangkaian R, L, dan C ini adalah seperti persamaan diferensial yang lalu (tanpa kapasitor) $LI' + RI = E(t)$, maka ditambah dengan *voltage drop* $\frac{Q}{C}$ yang melewati kapasitor,

C dalam F (*farad*) adalah kapasitansi kapasitor, Q dalam C (*Coulomb*) adalah muatan kapasitor. Sedangkan hubungan antara arus listrik, muatan dan waktu adalah $I(t) = \frac{dQ}{dt}$



Gambar 3. 12 Rangkaian listrik R, L, dan C

Tabel 3. 2 Elemen-elemen pada rangkaian listrik R, L dan C

Nama	Simbol	Notasi	Satuan	*Voltage Drop*
Resistor		R	ohm (Ω)	RI
Induktor		L	henry (H)	$L\frac{dI}{dt}$
Kapasitor		C	farad (F)	Q/C

Penurunan persamaan matematika rangkaian diatas

$$LI' + RI + \frac{Q}{C} = E(t) = E_0 \sin \omega t$$

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t) = E_0 \sin \omega t$$

Dideferensialkan terhadap t

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}\frac{dQ}{dt}=\frac{dE(t)}{dt}$$

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=E_0\omega\cos\omega t$$

$$LI"+RI'+\frac{1}{C}I=E_0\omega\cos\omega t$$

Ini merupakan model matematika dari sistem diatas dan merupakan persamaan diferensial biasa orde 2 non homogen

Pertama dihitung solusi umum dengan cara membuat persamaan menjadi persamaan diferensial biasa homogen, sehingga penyelesaiannya seperti bab yang sebelumnya

$$LI"+RI'+\frac{1}{C}I=0$$

Persamaan karakteristik dari persamaan diatas adalah

$$L\lambda^2+R\lambda+\frac{1}{C}=0 \text{ atau } \lambda^2+\frac{R}{L}\lambda+\frac{1}{LC}=0$$

Penyelesaian dengan menggunakan rumus abc

$$\lambda_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-\frac{R}{L}\pm\sqrt{\frac{R^2}{L^2}-\frac{4}{LC}}}{2}$$

$$\lambda_1=\frac{1}{2L}\left(-R+\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}\right)$$

$$\lambda_2=\frac{1}{2L}\left(-R-\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}\right)$$

Jadi,

$$I_h = c_1 e^{\frac{1}{RL}\left(-R+\sqrt{R^2-\frac{4L}{c}}\right)t} + c_2 e^{\frac{1}{RL}\left(-R-\sqrt{R^2-\frac{4L}{c}}\right)t}$$

adalah solusi umum persamaan diatas.

Untuk solusi khusus maka lihat tabel pada gambar 3.10

Persamaan

$$LI" + RI' + \frac{1}{C}I = E_0\omega\cos\omega t$$

$$\boxed{r(x) = k\cos\omega x \;\rightarrow\; y_p(x) = K\cos\omega x + M\sin\omega x}$$

Jadi solusi khusus persamaan diatas adalah

$$I_p = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

$$I'_p = \frac{dI_p}{dt} = \omega(-a\sin\omega t + b\cos\omega t)$$

$$I''_p = \frac{d^2I_p}{dt^2} = \omega^2(-a\cos\omega t - b\sin\omega t)$$

Substitusi ke persamaan

$$LI" + RI' + \frac{1}{C}I = E_0\omega\cos\omega t$$

$$L\omega^2(-a\ \cos\omega t - b\sin\omega t) + R\omega(-a\sin\omega t + b\cos\omega t) + \frac{1}{C}(a\ \cos\omega t + b\sin\omega t)$$
$$= E_0\omega\cos\omega t$$

$$\left[L\omega^2(-a) + R\omega b + \frac{a}{C}\right]\cos\omega t + \left[L\omega^2(-b) + R\omega(-\alpha) + \frac{b}{C}\right] sin\omega t$$
$$= E_0\omega\cos\omega t + 0\sin\omega t$$

Untuk mencari harga koefisien a dan b dipisahkan bagian sinus dan kosinus

Bagian cosinus:

$$L\omega^2(-a) + R\omega b + \frac{a}{C} = E_0\omega$$

$$L\omega(-a) + Rb + \frac{a}{\omega C} = E_0$$

$$-a\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) + Rb = E_0$$

$$-as + Rb = E_0$$

Keterangan:

$s = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ Reaktansi

$X_L = \omega L$ Reaktansi induktif

$X_c = \frac{1}{\omega C}$ Reaktansi kapasitif

R = Resistansi

$$Z = \sqrt{R^2 + s^2}$$

Z adalah impedansi atau tahanan total arus bolak balik

Bagian sinus:

$$L\omega^2(-b) + \omega R(-a) + \frac{b}{C} = 0$$

$$L\omega(-b) + R(-a) + \frac{b}{\omega C} = 0$$

$$-b\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) - Ra = 0$$

$$-bs - Ra = 0$$

Dari

$$-sa + Rb = E_0$$

$$-Ra - sb = 0$$

Didapat

$$a = -\frac{E_0 s}{R^2 + s^2} \quad \text{dan} \quad b = \frac{E_0 R}{R^2 + s^2}$$

Solusi partikular:

$$I_p = a \cos \omega t - b \sin \omega t$$

$$= -\frac{E_0 s}{R^2+s^2} \cos \omega t + \frac{E_0 R}{R^2+s^2} \sin \omega t$$

Sehingga solusi akhir didapatkan:

$$I = I_h + I_p$$

$$= \underbrace{c_1 e^{\frac{1}{RL}\left(-R+\sqrt{R^2-\frac{4L}{c}}\right)t} + c_2 e^{\frac{1}{RL}\left(-R-\sqrt{R^2-\frac{4L}{c}}\right)t}}_{I_h} + \underbrace{-\frac{E_0 s}{R^2+s^2} \cos \omega t + \frac{E_0 R}{R^2+s^2} \sin \omega t}_{I_p}$$

Contoh soal:

Dapatkan persamaan arus *I(t)* pada suatu rangkaian *RLC*. Dimana tahana *R = 11*Ω, induktor *L = 0,1* henry (*H*), kapasitor *C = 10-2* farad (*F*), frekuensi *f = 60* herz (*Hz*), Sumber tegangan *EMF E(t) = 110 sin ωt, ω = 2πf*.

Syarat batas ketika awal waktu

t = 0, arus (*I*) dan muatan (*Q*) sama dengan nol.

Jawab:

Diketahui harga-harga *R = 11 Ω; L = 0,1 H; C = 10-2 F, f = 60 Hz*; dan *E(t) = 110 sin ωt*

ω = 2πf = 2 . 3,14.60 = 377; maka *E(t) = 110 sin 377t*

Persamaan umum

$$LI" + RI' + \frac{1}{C} = E(t)$$

$$0{,}1\, I'' + 11\, I' + 10^2 I = 110.377 \cos 377t$$

Pertama dihitung dahulu solusi umum dari persamaan disamping, yaitu dijadikan Persamaaan homogen

$$0{,}1\, I'' + 11\, I' + 10^2\, I = 0$$

Di hitung determinannya $d = 112 - 4.\ 0{,}1.\ 100 = 121 - 40 = 81$

Harga determinan lebih besar dari 0 maka sistemnya adalah over damping, akan didapatkan 2 akar bilangan real

Persamaan karakteristik

$$0{,}1\lambda^2 + 11\lambda + 100 = 0$$

$$\lambda^2 + 110\lambda + 1000 = 0$$

Difaktorisasi

$$(\lambda+10)(\lambda+100) = 0$$

Didapatkan akar-akarnya 2 bilangan real

$$\lambda_1 = -10 \qquad \lambda_2 = -100$$

maka solusi umum $I_h = c_1\, e^{\lambda 1t} + c_2\, e^{\lambda 2t}$

$$= c_1\, e^{-10t} + c_2\, e^{-100t}$$

Solusi khusus: $I_p\,(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$

$$= a \cos 377t + b \sin 377t$$

$$S = \omega L - \frac{1}{\omega c} = 377\ .\ 0{,}1 - \frac{1}{377.\ 10^{-2}} = 37{,}4$$

$$a = -\frac{E_0 s}{R^2 + s^2} = -\ \frac{110.37{,}4}{11^2 + 37{,}4^2} = -2{,}71$$

$$b = \frac{E_0 R}{R^2 + s^2} = \frac{100.11}{11^2 + 37{,}4^2} = 0{,}796$$

$$I_p(t) = -2{,}71 \cos 377t + 0{,}796 \sin 377t$$

Solusi: $I = I_h + I_p$

$$I = c_1 e^{-10t} + c_2 e^{-100t} - 2{,}71 \cos 337t + 0{,}796 \sin 377t$$

Solusi akhir didapatkan dengan menghitung koefisien c_1 dan c_2 dengan syarat batas

$$t = 0 \rightarrow Q \text{ dan } I = 0$$

Syarat batas yang pertama adalah untuk $t = 0$ maka $I = 0$, disubstitusi pada solusi diatas

$$t = 0, I = 0 \rightarrow I = c_1 e^{-0} + c_2 e^{-0} - 2{,}71 \cos 0 + 0{,}796 \sin 0$$

$$0 = c_1 + c_2 - 2{,}71 \rightarrow c_2 = 2{,}71 - c_1$$

Dari persamaan

$$\left.\begin{array}{l} LI' + RI + \frac{Q}{C} = E_0 \sin \omega t \\ \left.\begin{array}{l} \mathrm{I} = 0 \\ \mathrm{Q} = 0 \end{array}\right\} \text{pada t} = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} LI' + RI + \frac{Q}{C} = E_0 \sin \omega t \\ LI' + R.0 + \frac{0}{C} = E_0 \sin 0 \\ \text{didapatkan } I' = 0 \end{array}$$

Solusi diatas diturunkan terhadap t didapatkan

$$I' = \frac{dI}{dt} = -10c_1 e^{-10t} - 100c_2 e^{-100t}$$

$$-2{,}71.377 \sin 377t + 0{,}796.377 \cos 377t$$

$t = 0, I' = 0$ disubstitusi ke persamaan diatas

$$\left.\begin{array}{l} 0 = -10c_1 e^{-0} - 100c_2 - 2{,}71.377 \sin 0 + 0{,}796.377 \cos 0 \\ \quad -10c_1 - 100c_2 + 0{,}796.377 = 0 \\ \quad c_2 = -2{,}71 - c_1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} c_1 = -0{,}323 \\ c_2 = 3{,}033 \end{array}$$

Sehingga solusi akhir adalah

$I(t) = -0{,}323e^{-10t} + 3{,}033e^{-100t} - 2{,}71 \cos 377t + 0{,}796 \sin 377t$

Osilasi paksa (*forced osillations*)

Lihat gambar 3.11 merupakan sistem pegas - masa teredam dengan ditambah dengan gaya luar yag merupakan osilator, sumber referensi no. [3] hal 85.

Bentuk persamaan menjadi $my'' + cy' + ky = r(t); r(t)$ adalah *driving force* = gaya luar yang memengaruhi sistem.

$$r(t) = F_0 \cos \omega t \text{ dan } F_0 > 0, \omega > 0$$

Maka model matematika yang didapat adalah persamaan diferensial biasa orde 2 non homogen:

$$my'' + cy' + ky = F_0 \cos \omega t$$

Dengan solusi $y = y_h + y_P$; y_h adalah solusi umum (*general solution*) dan y_P adalah solusi khusus (*particular solution*)

$$y_P(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

Dideferensialkan

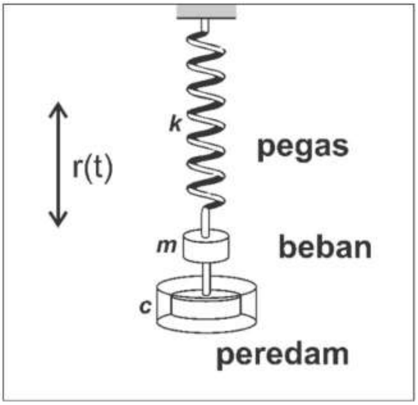
$$y'_P = -\omega a \sin \omega t + \omega b \cos \omega t$$

$$y''_P = -\omega^2 a \cos \omega t + \omega^2 b \sin \omega t$$

Disubstitusi ke persamaan $my'' + cy' + ky = F_0 \cos \omega t$

Dikumpulkan bentuk sinus dan cosinus didapatkan:

$$[(k - m\omega^2)a + \omega cb] \cos \omega t + [-\omega ca + (k - m\omega^2)b] \sin \omega t = F_0 \cos \omega t$$



Gambar 3. 13 Osilasi paksa

Dari dua persamaan

$$(k - m\omega^2)a + \omega cb = F_0$$

$$-\omega ca + (k - m\omega^2)b = 0$$

Maka didapatkan harga a dan b adalah

$$a = F_0 \frac{k - m\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2}$$

$$b = F_0 \frac{\omega c}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2}$$

Jika

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0 \quad k = m\omega_0^2$$

Maka harga a dan b menjadi

$$a = F_0 \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2} \quad b = F_0 \frac{\omega c}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2}$$

Analogi besaran mekanika dan listrik:

1. Persamaan diferensial untuk rangkaian RLC

$$LI' + RI + \frac{Q}{C} I = E_0 \cos \omega t$$

2. Persamaan diferensial untuk sistem massa pegas teredam

$$my'' + cy' + ky = F_0 \cos \omega t$$

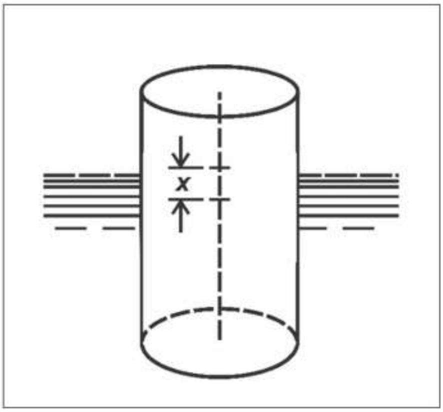
Tabel 3. 3 Analogi mekanik dan listrik

Sistem listrik	Sistem mekanik
Induktansi L	Masa m
Tahanan R	Konstanta peredaman c
Kebalikan kapasitansi $1/C$	Konstanta pegas k
Turunan $E_0 \omega \cos \omega t$ adalah EMF	*Driving force* $F_0 \cos \omega t$
Arus $I(t)$	Simpangan $y(t)$

Contoh soal persamaan diferensial orde 2 homogen referensi (Ayres, 1967)

Suatu pelampung berbentuk silinder diameter 2 ft berada mengapung di air (densitas 62,4 lb/ft3) dengan sumbunya mengarah vertikal (seperti Gambar 3.14).

Ketika ditekan dan dilepaskan, diketemukan bahwa periode getaran adalah 2 detik. Dapatkan berat dari silider.



Gambar 3. 14 Pelampung

Jawab:

Ambil perpotongan antara sumbu silinder dan permukaan air sebagai origin ketika pelampung dalam keadaan keseimbangan, dan ambil arah ke bawah sebagai arah positif. Ambil $x(t)$ menyatakan posisi dari pelampung pada waktu t. Dengan prinsip Archimedes, suatu benda yang sebagian atau seluruhnya ditenggelamkan ke dalam suatu fluida maka akan didorong oleh suatu gaya yang sama dengan berat dari fluida yang di pindahkan.

Maka berat air yang dipindahkan $-\rho V$, dimana ρ adalah densitas air dan V adalah volume air. Sedangkan

$$V = \pi r^2 x$$

Berat air yang dipindahkan adalah $-\rho\pi r^2 x = -62{,}4\,\pi\,(1)^2 x$

Dari Hk. Newton II

$$\sum F = \sum ma$$

$$-62{,}4\,\pi\,(1)^2 x = \frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2}$$

Dimana W adalah berat pelampung dan $W = mg$, besarnya adalah masa dikalikan percepatan gravitasi bumi. Dan a adalah percepatan dimana $a = \frac{d^2x}{dt^2}$

$$\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = -62{,}4\pi x$$

$$g = 32.3\ ft/s^2$$

$$W\frac{d^2x}{dt^2} = -62{,}4\ g\ \pi x = -62{,}4.32{,}2\ \pi x = -2009\ \pi x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2009}{W}\pi x = 0$$

Model matematika yang didapatkan berbentuk persamaan diferensial orde 2 homogen

Misalkan $a = \frac{2009}{W}\pi$

Persamaan karakteristiknya $\lambda^2 + a = 0$

Untuk mencari solusi maka dihitung determinannya $d = 0 - 4.1.a = -4.1.a$

Persamaannya termasuk *under damping*

Persamaan karakterisik

$$\lambda^2 + a = 0$$

$$\lambda^2 = -a = ai^2$$

$$\lambda = 0 \pm \sqrt{ai^2} = \pm i\sqrt{a}$$

Solusi *under damping*

$$y(t) = e^{-\alpha t}\left(A \cos \omega^* t + B \sin \omega^* t\right)$$

Maka solusi persamaan di atas adalah

$$x(t) = e^{0t}\left[c_1 cos\sqrt{a}\, t + c_2 sin\sqrt{a}\, t\right]$$

$$x = c_1 \cos\sqrt{\frac{2009\pi}{W}}t + c_2 \sin\sqrt{\frac{2009\pi}{W}}t$$

Kecepatan sudut $\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{2009\pi}{W}}$

Periode = T = 2 maka frekuensi adalah $f = \frac{1}{T} = 1/2 \text{ hz}$

$$\omega = 2.\pi.0,5 = \pi$$

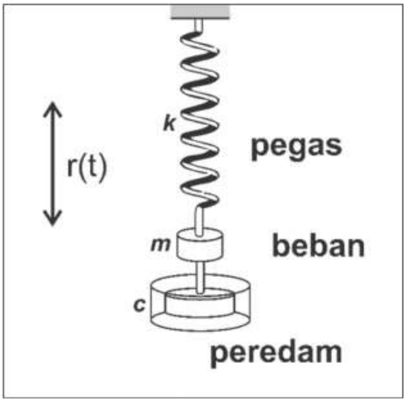
$$\omega^2 = \pi^2 = \frac{2009\pi}{W}$$

$$W = \frac{2009}{\pi} = \frac{2009}{3,14} = 640\ lb$$

Contoh soal persamaan diferensial orde 2 non homogen referensi (Kreyzic, 2011)

Osilasi paksa karena suatu gaya penggerak periodik yang tidak sinusoidal

Suatu pegas, masa teredam dengan gaya luar *r(t)*, dimana gaya luar ini tidak berbentuk sinusoidal seperti contoh soal yang lalu



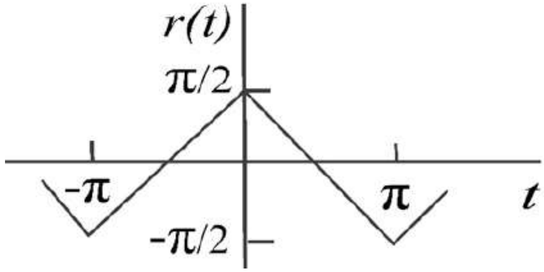
Gambar 3. 15 Sistem masa, pegas teredam dan gaya luar

Diketahui masa (m) 1 gram, konstanta pegas (k) 25 gram/s^2 dan konstanta peredaman (c) 0,05 gram/s. Sedangkan gaya luar dengan satuan g cm/s^2. Maka didapatkan model matematika sistem berbentuk persamaan diferensial

$$my'' + cy' + ky = r(t)$$

$$y'' + 0{,}05y' + 25y = r(t)$$

$$r(t) = \begin{cases} t + \dfrac{\pi}{2}\ jika - \pi << 0 \\ \\ -t + \dfrac{\pi}{2}\ jika\ \ 0 < t < \pi \end{cases} \qquad r(t + 2\pi) = r(t)$$



Gambar 3.16 Grafik input gaya luar

Dapatkan solusi y(t)

Jawab:

Solusi dijawab dengan mempergunakan deret Fourier

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Sedangkan koefisien Fourier diberikan dengan formula Euler:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$$

aka koefisien Fourier a_0 untuk soal diatas adalah

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} t + \frac{\pi}{2}\, dt + \int_{0}^{\pi} -t + \frac{\pi}{2}\, dt \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left\{ \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{nt}{2} \right)\Bigg|_{-\pi}^{0} + \left(-\frac{1}{2}t^2 + \frac{nt}{2} \right)\Bigg|_{0}^{\pi} \right\} = 0$$

koefisien Fourier a_n adalah:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left\{ \int_{-\pi}^{0} \left(t + \frac{\pi}{2} \right) \cos nt\, dt + \int_{0}^{\pi} \left(-t + \frac{\pi}{2} \right) \cos nt\, dt + \right\}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} t \cos nt\, dt + \int_{-\pi}^{0} \frac{\pi}{2} \cos nt\, dt + \int_{0}^{\pi} -t \cos nt\, dt + \int_{0}^{\pi} \frac{\pi}{2} \cos nt\, dt \right)$$

Diselesaikan dengan metode

$$\int u\, dv = -uv - \int v\, du$$

Didapatkan

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left\{ \frac{t}{n} \sin nt \Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n^2} \cos nt \Bigg|_{-\pi}^{0} - \frac{\pi}{2n} \sin nt \Bigg|_{-\pi}^{0} - \frac{t}{n} \sin nt \Bigg|_{0}^{\pi} \right.$$
$$\left. - \frac{1}{n^2} \cos nt \Bigg|_{0}^{\pi} - \frac{\pi}{2n} \sin nt \Bigg|_{0}^{\pi} \right\}$$

Dimana

Sin 0 = 0, sin $n\pi$ = 0, sin $(-n\pi)$ = 0, cos 0 = 1, cos $(-n\pi)$ = cos $n\pi$ = $(-1)^n$

Maka

$$a_n = \frac{2 - 2(-1)^n}{\pi n^2}$$

$$a_1 = \frac{2 - 2(-1)^1}{\pi 1^2} = \frac{4}{\pi 1^2}$$

$$a_2 = \frac{2-2(-1)^2}{\pi 2^2} = 0$$

$$a_3 = \frac{2-2(-1)^3}{\pi 3^2} = \frac{4}{\pi 3^2}$$

$$a_4 = \frac{2-2(-1)^4}{\pi 4^2} = 0$$

$$a_5 = \frac{2-2(-1)^5}{\pi 5^2} = \frac{4}{\pi 5^2}$$

Dan seterusnya

Kemudian koefisien Fourier b_n adalah

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\sin nt\,dt + \int_{0}^{\pi}\left(-t+\frac{\pi}{2}\right)\sin nt\,dt + \right\}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} t\sin nt\,dt + \int_{-\pi}^{0}\frac{\pi}{2}\sin nt\,dt + \int_{0}^{\pi} -t\sin nt\,dt + \int_{0}^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin nt\,dt\right)$$

Diselesaikan dengan metode

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Didapatkan

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{t}{n}\cos nt\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n^2}\sin nt\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{t}{n}\cos nt\Bigg|_{0}^{\pi} + \frac{1}{n^2}\sin nt\Bigg|_{0}^{\pi}\right.$$
$$\left. - \frac{\pi}{2n}\cos nt\Bigg|_{0}^{\pi}\right)$$

Dimana

Sin 0 = 0, sin $n\pi$ = 0, sin (- $n\pi$) = 0, cos 0 = 1, cos (- $n\pi$) = cos $n\pi$ = $(-1)^n$

Maka didapatkan

$$b_n = -\frac{1}{n}(-1)^n + \frac{1}{n}(-1)^n = 0$$

dan didapatkan

$$r(t) = \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t + ...\right) = \frac{4}{n^2\pi}\cos nt$$

untuk

$$n = 1, 3, 5, ...$$

Sehingga model matematika dari sistem diatas adalah

$$y'' + 0,05y' + 25y = \frac{4}{n^2\pi}\cos nt$$

Persamaan karakteristk dari sistem dan persamaan diferensial yang dianggap homogen adalah

$$\lambda^2 + 0,05\lambda + 25 = 0$$

Determinan adalah

$$0,05^2 - 4.1.25 = -99,9$$

Maka sistem termasuk *under damping*, dimana solusinya adalah:

$$y_n = A_n \cos nt + B_n \sin nt$$

Dideferensialkan terhadap t

$$y_n' = -n\, A_n \sin nt + n\, B_n \cos nt$$

$$y_n'' = -n^2 A_n \cos nt - n^2 B_n \sin nt$$

Disubstitusi ke solusi diatas

$$-n^2 A_n \cos nt - n^2 B_n \sin nt + 0,05(-n\, A_n \sin nt + n\, B_n \cos nt)$$

$$+25(A_n \cos nt + B_n \sin nt) = \frac{4}{n^2\pi}\cos nt$$

$$\left(-n^2 A_n + 0,05n\,B_n + 25\,A_n\right)\cos nt + \left(-n\,B_n - 0,05\,n\,A_n + 25B_n\right)\sin nt$$

$$= \frac{4}{n^2\pi}\cos nt + 0\sin nt$$

$$\left\{\left(25 - n^2\right)A_n + 0,05\,n\,B_n\right\}\cos nt + \left\{\left(25 - n^2\right)B_n - 0,05\,n\,A_n\right\}\sin nt$$

$$= \frac{4}{n^2\pi}\cos nt + 0\sin nt$$

Bagian cosinus didapatkan:

$$\left(25 - n^2\right)A_n + 0,05\,n\,B_n = \frac{4}{n^2\pi}$$

Bagian sinus didapatkan

$$-0,05\,n\,A_n + \left(25 - n^2\right)B_n = 0$$

A_n dan B_n didapatkan dengan aturan Cramer

$$A_n = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{4}{n^2\pi} & 0,05n \\ 0 & \left(25 - n^2\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(25 - n^2\right) & 0,05n \\ -0,05n & \left(25 - n^2\right) \end{vmatrix}} = \frac{\dfrac{4}{n^2\pi}\left(25 - n^2\right)}{\left(25 - n^2\right)^2 + \left(0,05n\right)^2} = \frac{4\left(25 - n^2\right)}{n^2\pi\,D_n}$$

$$B_n = \frac{\begin{vmatrix} \left(25 - n^2\right) & \dfrac{4}{n^2\pi} \\ -0,05n & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(25 - n^2\right) & 0,05n \\ -0,05n & \left(25 - n^2\right) \end{vmatrix}} = \frac{\dfrac{4}{n^2\pi}0,05\,n}{\left(25 - n^2\right)^2 + \left(0,05n\right)^2} = \frac{0,2}{n^2\pi\,D_n}$$

Dimana

$$D_n = \left(25 - n^2\right)^2 + \left(0,05n\right)^2$$

Maka solusinya menjadi:

$$y_n = \frac{4\left(25 - n^2\right)}{n^2 \pi D_n} \cos nt + \frac{0,2}{n^2 \pi D_n} \sin nt$$

$$D_n = \left(25 - n^2\right)^2 + \left(0,05n\right)^2$$

Amplitudo:

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

Solusi akhir adalah:

$$y = y_1 + y_3 + y_5 + ...$$

Kemudian cara pendekatan untuk menggambar grafiknya adalah dengan menghitung:

$$D_1 = \left(25 - 1\right)^2 + \left(0,05.1\right)^2 = 576,0025$$

$$y_1 = \frac{4\left(25 - 1\right)^2}{1^2 \pi D_1} \cos 1t + \frac{0,2}{1^2 \pi D_1} \sin 1t = 0,053 \cos t + 0,00011 \sin t$$

$$C_1 = \sqrt{0,053^2 + 0,00011^2} = 0,53$$

$$D_3 = \left(25 - 3^2\right)^2 + \left(0,05.3\right)^2 = 256,022$$

$$y_3 = \frac{4\left(25 - 3^2\right)}{3^2 \pi D_3} \cos 3t + \frac{0,2}{3^2 \pi D_3} \sin 3t$$

$$C_3 = \sqrt{0,0088^2 + 0,000028^2} = 0,0088$$

$$D_5 = \left(25 - 5^2\right)^2 + \left(0,05.5\right)^2 = 0,0625$$

Dan seterusnya sehingga didapatkan amplitudo-amplitudo:

$C_1 = 0{,}53$

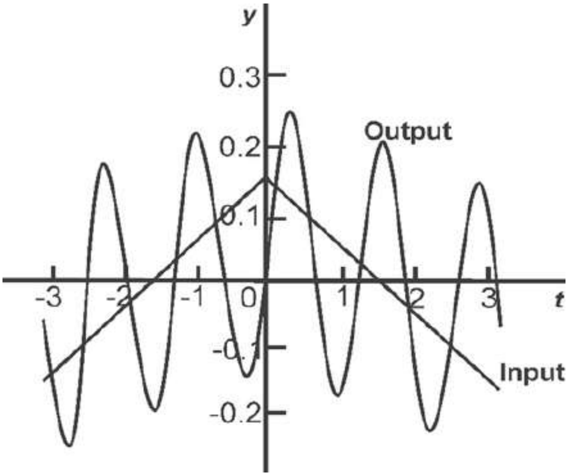
$C_3 = 0{,}0088$

$C_5 = 0{,}2037$

$C_7 = 0{,}0011$

$C_9 = 0{,}0003$

dan seterusnya, maka gambar yang didapatkan adalah



Gambar 3. 17 Intepretasi input dan output

3.5 Persamaan Diferensial Parsial (*Partial Differential Equation / PDE)*

PDE meliputi penurunan sebagian (parsial) dari fungsi dengan varibael-variabel 2 atau lebih.

Jika y adalah fungsi dari x→ y = f (x), maka turunan y terhadap x adalah $\frac{dy}{dx}$ merupakan laju perubahan y terhadap x.

Jika z adalah fungsi dari x dan y → z = f (x,y), maka turunannya adalah $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$, dan disebut diferensial parsial.

Jika diturunkan lagi

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2\partial y} \;\ldots\; dst$$

Notasi yang bisa dipakai $z=f\left(x\right)\rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}=z_x=f_x=f_1$

Contoh

$$z=f\left(x,y\right)=x^3y+e^{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}=f_x=z_x=f_1=3x^2y+ye^{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}=f_y=z_y=f_2=x^3+xe^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x\partial y}f_{xy}=z_{xy}=f_{12}=3x^2+e^{xy}+xye^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}=z_{xx}=f_{11}=6xy+y^2e^{xy}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=f_{yyy}=z_{yyy}=f_{222}=x^3e^{xy}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2\partial y}=f_{xxy}=z_{xxy}=f_{112}=6x+2ye^{xy}+xy^2e^{xy}$$

Contoh pada termodinamika T=T(p,v,s,u) artinya temperatur fungsi tekanan, volume, entropy, dan energi dalam.

$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V$ turunan fungsi temperatur terhadap tekanan untuk volume konstan

$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_s$ turunan fungsi temperatur terhadap volume untuk entropi konstan

$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_u$ turunan fungsi temperatur terhadap tekanan untuk energi dalam konstan

$\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p$ turunan fungsi temperatur terhadap entropi untuk tekanan konstan

3.5.1 Diferensial Total

Diferensial total dari

$z = f(x, y)$ adalah $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$

Secara umum untuk fungsi

$u = f(x, y, z, ...)$ maka diferensial totalnya adalah

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \frac{\partial f}{\partial z} dz + ...$$

Contoh soal dari buku referensi (Kreyzic, 2011) untuk persamaan diferensial parsial, persamaan diferensial total dan aturan berantai (*chain rule*):

1. Dapatkan $\frac{dy}{dx}$ jika $y = \ln \sin 2x$

Jawab:

$$y = \ln \sin 2x$$

$$\frac{dy}{dx} \quad = \frac{d}{dx}(\ln \sin 2x) = \frac{1}{\sin 2x} \frac{d}{dx} \sin 2x$$

$$= \frac{1}{\sin 2x} \cos 2x \frac{d2x}{dx} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} 2 = 2\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2}{\tan 2x}$$

Bisa diselesaikan dengan *chain rule*

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}}$$

$$y = \ln \sin 2x$$
$$y = \ln u$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}$$
$$u = \sin v$$
$$\frac{du}{dv} = \cos v$$
$$v = 2x$$
$$\frac{dv}{dx} = 2$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cos v \, 2 = \frac{1}{\sin 2x} \cos 2x \, 2 = \frac{2}{\tan 2x}$$

2. Dapatkan $\frac{dz}{dt}$ jika $z = 2t^2 \sin t$

Selesaikan dengan metode perkalian diferensial atau diferensial total

Jawab:

Metode diferensial parsial

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$z = \underbrace{2t^2}_{u}\underbrace{\sin t}_{v}$$

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= z' = (uv)' = u'v + v'u \\ &= 4t \sin t + \cos t \; 2t^2\end{aligned}$$

$$= 4t \sin t + 2t^2 \cos t$$

Dengan cara diferensial total $dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$

$$z = \underbrace{2t^2}_{x}\underbrace{\sin t}_{y}$$

atau

$$z = xy$$

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$$

Dibagi dengan dt

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt}$$

$$z = xy \rightarrow \frac{dz}{dx} = y, \rightarrow \frac{dz}{dy} = x$$

$$\frac{z}{dt} = z' = (xy)' = y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt} = x'y + y'x$$

Bentuknya sama dengan

$$(uv)' + u'v + v'u$$

Jadi bisa dikerjakan dengan metode perkalian diferensial

$$z = x^y \qquad x = \sin t \qquad y = \tan^{-1} t$$

Dapatkan $\frac{dz}{dt}$

Jawab:

Rumus diferensial total

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$z = x^y \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$$

$$z = x^y \rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \ldots$$

$$z = x^y$$
$$\ln z = \ln x^y$$
$$e^{\ln z} = e^{\ln x^y}$$
$$z = e^{y \ln x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{y \ln x} \left(\ln x\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \ln x \, e^{y \ln x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \ln x \, e^{\ln x^y}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \ln x \, x^y$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$$

Disubstitusikan ke persamaan diferensial total

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx = \frac{\partial z}{\partial y} dy$$
$$dz = yx^{y-1} dx + x^y \ln x \, dy$$
$$x = \sin t \rightarrow dx = \cos t \, dt$$
$$y = \tan^{-1} t \rightarrow dy = \frac{1}{1+t^2} dt$$
$$dz = yx^{y-1} \cos t \, dt + x^y \ln x \frac{1}{1+t^2} dt$$
$$\frac{dz}{dt} = yx^{y-1} \cos t + \frac{x^y \ln x}{1+t^2}$$

Harga – harga $x = \sin t$, $y = \tan^{-1} t$ disubstitusikan menjadi

$$\frac{dz}{dt} = \tan^{-1} t\left(\sin t\right)^{\left(\tan^{-1} t\right)-1} \cos t + \frac{\left(\sin t\right)^{\tan^{-1} t} \ln \sin t}{1+t^2}$$

3. Diberikan $x + e^x = t$, dapatkan $\frac{dx}{dt}$ dan $\frac{d^2x}{dt^2}$ untuk x = 0 dan t = 1.

Jawab:

$$x + e^x = t$$

dideferensialkan

$$dx + e^x dx = dt$$

dibagi dengan dt didapatkan

$$\frac{dx}{dt} + e^x \frac{dx}{dt} = 1$$

$$\left(1+e^x\right)\frac{dx}{dt} = 1$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+e^x}$$

Dimasukkan harga-harga x = 0, t = 1

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{e^0} = \frac{1}{2}$$

Persamaan awal diturunkan ke t

Dengan $\underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + e^x \frac{d^2x}{dt^2} + e^x \frac{dx}{dt} . \frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + e^x \frac{d^2x}{dt^2} + e^x \left[\frac{dx}{dt}\right]^2 = 0$$

$$\left(1+e^{x}\right)\frac{d^{2}x}{dt^{2}}+e^{x}\left[\frac{1}{1+e^{x}}\right]^{2}=0$$

$$\frac{d^{2}x}{dt^{2}}=-\frac{e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{3}}$$

Dimasukkan harga-harga x = 0, t = 1

$$\frac{d^{2}x}{dt^{2}}=-\frac{e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{3}}=-\frac{e^{0}}{\left(1+e^{0}\right)^{3}}=-\frac{1}{\left(1+1\right)^{3}}=-\frac{1}{8}$$

3.5.2 Persamaan Difusi/ Persamaan Aliran Panas

(The Diffusion or Heat Flow Equation)

Referensi (Boas, 1983) halaman 550

Panas mengalir pada papan/ lapisan/ dinding (heat fow in bar or slab)

Persamaan aliran panas adalah

$$\nabla^{2}u=\frac{1}{\alpha^{2}}\frac{\partial u}{\partial t}$$

u adalah temperatur dan α adalah konstanta sifat material/ bahan yang dialiri panas tersebut, dan t adalah waktu.

$$\nabla=\hat{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}\nabla^{2}&=\nabla.\nabla=\left(\hat{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(\hat{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\\&=\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}+\frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}}\end{aligned}$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

Diasumsikan solusi dari persamaan di atas adalah

$$u = F\left(x, y, z\right)T\left(t\right)$$

u adalah temperatur

F adalah faktor u yng tergantung posisi (x,y,z)

T adalah fakor u yng tergantung waktu (t)

Substitusi persamaan diatas ke persamaan awal, didapatkan

$$T\nabla^2 F = \frac{1}{\alpha^2} F \frac{dT}{dt}$$

Dibagi dengan F T

$$\frac{1}{F}\nabla^2 F = \frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}$$

Ruas kanan = ruas kiri = - k^2

Ruas kiri:

$$\frac{1}{F}\nabla^2 F = -k^2$$

atau

$$\nabla^2 F + k^2 F = 0$$

Disebut persamaan Helmholtz

Ruas kanan:

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = -k^2$$

$$\frac{dT}{dt} = -k^2\alpha^2 T$$

Diintegrasikan

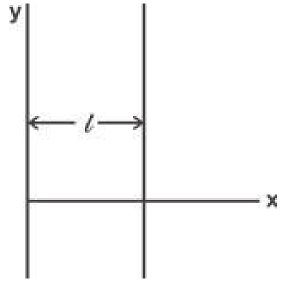
$$T = e^{-k^2\alpha^2 T}$$

Contoh:

Aliran panas melalui dinding dengan ketebalan l (misal dinding lemari es). Diasumsikan permukaan sangat lebar sehingga efek adanya tepi diabaikan dan diasumsikan bahwa panas mengalir hanya pada arah x saja.

Dimisalkan lapisan dinding mempunyai distribusi temperatur steady state awal dengan x = 0 adalah 0^0 dan pada x = l adalah 100^0.

Pada t = 0, dinding x = 1 (sama dengan dinding x = 0) ditetapkan pada 0^0, kemudian akan dicari persamaan temperatur pada setiap x (pada dinding) pada setiap waktu selanjutnya.



Gambar 3. 18 Aliran panas pada dinding

Temperatur *steady state* awal u_0 memenuhi persamaan Laplace

$$\nabla^2 u_0 = 0$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = 0$$

Untuk satu dimensi

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0$$

Solusi untuk persamaan ini adalah u_0 = ax + b, dimana a dan b adalah konstanta yang didapatkan dari kondisi awal. Yaitu pada u_0 = 0 pada x = 0 dan u_0 = 100 pada x = 1, maka didapat:

$$u_0 = \frac{100}{l} x$$

Dari t = 0, memenuhi persamaan Helmholtz satu dimensi

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + k^2 F = 0$$

Solusinya adalah $F(x) = \begin{cases} \sin(kx) \\ \cos(kx) \end{cases}$

Sedangkan u = F(x) T(t), dan $T = e^{-k^2 a^2 t}$, maka $u \begin{cases} e^{-k^2 a^2 t}\, sin(kx) \\ e^{-k^2 a^2 t}\, cos(kx) \end{cases}$

Kita tidak memakai solusi yang cosinus dari permasalahan ini, karena u = 0 pada x = 0. Dan juga diinginkan u = 0 pada x = 1, yang memenuhi adalah jika sin kl = 0, dimana kl = nπ, atau $k = \frac{n\pi}{l}$ (nilai-nilai eigen/*eigen values*). Maka solusi-solusi dasarnya (atau *eigen function*) adalah

$$u = e^{-k^2 a^2 t} \sin(kx) = e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l}$$

Dan solusinya adalah sebuah deret

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l}$$

Pada t = 0, u = u_0, yaitu:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} = u_0 = \frac{100}{l}x$$

Artinya mencari deret sinus Fourier untuk (100/l)x, pada (0,1); maka koefisiennya adalah:

$$b_n = \frac{100}{l}\frac{2l}{\pi}\frac{1}{n}(-1)^{n-1} = \frac{200}{\pi}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Dengan mensustitusi ke persamaan di atas, didapat solusi akhir

$$u = \frac{200}{\pi}\left[e^{-\left(\frac{\pi\alpha}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{1}{2}e^{-\left(\frac{2\pi\alpha}{l}\right)^2 t}\sin\frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{3}e^{-\left(\frac{3\pi\alpha}{l}\right)^2 t}\sin\frac{3\pi x}{l} + \dots\right] \quad (10)$$

RANGKUMAN:

Pada bab ini sudah dipelajari tentang persamaan diferensial homogen dan non homogen orde 1 dan 2 dan cara penyelesaian secara pemisahan variabel maupun secara analitis, untuk sistem dengan mengetahui nilai determinan maka dapat digolongkan 3 macam redaman yaitu:

1. *Under damping*
2. *Critically damping*
3. *Over damping*

Serta pembelajaran tentang persamaan diferensial parsial dan persamaan diferensial total serta cara penyelesaian serta aplikasi pada beberapa problem.

UJI CAPAIAN PEMBELAJARAN:

1. Kerjakan kembali soal Tangki air dengan keadaan awal 100 lb diubah 200 lb. Masing-masing berisi 5 lb garam diubah 4 lb garam.
2. Dalam suatu tangki penyimpanan bahan bakar minyak, fluida mengalir melalui suatu lubang pada dasarnya. Diameter tangki 5 meter, diameter lubang 2.5 centimeter, tinggi awal fluida 4 meter. Kapan tangki menjadi kosong?

BAHAN DISKUSI:

- Bagaimana cara untuk mengetahui ketinggian fluida pada tangki penyimpanan BBM diatas untuk beberapa waktu yang berbeda?
- Apakah arti fisis dari *under damping, critically damping, over damping?*
- Jelaskan maksud resistor, kapasitor, induktor impendansi, reaktansi kapasitif dan reaktansi induktif ?

BAB 4
TRANSFORMASI LAPLACE

Standar Kompetensi
1. Mampu menerapkan Ilmu dasar, komunikasi dan pendukung ilmu perminyakan dan atau panas bumi (CPP 1)
2. Mampu menerapkan pemikiran Logis, Kritis, Sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi Perminyakan dan atau panas bumi (CPKU 1)

Kompetensi Dasar
Mampu memahami tentang sistem, merumuskan model matematika dan mencari solusi sistem yang berhubungan dengan Teknik Perminyakan dan Panas bumi (CPP1)

Indikator
1. Mahasiswa mengulang materi tentang bilangan komplek dan aljabar komplek
2. Mahasiswa mengerti tentang prinsip transformasi Laplace (TL), integral Laplace, theorema - theorema Laplace Mahasiswa mengetahui bermacam-macam geometri reservoir
3. Mahasiswa memahami cara pembuatan dan penggunaan tabel tranformas Laplace
4. Mahasiswa mampu untuk menyelesaikan solusi persamaan diferensial
   dengan mempergunakan tabel transformasi Laplace.

Deskripsi :
Persamaan Diferensial yang didapatkan pada pemodelan bisa dicari solusinya dengan beberapa macam cara yaitu secara pemisahan variabel, analitis, deret selain solusi persamaan diferensial bisa dicari

dengan cara menggunakan transformasi Laplace. Penyelesaian dengan beberapa macam cara seharusnya hasilnya sama. Pada bab ini akan dibahan cara mendapatkan solusi dengan menggunakan transformasi Laplace. Sebelumnya akan dibahan tentang bilangan kompleks sebagai pengulangan (*review*) dari referensi (Ogata, 1981)

4.1 Bilangan komplek (*Review)*

Pada suatu persamaan kudrat yang berbentuk $az^2 + bz + c = 0,$ maka solusinya dicari dengan rumus kuadrat (rumus abc) yaitu akan mendapatkan akar – akar dari persamaan kuadrat tersebut

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diskriminan $d = b^2 - 4ac$
$d = 0$ akan menghasilkan akar-akar riel sama z
$d > 0$ akan menghasilkan akar-akar riel tidak sama $z_1 \& z_2$
$d < 0$ akan menghasilkan akar-akar komplek $z_{1,2} = x \pm iy$
$z_{1,2} = x \pm iy$ disebut bilangan komplek yang berpasangan (*complex conjugate*)

x adalah bilangan real $\rightarrow Re(z) = x$ disebut bagian real
y adalah bilangan real $\rightarrow Im(z) = y, \text{ dan } iy$ disebut bagian imaginer
bisa juga ditulis

$$z = (x, y)$$

digunakan symbol $i = \sqrt{-1}$ dengan $i^2 = -1$
Contoh bilangan komplek:

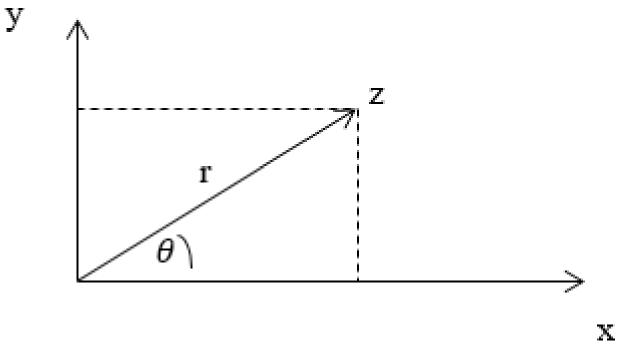
$$\sqrt{-16} = \sqrt{16}\sqrt{-1} = 4i$$

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4.2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4}\sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

Bidang komplek (*complex plane)*

$z = x + iy$ atau $z = (r, \theta)$



Gambar 4. 1 Bidang komplek

$x = r \cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$

Sehingga

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Besar (*magnitude*) dari z adalah

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Sudut dari z adalah

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

Jadi $x = |z|\cos\theta$ dan $y = |z|\sin\theta$

Menurut teorema Euler

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$
$$x + iy = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = re^{i\theta}$$

Jadi bentuk persegi panjang (*rectangular*) adalah

$$z = x + iy$$
$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Sedangkan bentuk polar adalah

$$z = |z| < \theta = r < \theta$$
$$z = |z|e^{i\theta} = re^{i\theta}$$

Complex conjugate dari $z = x + iy$ adalah $\overline{z} = x - iy$ sehingga

$$z = x + iy \;\; = |z| < \theta = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \; = re^{i\theta}$$
$$\begin{aligned} \overline{z} &= x - iy = |z| < -\theta \\ &= |z|(\cos\left(-\theta\right) + i\sin\left(-\theta\right) \\ &= |z|(\cos\theta - i\sin\theta) \\ &= re^{-i\theta} \end{aligned}$$

Sedangkan operasi aljabar untuk bilangan komplek adalah Dua bilangan komplek z dan w dikatakan sama jika dan hanya jika bagian riel sama dan bagian imaginer sama

$z = x = iy$ dan $w = u + iv$

$z = w$ jika dan hanya jika $x = w$ dan $y = v$

Penambahan:

$$\begin{aligned} z + w &= \left(x + iy\right) + \left(u + iv\right) \\ &= \left(x + u\right) + i(y + \mathrm{v}) \end{aligned}$$

Pengurangan:

$$\begin{aligned} z - w &= z + \left(-w\right) = \left(x + iy\right) - \left(u + iv\right) \\ &= \left(x - u\right) + i\left(y - v\right) \end{aligned}$$

Perkalian:

- Bilangan komplek dikalikan bilangan riel a

  $az = a\left(x + iy\right) = ax + iay$

- 2 bilangan komplek dikalikan

  $zw \; = \left(x + iy\right)\left(u + iv\right)$

  $= xu + iyu + ixv + i^2 yv$

  = üüüüi (+   ) −

  = (üüüüi   ) + (+   )

- Perkalian bentuk polar

  $z = \left|z\right| < \theta$

  $w = \left|w\right| < \varnothing$ n

  $zw = \left|z\right|\left|w\right| < \left(\theta + \varnothing\right)$

- Perkalian dengan i

  $z = x + iy = z < \theta$

  $i = 0 + i = 1 < 90°$

  $iz = \left(1 < 90°\right)\left(z < \theta\right) = \left|z\right| < \left(\theta + 90°\right)$

Perkalian dengan i adalah rotasi sebesar 90 dengan arah berlawanan dengan jarum jam

- Pembagian bentuk persegi panjang

$$\frac{z}{w} = \frac{x + y}{u + iv} = \frac{x + iy}{u + iv} \cdot \frac{u - iv}{u - iv}$$

$$\frac{\left(xu + yv\right) + i\left(yu - xv\right)}{u^2 + v^2}$$

$$\frac{xu + yu}{u^2 + v^2} + i\,\frac{yu + xv}{u^2 + v^2}$$

- Pembagian bentuk polar

$$\frac{z}{w}=\frac{|z|<\theta}{|w|<\varnothing}=\frac{|z|}{|w|}<(\theta-\varnothing)$$

- Pembagian dengan i

$$\frac{z}{i}=\frac{x+iy}{i}=\frac{x+iy}{i}.\frac{i}{i}=\frac{xi-y}{-1}=y-ix$$

atau

$$\frac{z}{i}=\frac{|z|<\theta}{1<90^\circ}=|z|<(\theta-90^\circ)$$

Pembagian dengan I merupakan rotasi sebesar 90dengan arah sama dengan arah jarum jam

Pangkat dan akar

$$z^n=(|z|<\theta)^n=|z|^n<(n\theta)$$

$$z^{\frac{1}{n}}=\left(|z|<\theta)^{\frac{1}{n}}=|z|^{\frac{1}{n}}<\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)$$

Catatan :

$|zw|=|z||w|$

$|z+w|\neq|z|+|w|$

Komplek konjugate dari z_1+z_2 adalah $\overline{z}=\overline{z_1+z_2}$

$|z|=\sqrt{z\,\overline{z}}$

Contoh soal bilangan komplek:

Jadikanlah bentuk polar $(z=r<\theta)$

1. $z=\dfrac{2+i}{3+4i}$

Jawab:

$$\varnothing \quad = \frac{2+i}{3+4i} = \frac{2+i}{3+4i}\ \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{(2+i)(3-4i)}{(9-16i^2}$$

$$= \frac{6-8i+3i-4i^2}{9+16}$$

$$= \frac{6-5i+4}{25} = \frac{10-5i}{25} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$$

$$r \quad = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)} = \sqrt{\frac{4}{25} - \frac{1}{25}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\theta = \text{arc tan}\ \frac{y}{x} = \text{arc tan}\ \frac{-\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \text{arc tan}\left(-\frac{1}{2}\right) == -26,565°$$

$$z = \frac{2+i}{3+4i} = \frac{1}{\sqrt{5}} < -26,565°$$

2. $z = (8,66 - i5)^3$

Jawab:

$$z = (8.66 - i5)^3$$

$$r = \sqrt{(8.66)^2 + (-5)^2} = \sqrt{74,9956+25} = 10$$

$$\theta = \text{arc tan}\ \frac{-5}{8,66} = -30°$$

$$8,66 - i5 = 10 < -30°$$

$$z = (8.66 - i5)^3 = (10 < -30°)^3 = 1000 < -90°$$

3. $z = (2,12 - i2,12)^{\frac{1}{2}}$

Jawab:

$$\left.\begin{aligned} & z = \left(2,12 - i2.12\right)^{\frac{1}{2}} \\ & r = \sqrt{\left(2,12\right)^2 + \left(-2,12\right)^2} = 3 \\ & \theta = arc\tan\left(\frac{-2,12}{2,12}\right) = -45^\circ \end{aligned}\right\} z = \left(3 < -45\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} < -22,5$$

4. $z = -1 - i$

Jawab:

$$\left.\begin{aligned} & z = -1 - i \\ & r = \sqrt{\left(-1\right)^2 + \left(-1\right)^2} = \sqrt{2} \\ & \theta = arc\tan\left(\frac{-1}{-1}\right) = -45^\circ \end{aligned}\right\} z = \sqrt{2} < 45^\circ$$

5. $z = \left(1 + i\right)^2$

Jawab:

$$\left.\begin{aligned} & z = \left(1 + i\right)^2 \\ & \tau = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ & \theta = arc\tan\left(\frac{1}{1}\right) = 45 \end{aligned}\right\} z = \left(1 + i\right)^2 = \left(\sqrt{2} < 45^\circ\right)^2 = 2 < 90^\circ$$

6. $z = \dfrac{2 + i}{3 - i}$

Jawab:

$$z = \frac{2 + i}{3 - i} = \frac{2 + i}{3 - i} . \frac{3 + i}{3 + i} = \frac{\left(2 + i\right)\left(3 + i\right)}{3^2 + 1} = \frac{6 + 2i + 3i - 1}{10}$$

$$= \frac{5 + 5i}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = \text{arc tan}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = 45°$$

$$z = \frac{2+i}{3-i} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 45°$$

7. $z = \dfrac{\sqrt{5}+3i}{1-i}$

Jawab:

$$z = \frac{\sqrt{5}+3i}{1-i} = \frac{\sqrt{5}+3i}{1-i} . \frac{1+i}{1+i} = \frac{\sqrt{5}+i\sqrt{5}+3i-3}{1+1}$$

$$= \frac{-3+\sqrt{5}+\left(3+\sqrt{5}\right)i}{2} = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} + i\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(-3+\sqrt{5}\right)^2 + \left(3+\sqrt{5}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{28}$$

$$\theta = \text{arc tan}\left(\frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}}\right) = \text{arc tan}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{-3+\sqrt{5}}\right)$$

$$= \text{arc tan}\left(\frac{5,236}{-0,768}\right) = -81,69°$$

$$z = \frac{\sqrt{5}+3i}{1-i} = \frac{1}{2}\sqrt{28} < -81,69°$$

Keterangan

$$\left(-3+\sqrt{5}\right)\left(-3+\sqrt{5}\right)=9-3\sqrt{5}-3\sqrt{5}+5=9-6\sqrt{5}+5$$

$$\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)=9+3\sqrt{5}+3\sqrt{5}+5=9+6\sqrt{5}+5$$

8. $z=1-\dfrac{i}{\sqrt{3}}$

9. $z=-4iz=-4i$

10. $z=3$

Jadikan bentuk persegi panjang $\left(z=x+iy\right)$

1. $z=7(\cos 110°-i\sin 110°)$

Jawab:

$$\begin{aligned} z &= 7\ (\cos 110°-i\sin 110°\ ) \\ &= 7\cos 110°-i7\sin 110° \\ &= -2.394-i6,578 \end{aligned}$$

2. $z=\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}i}$

Jawab:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i} \\ &= \sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

Atau $\rightarrow$ $=\sqrt{2}\left(cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}i\right) \\ &= 1-i \end{aligned}$$

3. $z=2(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$

Jawab:

$$z = 2\left(cos\frac{\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi}{6}\right) = 2(\cos 30° + i\sin 30°)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + i\ \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

4. $z = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

Jawab:

$$z = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 1 + i$$

5. $z = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$

6. $z = 5(\cos 0 + i\sin 0)$

7. $z = 5(\cos 20° + i\sin 20°)$

8. $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

9. $z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\ \sin\frac{2\pi}{3}\right)$

10. $z = \cos\pi - i\sin\pi$

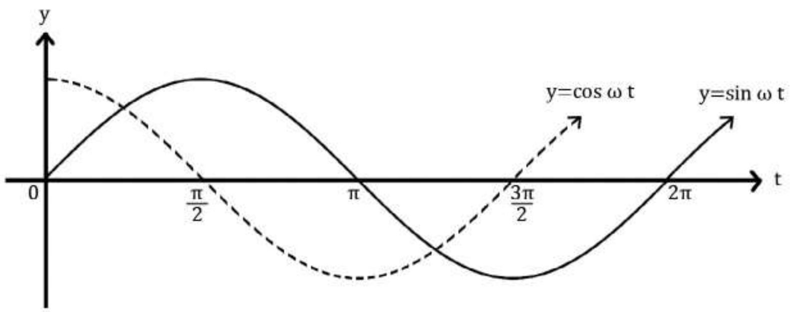
Keterangan:

Tabel 4.1

Harga-harga sinus, kosinus dan tangen

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	-1	0

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	-∞	0



Gambar 4. 2 Grafik sinus dan kosinus

4.2 Transformasi Laplace (*Laplace transformations)*

Salah satu metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial adalah dengan transformasi Laplace, dari sumber referensi (Prayudi, 2006) & (Kreyzic, 2011)

Adapun step-step dalam metode transformasi Laplace adalah Problem f(t) di ruang t $\rightarrow$ transformasi Laplace $\rightarrow$ persamaan F(s) di ruang s $\downarrow$ Solusi f(t) di ruang t $\leftarrow$ invers transformasi Laplace $\leftarrow$ pers. diselesaikan F(s) di ruang s

<u>Transformasi Laplace</u>

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \qquad (4.1)$$

f(t) adalah problem, suatu persamaan fungsi waktu, sedemikian hingga f(t) = 0, untuk t < 0,
sedangkan s adalah variable komplek dan $\mathcal{L}$ adalah operator transformasi Laplace.

$\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ adalah integral Laplace

Invers Transformasi Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = f(t)$$

f(t) adalah solusi dalam ruang t. Invers transformasi Laplace dilihat di tabel transformasi Laplace

Theorema diferensiasi :

turunan I $\quad \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = \mathcal{L}\left[f'(t)\right] = sF(s) - f(0)$

turunan II $\quad \mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = \mathcal{L}\left[f''(t)\right] = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$

dst.

$f(0)$ adalah nilai awal dari $f(t)$, yaitu pada t = 0
$f'(0)$ adalah nilai awal dari $f'(t)$, yaitu pada t = 0

Theorema integrasi :

$$\mathcal{L}\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}$$

dimana $F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right]$ dan $f^{-1}(0) = \int f(t)dt$ pada t = 0

Theorema residu:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + \ldots + \frac{a_n}{s+p_n}$$

$$a_k = \left[(s+p_k) \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-p_k}$$

$$k = 1, 2, \ldots n$$

Theorema pergeseran s (s *shifting*):

Untuk

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

dan untuk

$$F(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-st} \left(e^{at} f(t)\right) dt = \mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right]$$

sehingga

kalau $\mathcal{L}[\cos \omega t] = \dfrac{s}{s^2 + \omega^2}$ maka $\mathcal{L}[e^{at} \cos \omega t] = \dfrac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$

kalau $\mathcal{L}[\sin \omega t] = \dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ maka $\mathcal{L}[e^{at} \sin \omega t] = \dfrac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$

Sifat kelinearan

Bila f(t) dan g(t) mempunyai transformasi Laplace yaitu $\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s)$ dan $\mathcal{L}\left[g(t)\right] = G(s)$

Untuk sembarang konstanta dan , berlaku :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[c_1 f(t) + c_2 g(t)\right] &= c_1 \mathcal{L}\left[f(t)\right] + c_2 \mathcal{L}\left[g(t)\right] \\ &= c_1 F(s) + c_2 G(s) \end{aligned}$$

maka berlaku juga untuk invers

$$\mathcal{L}^{-1}\left[c_1 F(s) + c_2 G(s)\right] = c_1 \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] + c_2 \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\right]$$

$$= c_1 f(t) + c_2 g(t)$$

Contoh 1:

Fungsi step (*step function*)

Diketahui fungsi f(t) = 1, ketika t ≥ 0

Fungsi ditransformasi Laplace

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s)$$

$$= \mathcal{L}[1] = \int_0^\infty e^{-st}.1.dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{s}\left(e^{-\infty} - e^{-0}\right) = -\frac{1}{s}\left(\frac{1}{e^{-\infty}} - \frac{1}{e^{-0}}\right)$$

$$= -\frac{1}{s}(0-1) = \frac{1}{s}$$

Contoh 2:

Fungsi eksponensial (*exponential function*)

Diketahui fungsi $f(t) = e^{at}$ ketika $t \geq 0$ dan a adalah konstanta

Fungsi ditransformasi Laplace

$$\mathcal{L}[f(t) = F(s) = \mathcal{L}\left[e^{at}\right]$$

$$= \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{t(a-s)} dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-t(s-a)} dt = -\frac{1}{s-a} e^{-t(s-a)}\Big|_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{s-a}\left(e^{-\infty} - e^{-0}\right) = \frac{1}{s-a}$$

Contoh 3:

Fungsi hiperbolik (*hyperbolicus function*)

Diketahui

$$\cosh at = \frac{1}{2}\left(e^{at} + e^{-at}\right) = \frac{1}{2}e^{at} + \frac{1}{2}e^{-at}$$

$$\sinh at = \frac{1}{2}\left(e^{at} - e^{-at}\right) = \frac{1}{2}e^{at} - \frac{1}{2}e^{-at}$$

Dapatkan transformasi Laplace, jika diketahui sifat-sifat kelinearan

$$\mathcal{L}\left[af\left(t\right) + bg\left(t\right)\right] = a\mathcal{L}\left[f\left(t\right)\right] + b\mathcal{L}\left[g\left(t\right)\right]$$

Tabel Transformasi Laplace

Dari data-data di atas akhirnya akan didapatkan table transformasi Laplace lihat tabel 4.2 transformasi Laplace dibawah

Contoh soal dan soal yang menggunakan table Transformasi Laplace

Dapatkan Transformasi Laplace dari fungsi berikut

1. $f\left(t\right) = 2t^3 + 3\cos 2t$
2. $f\left(t\right) = 4t^2 - 3\sin 2t$

Jawab

$$\mathcal{L}\left[f\left(t\right)\right] = \mathcal{L}\left[2t^3 + 3\cos 2t\right] = \mathcal{L}\left[2t^3\right] + 3\mathcal{L}\left[\cos 2t\right]$$

$$= 2\frac{3!}{s^4} + 3\frac{s}{s^2+4} = \frac{12}{s^4} + \frac{3s}{s^2+4}$$

$$= \frac{3s^5 + 12s^2 + 48}{s^4\left(s^2+4\right)}$$

$$\mathcal{L}\left[f\left(t\right)\right] = \mathcal{L}\left[4t^2 - 3\sin 2t\right] = 4\mathcal{L}\left[t^2\right] - 3\mathcal{L}\left[\sin 2t\right]$$

$$= 4\frac{2}{s^3} - 3\frac{2}{s^2+4} = \frac{32 + 8s^2 - 6s^3}{s^3\left(s^2+4\right)}$$

3. $f\left(t\right) = \sin 3t + 2e^{3t}$

Jawab:

$$\mathcal{L}\left\{\sin 3t + 2e^{3t}\right\} = \mathcal{L}\left\{\sin 3t\right\} + 2\mathcal{L}\left\{e^{3t}\right\}$$

$$= \frac{3}{s^2+9} + 2\frac{2}{s-3} = \frac{2s^2 + 3s + 9}{\left(s^2+9\right)\left(s-3\right)}$$

4. $f(t) = 3\cos 3t - 4\sin 3t$

Jawab:

$$\mathcal{L}\{3\cos 3t - 4\sin 3t\} = 3\mathcal{L}\{\cos 3t\} - 4\mathcal{L}\{\sin 3t\}$$
$$= 3\frac{s}{s^2+9} - 4\frac{3}{s^2+9} = \frac{3s-12}{s^2+9}$$

Dapatkan Invers Transformasi Laplace

5. $F(s) = \dfrac{3}{s-2} - \dfrac{4}{s+3}$

6. $F(s) = \dfrac{4s}{s^2+9} + \dfrac{3}{s-2}$

Jawab

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s-2} - \frac{4}{s+3}\right]$$
$$= 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - 4\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right]$$
$$= 3e^{2t} - 4e^{-3t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4s}{s^2+9} + \frac{3}{s-2}\right]$$
$$= 4\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9}\right] + 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]$$
$$= 4\cos 3t + 3e^{2t}$$

7. $\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \dfrac{3s-137}{s^2+2s+401}$

Jawab:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3(s+1)-140}{(s+1)^2+400}\right\}$$

$$= 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)}{(s+1)^2+20^2}\right\} - 7\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{20}{(s+1)^2+20^2}\right\}$$

$$f(t) \ = e^{-t}\left[3\cos(20t) - 7\sin(20t)\right]$$

8. $F(s) = \dfrac{3s+2}{s^2+4}$

Jawab:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^2+4}\right\} = 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

$$f(t) = 3\cos 2t + \sin 2t$$

Teorema diferensiasi transformasi Laplace (*Review*):

$$\mathcal{L}\left[x(t)\right] = X(s)$$

$$\mathcal{L}\left[X'(t)\right] = sX(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}\left[X''(t)\right] = s^2X(s) - sx(0) - x'(0)$$

1. Dapatkan solusi y(t) dari persamaan diferensial

$y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}$ dimana $y' = \dfrac{d^2y}{dt^2}$ dan $y' = \dfrac{dy}{dt}$

Dengan keadaan awal $y(0) = 0, y'(0) = 4$

Jawab:

Transformasi Laplace dari persamaan

$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = e^{-2t}$

adalah:

$$\mathcal{L}\left[y''(t) + 4y'(t) + 4y(t)\right] = \mathcal{L}\left[e^{-2t}\right]$$

$$\mathcal{L}\left[y''(t)\right] + 4\mathcal{L}[y'(t)] + 4\mathcal{L}\left[y(t)\right] = \mathcal{L}\left[e^{-2t}\right]$$

$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 4\left[sY(s) - y(0)\right] + 4Y(s) = \frac{1}{s+2}$$

Dari syarat batas:

$$y(0) = 0 \,\text{dan}\, y'(0) = 0$$

Persamaan mejadi:

$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 4Y(s) = \frac{1}{s+2} + 4$$

$$(s^2 + 4s + 4)Y(s) = \frac{1}{s+2} + 4$$

$$(s+2)^2\, Y(s) = \frac{1}{s+2} + 4$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+2)^3} + \frac{4}{(s+2)^2}$$

Kemudian solusi dicari dengan menggunakan invers transformasi Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right] = y(t)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\, \frac{1}{(s+2)^3} + \frac{4}{(s+2)^2} =$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^3}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{(s+2)^2}\right]$$

Tabel transformasi Laplace yang dipakai adalah:

$t^k e^{-at} \quad k > -1$	$\dfrac{k!}{(s+a)^{k+1}}$

Maka solusi akhir didapatkan:

$$y(t) = ½t^2\, e^{-2t} + 4t\, e^{-2t}$$

2. Dapatkan solusi x(t) dari persamaan diferensial

$x'' + 4x' + 40x = 0$ dimana $x'' = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ dan $x' = \dfrac{dx}{dt}$

Dengan keadaan awal $x(0) = 3, x'(0) = 0.$

Jawab:

Fungsi di transformasi Laplace

$$\mathcal{L}\left[x''(t) + 4x'(t) + 40x(t)\right] = 0$$

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 4\left[sX(s) - x(0)\right] + 40X(s) = 0$$

Dari syarat batas:

$$x(0) = 3 \text{ dan } x'(0) = 0$$

Persamaan mejadi:

$$s^2X(s) - 3s + 4sX(s) - 4.3 + 40X(s) = 0$$

$$\left(s^2 + 4s + 40\right)X(s) = 3s + 12 = 3(s+4)$$

$$X(s) = \frac{3(s+4)}{s^2 + 4s + 40} = \frac{6 + 3(s+2)}{(s+2)^2 + s^2}$$

$$= \frac{6}{(s+2)^2 + 6^2} + \frac{3(s+2)}{(s+2)^2 + 6^2}$$

Invers Transformasi Laplace

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{X(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{(s+2)^2 + 6^2} + \frac{3(s+2)}{(s+2)^2 + 6^2}\right\}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{(s+2)^2 + 6^2}\right\} + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+2)}{(s+2)^2 + 6^2}\right\}$$

$$x(t) = e^{-2t}\sin 6t + 3e^{-2t}\cos 6t$$

$$x(t) = e^{-2t}\left\{\sin 6t + 3\cos 6t\right\}$$

3. Dapatkan solusi x(t) dari persamaan diferensial

$x'' + 3x' + 2x = 0$ dimana $x'' = \dfrac{d^{2x}}{dt^2}$ dan $x' = \dfrac{dx}{dt}$

Dengan keadaan awal
$x(0) = a, x'(0) = b;$ a dan b konstan

Jawab:
Fungsi di transformasi Laplace
$\mathcal{L}\left[x'' + 3x' + 2x\right] = 0$
$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) + 3\left[sX(s) - x(0)\right] + 2X(s) = 0$

Dari syarat batas:
$x(0) = a \,\text{dan}\, x'(0) = b$
Persamaan menjadi:
$s^2 X(s) - as - b + 3\left[sX(s) - a\right] + 2X(s) = 0$

$\left[s^2 + 3s + 2\right]X(s) - (as + b + 3a) = 0$

$\left[s^2 + 3s + 2\right]X(s) = (as + b + 3a)$

$$X(s) = \frac{as + b + 3a}{s^2 + 3s + 2} = \frac{as + b + 3a}{(s+1)(s+2)}$$

Untuk mendapatkan akar – akarnya maka persamaan difaktorisasi dengan mempergunakan teorema residu

$$X(s) = \frac{as + b + 3a}{(s+1)(s+2)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2}$$

Theorema Residu (*Review*)

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s + P_1} + \frac{a_2}{s + P_2} + \ldots + \frac{a_n}{s + P_n}$$

$$a_k = \left[(s + p_k) \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-p_k}$$

$$k = 1, 2, \ldots n$$

Kemudian harga-harga A_1 dan A_2 dihitung

$$A_1 = \left[(s+1) \frac{as + b + 3a}{(s+1)(s+2)} \right]_{s=-1} = \left[\frac{as + b + 3a}{s+2} \right]_{s=-1}$$

$$A_1 = \frac{-a + b + 3a}{-1+2} = 2a + b$$

$$A_2 = \left[(s+2) \frac{as + b + 3a}{(s+1)(s+2)} \right]_{s=-2} = \left[\frac{as + b + 3a}{s+1} \right]_{s=-2}$$

$$A_1 = \frac{-2a + b + 3a}{-2+1} = -(a + b)$$

Persamaan diatas mejadi:

$$X(s) = \frac{as + b + 3a}{(s+1)(s+2)} = \frac{2a + b}{s+1} - \frac{a + b}{s+2}$$

Dari tabel transformasi Laplace

f (t)	$\mathcal{L}$ [f (t)] = F(s)
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

Maka invers transformasi Laplace dari persamaan diatas adalah

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[X(s) \right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2a+b}{s+1} - \frac{a+b}{s+2} \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2a+b}{s+1} \right] + \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{a+b}{s+2} \right] \end{aligned}$$

$$= (2a+b)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - (a+b)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]$$

$$x(t) = (2a+b)e^{-t} - (a+b)e^{-2t}$$

Tabel 4.2

Tabel Transformasi Laplace

	$F(s) = \mathcal{L}(F(t))$	$F(t)$
1	1/s	1
2	$1/s^2$	t
3	$1/s^n$ (n = 1,2, ….)	$t^{n-1}/(n-1)!$
4	$1/\sqrt{s}$	$1/\sqrt{\pi t}$
5	$1/s^{3/2}$	$2/\sqrt{t/\pi}$
6	$1s^a$ (a>0)	$t^{a-1}/t(a)$
7	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\frac{1}{(s-a)^2}$	t^{at}
9	$\frac{1}{(s-a)^n}(n=1,2,...)$	$\frac{1}{(n-1)!}\ t^{n-1}e^{at}$
10	$\frac{1}{(s-a)^k}(k>0)$	$\frac{1}{\Gamma(k)}\ t^{k-1}e^{at}$
11	$\frac{1}{(x-a)(x-b)}\ (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b}\ (e^{at} - e^{bt})$

	$F(s)=\mathcal{L}(F(t))$	$F(t)$
12	$\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}\ (a \neq b)$	$\dfrac{1}{a-b}\ (ae^{at} - be^{bt})$
13	$\dfrac{1}{s^2+\omega^2}$	$\dfrac{1}{\omega}\sin\omega t$
14	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$
15	$\dfrac{1}{s^2-a^2}$	$\dfrac{1}{a}\sinh at$
16	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
17	$\dfrac{1}{(s-a)^2+\omega^2}$	$\dfrac{1}{\omega}e^{at}\sin\omega t$
18	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$e^{at}\cos\omega t$
19	$\dfrac{1}{s(s^2+\omega^2)}$	$\dfrac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$
20	$\dfrac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$	$\dfrac{1}{\omega^3}(\omega t-\sin\omega t)$
21	$\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$
22	$\dfrac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\dfrac{t}{\omega t}\sin\omega t$

	$F(s) = \mathcal{L}(F(t))$	$F(t)$
23	$\dfrac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\omega}(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$
24	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b)^2}$ $(a^2 \neq b^2)$	$\dfrac{1}{b^2-a^2}(\cos at - \cos bt)$
25	$\dfrac{1}{s^4+4k^4}$	$\dfrac{1}{4k^3}(\sin kt \cos kt - \cos kt \sinh kt)$
26	$\dfrac{s}{s^4+4k^4}$	$\dfrac{1}{2k^2}\sin kt \sinh kt$
27	$\dfrac{1}{s^4-4k^4}$	$\dfrac{1}{2k^3}(\sinh kt - \sin kt)$
28	$\dfrac{1}{s^4-4k^4}$	$\dfrac{1}{2k^2}(\cosh kt - \mathrm{co}kt)$
29	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}\left(e^{bt} - e^{at}\right)$
30	$\dfrac{1}{\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}}$	$e^{-(a+\frac{\frac{bt}{2}}{0}}\left(\dfrac{a-b}{2}t\right)$
31	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
32	$\dfrac{s}{(s-a)^{3/2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1+2at)$

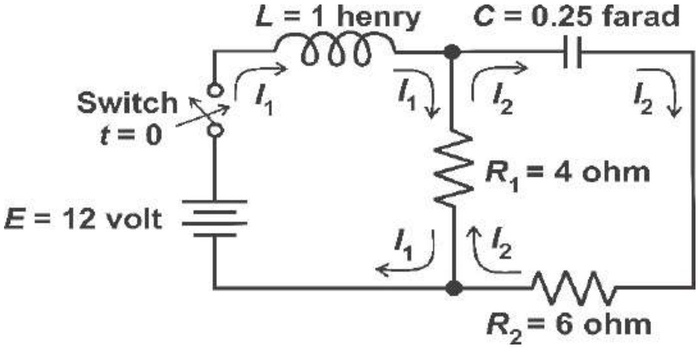
	$F(s)=\mathcal{L}(F(t))$	$F(t)$
33	$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^k} \quad (k>0)$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\dfrac{t}{2a}\right)^{h-1/2} \quad lk_{-1/2(at)}$
34	$e^{-ae/s}$	$u(t-a)$
35	e^{-ae}	$\delta(t-a)$
36	$\dfrac{1}{s}e^{-k/s}$	$J_0\left(2\sqrt{kt}\right)$
37	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}e^{-k/s}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}cos2\sqrt{kt}$
38	$\dfrac{1}{s^{3/2}}e^{k/s}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi k}}sinh2\sqrt{kt}$
39	$e^{-k\sqrt{s}} \qquad (k>0)$	$\dfrac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-k^2 w}$
40	$\dfrac{1}{s}In\, s$	$-\ln t-\gamma \quad (\gamma=0,57772)$
41	$\ln\dfrac{s-a}{s-b}$	$\dfrac{1}{t}\left(e^{bt}-e^{at}\right)$
42	$\ln\dfrac{s^2+w^2}{s^2}$	$\dfrac{2}{t}(1-\cos\omega t)$
43	$\ln\dfrac{s^2-a^2}{s^2}$	$\dfrac{2}{t}(1-\cosh at)$
44	$arctan\dfrac{\omega}{s}$	$\dfrac{1}{t}(\sin\omega t)$

	$F(s)=\mathcal{L}(F(t))$	$F(t)$
45	$\frac{1}{s} arccot\, s$	$Si(t)$

Contoh-contoh soal:

Soal no 1 Referensi (Kreyzic, 2011) halaman 133 Rangkaian Listrik

Dapatkan arus i_1 dan i_2 pada gambar di bawah misalkan semua arus dan muatan adalah 0, untuk t = 0



Gambar 4. 3 Rangkaian listrik R, L, dan C

Jawab:

Penurunan model matematika sistem:

Untuk rangkaian 1 yang sebelah kiri dimana tegangan yang melewati induktor adalah:

$$V_L = L\frac{dI}{dt}$$

$$i_1^{'} + 4i_1 - 4i_2 - 12 = 0$$

$$i_1^{'} + 4i_1 - 4i_2 = 12$$

$$\frac{di_1}{dt} + 4i_1 - 4i_2 = 12$$

Untuk rangkaian 2 yang sebelah kanan dimana tegangan yang melewati kapasitor adalah

$$V_c = \frac{1}{c}\int I_2 dt$$

$$6i_2 + 4i_2 - 4i_1 + 4\int i_2 dt = 0$$

$$10i_2 - 4i_1 + 4\int i_2 dt = 0$$

Dideferensiasi terhadap t

$$10i'_2 - 4i'_1 + 4i_2 = 0$$

$$10\frac{di_2}{dt} - 4\frac{di_1}{dt} + 4i_2 = 0$$

Maka model matematika rangkaian 1 dan 2 adalah:

$$\begin{cases} \dfrac{di_1}{dt} + 4i_1 - 4i_2 = 12 & i_1(t=0) = 0 \\ 10\dfrac{di_2}{dt} - 4\dfrac{di_1}{dt} + 4i_2 = 0 & i_2(t=0) = 0 \end{cases}$$

Ditransformasi Laplace

$$\begin{cases} L\left[\dfrac{di_1}{dt}\right] + 4L[i_1] - 4L[i_2] = L[12] \\ 10L\left[\dfrac{di_2}{dt}\right] - 4L\left[\dfrac{di_1}{dt}\right] + 4L[i_2] = L[0] \end{cases}$$

$$\begin{cases} sI_1(s) - i_1(0) + 4I_1(s) - 4I_2(s) = \dfrac{12}{s} \\ 10\left(sI_2(s) - i_2(0)\right) - 4\left(sI_1(s) - i_1(0)\right) + 4I_2(s) = 0 \end{cases}$$

Kondisi awal dimasukkan ke persamaan-persamaan diatas

$$\begin{cases} I_1(s)(s+4) - 4I_2(s) = \dfrac{12}{s} \\ (-4s)I_1(s) + (10s+4)I_2(s) = 0 \end{cases}$$

Untuk mendapatkan harga-harga I_1 dan I_2 digunakan aturan Cramer:

$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{12}{s} & -4 \\ 0 & 10s+4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+4 & -4 \\ -4s & 10s+4 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{12}{s}(10s+4)}{(s+4)(10s+4)-16s}$$

$$= \frac{120s+48}{s((s+4)(10s+4)-16s)}$$

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} s+4 & \frac{12}{s} \\ -4s & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+4 & -4 \\ -4s & 10s+4 \end{vmatrix}} = \frac{4s\ .\frac{12}{s}}{(s+4)(10s+4)-16s}$$

$$= \frac{48}{(s+4)(10s+4)-16s)}$$

Perhitungan arus pada rangkaian 1 atau I_1

$$I_1(s) = \frac{120s+48}{s((s+4)(10s+4)-16s)} = \frac{120s+48}{s(s+2)(10s+8)}$$

$$\frac{120s+48}{10s(s+2)\left(s+\frac{8}{10}\right)} = \frac{A}{10s} + \frac{B}{s+2} + \frac{c}{s+\frac{8}{10}}$$

Diselesaikan dengan teorema reduksi

$$A = 10s \left.\frac{120s^2+48}{10s(s+2)\left(s+\frac{8}{10}\right)}\right|_{s=0} = \frac{120\ .0+48}{(0+2)\left(0+\frac{8}{10}\right)} = 30$$

$$B = (s+2)\left.\frac{120s+48}{10s(s+2)\left(s+\frac{8}{10}\right)}\right|_{s=-2} = \frac{120\ .-2+48}{10.-2\left(-2+\frac{8}{10}\right)}$$

$$= \frac{-192}{24} = -8$$

$$C = \left(s+\frac{8}{10}\right)\left.\frac{120s+48}{10s(s+2)\left(s+\frac{8}{10}\right)}\right|_{s=-\frac{8}{10}} = \frac{120\ .-\frac{8}{10}+48}{10.-\frac{8}{10}\left(-\frac{8}{10}+2\right)}$$

$$= \frac{-48}{24-9,6} = 5$$

$$I_1(s) = \frac{120s+48}{10s(s+2)\left(s+\frac{8}{10}\right)} = \frac{30}{10s} - \frac{-8}{s+2} + \frac{5}{s+\frac{8}{10}}$$

$$= \frac{3}{s} - \frac{-8}{s+2} + \frac{5}{s+\frac{4}{5}}$$

Kemudian fungsi diatas di invers transformasi Laplace

$$I_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[I_1(s)\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s} + \frac{-8}{s+2} + \frac{5}{s+4/5}\right]$$

Arus pada rangkaian 1 adalah

$$i_1(t) = 3 - 8e^{-2t} + 5e^{-\frac{4}{5}t}$$

Perhitungan arus pada rangkaian 2 atau I_2

$$\begin{aligned}
I_2(s) &= \frac{48}{(s+4)(10s+4)-165} = \frac{48}{(s+2)(10s+8)} \\
&= \frac{48/10}{(s+2)\left(s+\frac{4}{5}\right)} \\
&= \frac{4,8}{(s+2)\left(s+\frac{4}{5}\right)} = \frac{A}{(s+2)} + \frac{B}{\left(s+\frac{4}{5}\right)}
\end{aligned}$$

Diselesaikan dengan teorema reduksi

$$I_2(s) = \frac{4,8}{(s+2)\left(s+\frac{4}{5}\right)} = \frac{A}{(s+2)} + \frac{B}{\left(s+\frac{4}{5}\right)}$$

$$A = (s+2)\frac{4,8}{(s+2)\left(s+\frac{4}{5}\right)}\Bigg|_{s=-2} = \frac{4,8}{-2+0,8} = -4$$

$$B = \left(s+\frac{4}{5}\right)\frac{4,8}{(s+2)\left(s+\frac{4}{5}\right)}\Bigg|_{s=-\frac{4}{5}} = \frac{4,8}{-\frac{4}{5}+2} = 4$$

$$I_2(s) = \frac{4,8}{(s+2)\left(s+\frac{4}{5}\right)} = -\frac{4}{s+2} + \frac{4}{\left(s+\frac{4}{5}\right)}$$

Kemudian fungsi diatas di invers transformasi Laplace

$$i_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[I_2(s)\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-4}{s+2}+\frac{4}{\left(s+\frac{4}{5}\right)}\right]$$

Arus pada rangkaian 2 adalah

$$i_2\left(t\right) = -4e^{-2t} + 4e^{-\frac{4}{5}t}$$

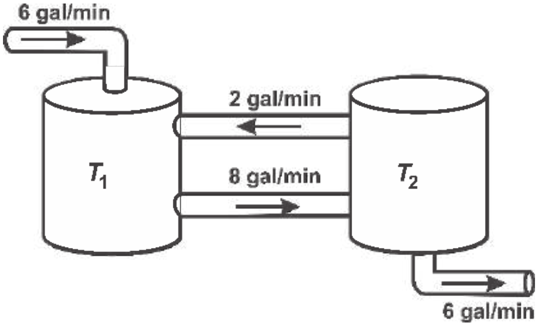
atau

$$i_2\left(t\right) = -4e^{-2t} + 4e^{-0,8t}$$

Contoh soal ke 2 dari referensi (Kreyzic, 2011) halaman 242

Tangki T_1 awalnya berisi 100 galon air murni. Tangki T_2 awalnya berisi 100 galon air dimana terlarut 150 lb garam. Aliran masuk ke T_1 adalah 2 gal/min dari T_2 dan 6 gal/min berisi 6 lb garam dari luar.

Aliran masuk T_2 adalah 8 gal/min dari T_1. Aliran keluar T_2 adalah 2 + 6 = 8gal/min, terlihat seperti gambar. Cairan diaduk sampai homogen. Hitung dan gambarkan grafik jumlah garam y_1 dan y_2 pada T_1 dan T_2



Gambar 4.4 Percampuran fluida

Jawab:
Penurunan model matematika
Perubahan/laju aliran garam terhadap waktu = aliran garam masuk tiap menit aliran garam keluar tiap menit

$$\begin{cases} y_1' = -\dfrac{8}{100} y_1 + \dfrac{2}{100} y_2 + 6 \\ \\ y_2' = \dfrac{8}{100} y_1 - \dfrac{8}{100} y_2 \end{cases}$$

Atau:

$$\begin{cases} y_1' + 0,08 y_1 - 0,02 y_2 = 6 \\ \\ y_2' - 0,08 y_1 + 0,08 y_2 = 0 \end{cases}$$

Dengan kondisi awal

$$y_1(0) = 0$$
$$y_1(0) = 150 \,\mathrm{lb}$$

Kemudian kedua persamaan diatas di transforasi Laplace

$$\begin{cases} sY_1(s) - y_1(0) + 0,08 Y_1(s) - 0,02 Y_2(s) = \dfrac{6}{s} \\ sY_2(s) - y_2(0) - 0,08 Y_1(s) + 0,08 Y_2(s) = 0 \end{cases}$$

Kondisi awal dimasukkan maka persamaan menjadi:

$$\begin{cases} sY_1(s) + 0,08 Y_1(s) - 0,02 Y_2(s) = \dfrac{6}{s} \\ sY_2(s) - 150 - 0,08 Y_1(s) + 0,08 Y_2(s) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-0,08 - s) Y_1 s + 0,02 Y_2(s) = -\dfrac{6}{s} \\ 0,08 Y_1(s) + (-0,08 - s) Y_2(s) = -150 \end{cases}$$

Untuk menyelesaikan 2 persamaan diatas untuk mendapatkan $Y_1(s)$ dan $Y_2(s)$ dipergunakan atran Cramer.
Perhitungan untuk aliran garam pada tangki 1 atau $Y_1(s)$ adalah:

$$Y_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{6}{s} & 0,02 \\ -150 & -0,08-s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -0,08-s & 0,02 \\ 0,08 & -0,08-s \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-\frac{6}{s}(-0,08-s)-(0,02)(-150)}{(-0,08-s)(-0.08-s)-0,08\ .0,02}$$

$$Y_1(s) = \frac{\frac{0,48}{s}+9}{\left(0.0064+0,08s+0,08s+s^2\right)-0,0016}$$

$$= \frac{0,48+9s}{s\left(0,0064+0,16s+s^{2)}-0,0016\right)}$$

$$= \frac{9s+0,48}{s^3+0,16s^2+0,0064s-0,0016s}$$

$$= \frac{9s+0,48}{s^3+0,16s^2+0,0048s}$$

$$= \frac{9s+0,48}{s\left(s^2+0,16s+0,0048\right)}$$

Untuk faktorisasi persamaan $s^2+0,16s+0,0048$ digunakan rumus:

$$s_{12} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-0,16\pm\sqrt{0,16^2-q.1.0,0048}}{2}$$

$$= -0,048\pm 0,5\ .0,08 = -0,08\pm 0,04$$

$$s_1 - \ = 0,04$$
$$s_1 - \ = 0,12$$

$$Y_1(s) = \frac{9s + 0,48}{s(s+0,12)(s+0,04)}$$

Untuk menyelesaikan persamaan dipergunakan teorema reduksi

$$Y_1(s) = \frac{9s + 0,48}{s(s+0,12)+(s+0,04)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+0,12} + \frac{C}{s+0,04}$$

$$A \quad = s\frac{9s + 0,48}{s(s+0,12)(s+0,04)}\bigg|_{s=0} = \frac{9\ .0 + 0,48}{(0+0,12)(0+0,04)}$$

$$= \frac{0,48}{0,0048} = 100$$

$$B \quad = (s+0,12)\frac{9s + 0,48}{s(s+0,12)(s+0,04)}\bigg|_{s=-0,12}$$

$$= \frac{9(-0,12)+0,48}{-0,12\ .(-0,12+0,04)} = \frac{-0,6}{0,0096} = -62,5$$

$$C \quad = (s+0,04)\frac{9s + 0,48}{s(s+0,12)(s+0,04)}\bigg|_{s=-0,04}$$

$$= \frac{9(-0,04)+0,48}{-0,04\ .(-0,04+0,12)} = \frac{-0,36+0,48}{0,0032} = -37,5$$

Maka

$$Y_1(s) = \frac{9s + 0,48}{s(s+0,12)+(s+0,04)} = \frac{100}{s} - \frac{62,5}{s+0,12} - \frac{37,5}{s+0,04}$$

Dihitung invers transformasi Laplace

$$y_1(t) = 100 - 62,5e^{-0,12t} - 37,5e^{-0,04t}$$

Maka didapatkan persamaan aliran garam pada tangki 1

Perhitungan untuk aliran garam pada tangki 2 atau $Y_2(s)$ adalah:

$$Y_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} -0,08-s & -\frac{6}{s} \\ 0,08 & -150 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -0,08-s & 0,02 \\ 0,08 & -0,08-s \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{(-0,08-s)(-150)+\frac{6}{s}\,.0,08}{(-0,08-s)(-0.08-s)-0,02\;.0,08}$$

$$= \frac{12+150s+\frac{0,48}{s} \qquad \left(\frac{0.48}{s}+9\right)}{\left(0.0064+0,16s+s^2\right)-0,0016}$$

$$= \frac{12s+150s^2+0.48}{s^3+0,16s^2+0,0048s}$$

$$= \frac{150s^2+12s+0,48}{s(s+0,12)(s+0,04)}$$

Diselesaikan dengan teorema reduksi

$$A = s\left.\frac{150s^2+12s+0,48}{s(s+0,12)(s+0,04)}\right|_{s=0} = \frac{150\;.0+12\;.0+0,48}{0,12\;.0,04}$$

$$= \frac{0,48}{0,0048} = 100$$

$$B = (s+0,12)\left.\frac{150s^2+12s+0,48}{s(s+0,12)(s+0,04)}\right|_{s=-0,12}$$

$$= \frac{150\;.(-0,12)^2+12\;.(-0,12)+0,48}{-0,12\;.(-0,12+0,04)}$$

$$= \frac{2,16 - 1,44 + 0,48}{0,0014 + (-0,0048)} = \frac{1,2}{0,0096} = 125$$

$$C \quad = (s + 0,04)\left.\frac{150s^2 + 12s + 0,48}{s(s + 0,12)(s + 0,04)}\right|_{s=-0,04}$$

$$= \frac{150(-0,04)^2 + 12(-0,04) + 0,48}{-0,04\ .(-0,04 + 0,12)}$$

$$= \frac{-0,24 - 0,48 + 0.48}{0,0032} = -75$$

Jadi

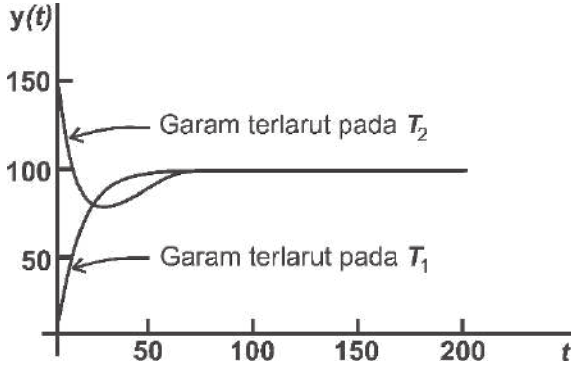
$$Y_2(s) = \frac{150s^2 + 12s + 0,48}{s(s + 0,12)(s + 0,04)} = \frac{100}{s} + \frac{125}{s + 0,12} - \frac{75}{s + 0,04}$$

Invers Transformasi Laplace

$$y_2(t) = 100 - 125e^{-0,12t} - 75e^{-0,04t}$$

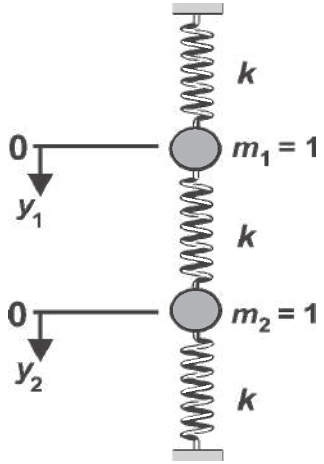
Maka didapatkan persamaan aliran garam pada tangki 2

Grafik dari persamaan aliran garam pada tangki 1 dan 2 adalah



Gambar 4.5 Intepretasi solusi larutan garam

Contoh soal ke 2 dari referensi (Kreyzic, 2011) halaman 245 tentang aplikasi bidang mekanik



Gambar 4.6 Sistem pegas dan bola besi

Sistem mekanik pada gambar diatas terdiri dari 2 benda yang masanya 1 pada 3 pegas yang sama konstanta pegasnya k dan masa dari pegas diabaikan. Juga redaman diasumsikan nol. Maka model dari sistem fisis adalah dari sistem persamaan diferensial biasa

$$y_1'' = -ky_1 + k\left(y_2 - y_1\right)$$
$$y_2'' = -k\left(y_2 - y_1\right) - ky_2$$

Disini y_1 dan y_2 adalah perpindahan benda dari posisinya pada keseimbangan statis.

Persamaan diferensial dari sistem ini diturunkan dari hukum kedua Newton, masa dikalikan percepatan = gaya

$$\sum F = ma$$

Dengan perpindahan gaya dengan arah ke bawah positif dan ke atas negatif. Pada benda yang diatas $-ky_1$ adalah dari pegas atas dan $k(y_2 - y_1)$ dari pegas yang di tengah, $y_2 - y_1$ adalah selisih panjang pegas. Pada benda yang bawah, $-k(y_2 - y_1)$ adalah gaya karena pegas di tengah dan $-ky_2$ adalah karena pegas bawah.

Kondisi awal

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1$$
$$y_1'(0) = \sqrt{3k}, \quad y_2'(0) = -\sqrt{3k}$$

Misalkan $Y_1(s) = \mathcal{L}(y_1(t))$ dan $Y_2(s) = \mathcal{L}(y_2(t))$

Transformasi Laplace dari model matematika

$$\begin{cases} s^2 Y_1(s) - sy_1(0) - y'_1(0) = -kY_1(s) + k\left(Y_2(s) - Y_1(s)\right) \\ s^2 Y_2(s) - sy_2(0) - y_2(0) = -k(Y_2(s) - Y_1(s) - kY_2(s) \end{cases}$$

Kemudian kondisi awal di substitusikan hasilnya

$$\begin{cases} s^2 Y_1(s) - s - \sqrt{3k} = -kY_1(s) + k\left[Y_2(s) - Y_1(s)\right] \\ s^2 Y_2(s) - s + \sqrt{3k} = -k\left[Y_2(s) - Y_1(s)\right] - kY_2(s) \end{cases}$$

$$\left(s^2 + 2k\right)Y_1(s) - kY_2(s) = s + \sqrt{3k}$$

$$-kY_1(s) + \left(s^2 + 2k\right)Y_2(s) = s - \sqrt{3k}$$

Eliminasi $Y_1(s)$ dengan aturan Cramer

$$Y_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} s + \sqrt{3k} & -k \\ s - \sqrt{3k} & s^2 + 2k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2 + 2k & -k \\ -k & s^2 + 2k \end{vmatrix}} = \frac{\left(s + \sqrt{3k}\right)\left(s^2 + 2k\right) + k\left(s - \sqrt{3k}\right)}{\left(s^2 + 2k\right)^2 - k^2}$$

Pembilang:

$$\left(s+\sqrt{3k}\right)\left(s^2+2k\right)+k\left(s-\sqrt{3k}\right)$$

$$s^3+2ks+\sqrt{3k}\,s^2+2k\sqrt{3k}+ks-k\sqrt{3k}$$

$$s^3+\sqrt{3k}\,s^2+3ks+k\sqrt{3k}$$

$$s^3+s^2\sqrt{3k}+3ks+\sqrt{3}\,k^{\frac{3}{2}}$$

Penyebut:

$$(s^2+2k)^2-k^2$$

$$(s^2+2k)\left(s^2+2k\right)-k^2$$

$$s^4+2ks^2+2ks^2+4k^2-k^2$$

$$s^4+4ks^2+3k^2$$

$$(s^2+k)(s^2+3k)$$

Maka persamaan menjadi:

$$Y_1\left(s\right)=\frac{\left(s+\sqrt{3k}\right)\left(s^2+2k\right)+k\left(s-\sqrt{3k}\right)}{\left(s^2+2k\right)^2-k^2}$$

$$=\frac{s^3+s^2\sqrt{3k}+3ks+\sqrt{3}k^{3/2}}{(s^2+k)(s^2+3k)}$$

Kemudian difaktorisasi

$$Y_1\left(s\right)=\frac{s^3+s^2\sqrt{3k}+3ks+\sqrt{3}k^{3/2}}{(s^2+k)(s^2+3k)}=\frac{As+B}{s^2+k}+\frac{Cs+D}{s^2+3k}$$

$$=\frac{\left(As+B\right)\left(s^2+3k\right)+\left(Cs+D\right)\left(s^2+k\right)}{(s^2+k)\left(s^2+3k\right)}$$

$$\frac{s^3 + s^2\sqrt{3k} + 3ks + \sqrt{3}k^{3/2}}{(s^2+k)(s^2+3k)}$$

$$= \frac{\left(As^3 + Bs^2 + 3Aks + 3Bk\right) + \left(Cs^3 + Ds^2 + Cks + Dk\right)}{(s^2+k)\left(s^2+3k\right)}$$

Kesamaan koefisien

$$s^3 \rightarrow 1 = A + C$$

$$s^2 \rightarrow \sqrt{3k} = B + D$$

$$s \rightarrow 3k = 3Ak + Ck \rightarrow 3 = 3A + C$$

$$s^0 \rightarrow \sqrt{3}k^{3/2} = 3Bk + Dk$$

$$\begin{array}{ll} A + C = 1 & \qquad 3 = 3A + C \\ \underline{3A + C = 3}\ - & \qquad 3 = 3.1 + C \rightarrow C = 0 \\ -2A - -2 & \end{array}$$

Maka: $A = 1$

$$\begin{array}{l} B + D = \sqrt{3k} \\ \underline{3B + D = \sqrt{3k}}\ - \\ -2B = 0 \rightarrow B = 0 \end{array}$$

$$D = \sqrt{3k}$$

$$A = 1 \qquad C = 0A = 1 \qquad C = 0$$

$$B = 0 \qquad D = \sqrt{3k}$$

Sehingga didapat:

$$Y_1(s) = \frac{AS + B}{s^2 + k} + \frac{CS + D}{s^2 + 3k} = \frac{S}{s^2 + k} + \frac{\sqrt{3k}}{s^2 + 3k}$$

Invers transformasi Laplace

$$y_1(t) = \mathcal{L}[Y_1(s)] = \mathcal{L}\left[\frac{s}{s^2+k} + \frac{\sqrt{3k}}{s^2+3k}\right]$$

$$y_1(t) = cos\sqrt{k}t + sin\sqrt{3k}t$$

Eliminasi $Y_2(s)$ dengan aturan Cramer

$$Y_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} s^2+2k & s+\sqrt{3k} \\ -k & s-\sqrt{3k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+2k & -k \\ -k & s^2+2k \end{vmatrix}} = \frac{\left(s^2+2k\right)\left(s-\sqrt{3k}\right)+k\left(s+\sqrt{3k}\right)}{\left(s^2+2k\right)^2-k^2}$$

Pembilang:

$$\left(s^2+2k)(s-\sqrt{3k}\right)+k(s+\sqrt{3k})$$

$$s^3-\sqrt{3k}s^2+2ks-2k\sqrt{3k}+ks+k\sqrt{3k}$$

$$s^3-\sqrt{3k}s^2+3ks-k\sqrt{3k}$$

Untuk penyebut sama dengan diatas

Pesamaan diatas menjadi:

$$\begin{aligned} Y_2(s) &= \frac{\left(s^2+2k)(s-\sqrt{3k}\right)+k(s+\sqrt{3k})}{\left(s^2+2k\right)^2-k^2} \\ &= \frac{s^3-\sqrt{3k}s^2+3ks-k\sqrt{3k}}{(s^2+k)(s^2+3k)} \end{aligned}$$

Kemudian difaktorisasi

$$Y_2(s) = \frac{s^3-\sqrt{3k}s^2+3ks-k\sqrt{3k}}{(s^2+k)(s^2+3k)} = \frac{Es+F}{s^2+k} + \frac{Gs+H}{s^2+3k}$$

$$\frac{s^3-\sqrt{3k}s^2+3ks-k\sqrt{3k}}{(s^2+k)(s^2+3k)}$$

$$=\frac{\left(ES+F\right)\left(s^2+3k\right)+\left(Gs+H\right)\left(s^2+k\right)}{(s^2+k)(s^2+3k)}$$

$$\frac{Es^3+Fs^2+3Eks+3Fk+Gs^3+Hs^2+Gks+Hk}{(s^2+k)(s^2+3k)}$$

Kesamaan koefisien

$$s^3 \to 1 = E + G$$
$$s^2 \to -\sqrt{3k} = F + H$$
$$s \to 3k = 3Ek + Gk \to 3 = 3E + G$$
$$s^0 \to -k\sqrt{3k} = 3FK + Hk = -\sqrt{3k} = 3F + H$$

$$1 = E + G$$
$$\frac{3 = 3E + G}{-2 = -2E} - \text{ maka } E = 1$$

$1 = E + G$ maka $G = 0$

$$-\sqrt{3}k = F + H$$
$$\frac{-\sqrt{3}k = 3F + H}{0 = -2F} - \text{ maka } F = 0$$

$$-\sqrt{3}k = 3F + H$$
$$H = -\sqrt{3}k$$

$$Y_1\left(s\right)=\frac{Es+F}{(s^2+k)}+\frac{Gs+H}{\left(s^2+3k\right)}=\frac{s}{s^2+k}-\frac{\sqrt{3k}}{s^2+3k}$$

$$y_1\left(t\right)=\mathcal{L}^{-1}\left[Y_1\left(s\right)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+k}-\frac{\sqrt{3k}}{s^2+3k}\right]$$

$$y_1\left(t\right)=cos\sqrt{kt}-sin\sqrt{3kt}$$

RANGKUMAN

Beberapa theorema Transformasi Laplace :

1. Theorema Diferensiasi
2. Theorema Residu
3. Theorema Pergeseran s
4. Sifat kelinearan

Aplikasi Tabel Transformasi Laplace untuk penyelesaiaan sistem Rangkaian Listrik R,L, dan C

UJI CAPAIAN PEMBELAJARAN

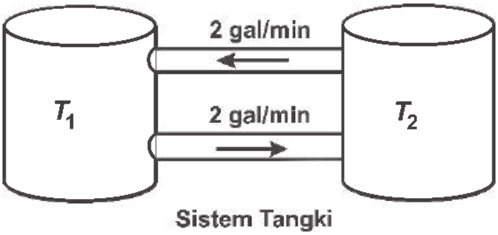
Kerjakan soal dibawah dengan menggunakan tabel Transformasi Laplace

1. Dapatkan Transformasi Laplace dari fungsi berikut
   - $f(t) = 3t + 12$
   - $f(t) = \cos(\pi t)$
   - $f(t) = \sin(\omega t + \theta)$
   - $f(t) = t^2 e^{-3t}$
   - $f(t) = 0.5e^{-4.5t} \sin(2\pi t)$
2. Dapatkan Invers Transformasi Laplace
   - $F(s) = \dfrac{0.2s + 1.8}{s^2 + 3.24}$
   - $F(s) = \dfrac{12}{s^4} - \dfrac{228}{s^6}$
   - $F(s) = \dfrac{s + 10}{s^2 - s - 2}$
   - $F(s) = \dfrac{2s - 1}{s^2 - 6s + 18}$
   - $F(s) = \dfrac{k_0 + (s + a) + k_1}{(s + 2)^2}$

Soal dari referensi (Kreyzic, 2011) halaman 130

Masalah percampuran fluida yang terdiri dari tangki tunggal sudah dimodelkan dengan satu ODE orde 1. Tangki T_1 dan T_2 pada gambar dibawah berisi masing-masing 100 galon air. Pada T_1 air murni, sedangkan 150 lb pupuk dilarutkan pada T_2. Dengan mensirkulasikan cairan dengan 2 galon/ menit, dan diaduk supaya campuran homogen.

Hitunglah dengan menggunakan transformasi Laplace jumlah pupuk $Y_1(t)$ dalam T_1 dan $Y_2(t)$ dalam T_2



Gambar 4.7 Larutan pupuk pada tangki

Penurunan model matematis sistem:

Pada tangki T_1 laju perubahan jumlah pupuk tiap waktu $Y'_1(t)$ sama dengan aliran masuk dikurang aliran keluar. Demikian juga untuk tangki 2

$Y'_1(t)$ = Aliran masuk tiap menit − aliran keluar tiap menit

$$= \frac{2}{100}Y_2 - \frac{2}{100}Y_1$$

$Y'_2(t)$ = Aliran masuk tiap menit − aliran keluar tiap menit

$$= \frac{2}{100}Y_1 - \frac{2}{100}Y_2$$

$$\begin{cases} Y_1'(t) = -0,02\,Y_1(t) + 0,02\,Y_2(t) \\ Y_2'(t) = 0,02\,Y_1(t) - 0,02\,Y_2(t) \end{cases}$$

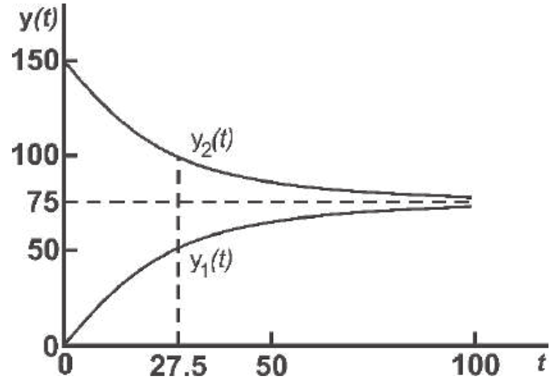
$$\begin{cases} Y_1'(t) + 0,02\,Y_1(t) - 0,02\,Y_2(t) = 0 \\ Y_2'(t) - 0,02\,Y_1(t) + 0,02\,Y_2(t) = 0 \end{cases}$$

Keadaan awal $Y_1(t=0) = 0 \quad Y_2(t=0) = 150\,lb$

Persamaan diatas adalah model matematika sistem, kemudian kerjakan dengan menggunakan transformasi Laplace sehingga mendapatkan solusi:

$$Y_1 = 75 - 75e^{-0,04t}$$
$$Y_2 = 75 + 75e^{-0,04t}$$

Dan grafik:



Gambar 4. 8 Intepretasi solusi larutan pupuk

BAHAN DISKUSI:

Kerjakan soal sistem massa, pegas teredam yang sudah dikerjakan secara analitis sebelum- nya dengan cara Transformasi Laplace. Apakah hasilnya sama ?

BAB 5
ANALISA TESTING SUMUR (*WELL TESTING ANALYST*)

Standar Kompetensi
1. Mampu menerapkan Ilmu dasar, komunikasi dan pendukung ilmu perminyakan dan atau panas bumi (CPP 1)
2. Mampu menerapkan pemikiran Logis, Kritis, Sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi Perminyakan dan atau panas bumi (CPKU 1)

Kompetensi Dasar
Mampu memahami tentang sistem, merumuskan model matematika dan mencari solusi sistem yang berhubungan dengan Teknik Perminyakan dan Panas bumi (CPP1)

Indikator
1. Mahasiswa mengetahui bermacam-macam fluida reservoir
2. Mahasiswa mengetahui bermacam-macam aliran fluida reservoir
3. Mahasiswa mengetahui bermacam-macam geometri reservoir
4. Mahasiswa mengetahui jumlah fluida yang mengalir dalam reservoir

Deskripsi:

Pada bab ini dimulai pembelajaran ke arah aplikasi Teknik Perminyakan, dengan mempelajari tentang fluida, aliran, geometri dan jumlah aliran dalam reservoir. Dan mempelajari satuan yang berhubungan dengan bab ini sumber referensi (Ahmed, 2011) dan (Ahmed & Meehan, 2012)

5.1 Sifat Reservoir Primer (Primary Reservoir Characteristic)

- Macam fluida reservoir
- Macam aliran fluida reservoir
- Geometri reservoir
- Jumlah fluida yang mengalir dalam reservoir

5.1.1 Macam Fluida Reservoir

a. Fluida inkompresibel (*Incompressible*): adalah fluida dimana volume dan density tidak berubah karena perubahan tekanan (contoh : tidak ada).

b. Fluida sedikit kompresibel (*Slightly Compressible*): adalah fluida dimana volume dan densitas berubah sedikit karena perubahan tekanan (contoh : minyak mentah (*crude oil*), air (*water*).

c. Fluida kompresibel (*Compressible*): adalah fluida yang volume dan density banyak berubah karena tekanan (contoh : gas)

Fluida inkompresibel:

$$\frac{\partial V}{\partial P} = 0 \, \mathrm{dan} \, \frac{\partial \rho}{\partial P} = 0$$

V adalah volume, P adalah tekanan, dan adalah densitas

Fluida sedikit kompresibel:

Didefinisikan

$$c = -\frac{\partial V}{V \partial P}$$

$$-c \, dP = \frac{dV}{V}$$

diintegrasikan

$$\int_{P_{ref}}^{P} -c\,dP = \int_{V_{ref}}^{V} \frac{dV}{V}$$

$$-c\int_{P_{ref}}^{P} dP = \int_{V_{ref}}^{V} \frac{dV}{V}$$

$$-c\left(P - P_{ref}\right) = \ln V \Big|_{V_{ref}}^{V}$$

$$c\left(P_{ref} - P\right) = \ln V - \ln V_{ref} = \ln \frac{V}{V_{ref}}$$

diekponensialkan

$$e^{c\left(P_{ref}-P\right)} = e^{\ln\frac{V}{V_{ref}}} = \frac{V}{V_{ref}}$$

Jadi

$$V = V_{ref} \quad \exp\left\{c\left(P_{ref} - P\right)\right\}$$

Ekspansi deret

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ..+ \frac{x^n}{n!}$$

Jadi

$$\exp\left\{c\left(P_{ref} - P\right)\right\} = e^{c\left(P_{ref}-P\right)}$$

$$= 1 + c\left(P_{ref} - P\right) + \underbrace{\frac{c^2 (P_{ref} - P)^2}{2!}}_{\substack{kecil \\ diabaikan}}$$

Sehingga

$$e^{c\left(P_{ref}-P\right)} = 1 + c\left(P_{ref} - P\right)$$

Atau

$$\begin{aligned} V &= V_{ref} \ \exp\left\{c\left(P_{ref} - P\right)\right\} \\ &= V_{ref} \left\{1 + c\left(P_{ref} - P\right)\right\} \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama untuk densitas ρ

$$c = -\frac{\partial \rho}{\rho \partial P}$$

$$\rho = \rho_{ref} \left\{1 + c\left(P_{ref} - P\right)\right\}$$

Keterangan:

P : Tekanan (psia)

V : Volume pada tekanan P(ft^3)

P_{ref} : Tekanan awal (psia)

V_{ref} : Volume fluida pada tekanan awal (ft^3)

c : Koefisien kompresibility isothermal

ρ : Densiti pada tekanan P (lb/ft^3)

ρ_{ref} : Densiti pada tekanan awal (lb/ft^3)

Fluida kompresibel:

$$c_g = \frac{1}{P} - \frac{1}{Z}\left(\frac{\partial Z}{\partial P}\right)_T$$

g adalah gas

5.1.2 Macam Aliran Fluida Reservoir

- Aliran *steady state* : tekanan konstan pada setiap lokasi reservoir

  $$\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_i = 0$$

  i adalah lokasi
- Aliran *unsteady state / transient flow* : kondisi fluida yang mengalir dimana gradien tekanan pada setiap posisi pada

reservoir konstan (tidak nol).

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_i = C,$$

C adalah konstanta

- Aliran semi *steady state / pseudo steady state* : tekanan pada lokasi yang berbeda dari reservoir merupakan fungsi linier dari waktu.

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right) = f\left(i,t\right)$$

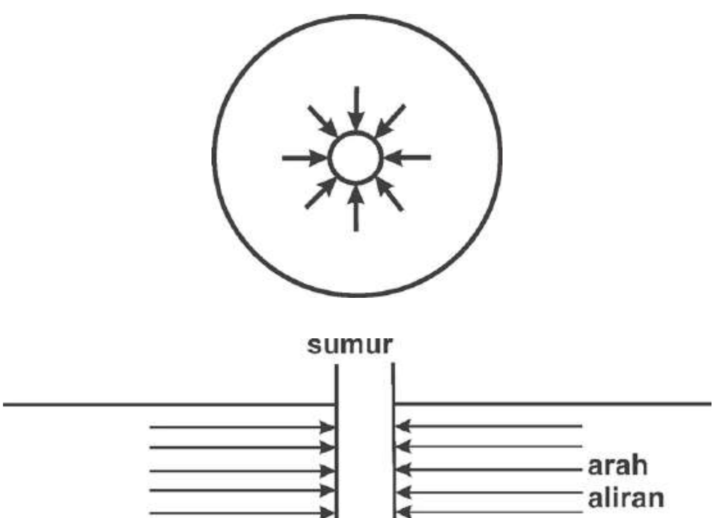
t adalah waktu

5.1.3 Geometri Reservoir

Bentuk reservoir mempengaruhi sifat aliran

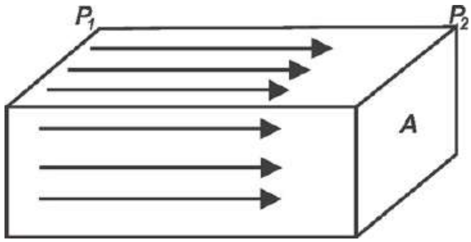
Sifat-sifat Aliran

- Aliran radial:



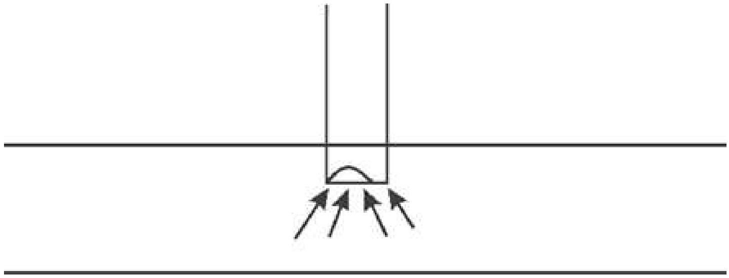
Gambar 5. 1 Aliran radial

- Aliran linier:

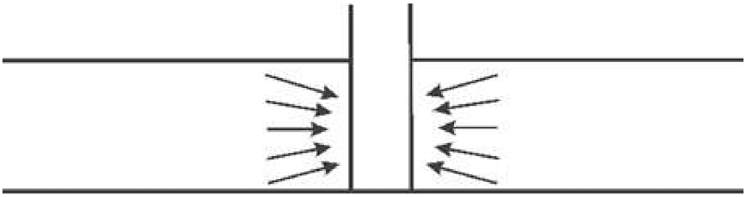


Gambar 5. 2 Aliran linier

- Aliran bola (*spherical*) atau setengah bola (*hemispherical*):



Gambar 5. 3 Aliran berbentuk setengah bola



Gambar 5. 4 Aliran berbentuk bola

5.1.4 Jumlah Fluida yang Mengalir dalam Reservoir

- Aliran single fase (minyak, air atau gas)
- Aliran 2 fase (minyak dan air, minyak dan gas, atau gas dan air)
- Aliran 3 fase (minyak; air dan gas)

Tambahan: Satuan

- Massa:
  1 kilogram = 1000 gram
- Panjang:
  1 meter = 3,28 ft
- waktu :
  1 jam = 60 menit = 3600 detik
- volume :
  1 barrel = 1 bbl = 158.987 liter = 9702 in^3 = 5.615 ft^3 = 0.159 m^3
  = 42 US gallon = 34.972 Imperial gallon.
- permeabilitas (satuan luas) :
  1 darcy = 1 d = $10^{-12} m^2$
- tekanan :
  1 psi = 6.894×10^3 Pa = 6.894×10^3 N/m^2
- viscositas :
  1 poise = 1 p = 10^{-1} Ns/m^2
- densitas :
  1 $gram/cm^3$ = 1000 kg/m^3
- temperatur :

$$T_R = T_F + 469°$$
$$T_K = T_C + 273$$

R (Rankine), F (Fahrenheit), K (Kelvin), dan C (Celcius).

RANGKUMAN

Sifat Reservoir Primer (*Primary Reservoir Characteristic*)

- Macam fluida reservoir : *incompressible, slightly compressible*, dan *compressible*
- Macam aliran fluida reservoir : keadaan *steady, unsteady*, dan semi *steady*
- Geometri reservoir : aliran linier, radial, bola dan setengah bola

- Jumlah fluida yang mengalir dalam reservoir : satu, dua dan tiga fase

UJI CAPAIAN PEMBELAJARAN

1. Apakah arti fluida kompresibel, sedikit kompresibel dan tidak kompresibel.
   serta berikan contoh-contohnya ?
2. Apakah arti keadaan aliran *steady, unsteady* dan semi *steady* ?
3. Apakah arti aliran linier, radial, bola, dan setengah bola ?
4. Apakah arti fluida satu, dua dan tiga fase, berikan contoh-contohnya ?

BAHAN DISKUSI

1. Mengapa tidak ada fluida tidak kompresibel ?
2. Termasuk fluida apakah *crude oil* ?
3. Termasuk fluida apakah gas alam ?

BAB 6
PERSAMAAN ALIRAN FLUIDA

Standar Kompetensi

1. Mampu menerapkan Ilmu dasar, komunikasi dan pendukung ilmu perminyakan dan atau panas bumi (CPP 1)
2. Mampu menerapkan pemikiran Logis, Kritis, Sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan teknologi Perminyakan dan atau panas bumi (CPKU 1)

Kompetensi Dasar

Mampu memahami tentang sistem, merumuskan model matematika dan mencari solusi sistem yang berhubungan dengan Teknik Perminyakan dan Panas bumi (CPP1)

Indikator

Mahasiswa dapat mengerti penurunan rumus Darcy dari Persamaan Navier Stokes.

Deskripsi

Penggunaan hukum Darcy pada perhitungan debet dan kecepatan aliran fluida sering di-pakai. Pada bab ini dijelaskan penurunan rumus Darcy. Penggunaan Rumus Darcy untuk aliran linier dan radial dan untuk beberapa macam fluida, dari referensi (Ahmed, 2011) & (Ahmed & Meehan, 2012)

6.1 Persamaan Navier – Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) = -\nabla P + \nabla\ .T + f$$

Merupakan kekekalan momentum pada suatu fluida dan aplikasi hukum Newton ke2 pada suatu kontinum, dimana :

v : kecepatan aliran
ρ : densiti fluida
p : tekanan
T : komponen tensor stress total (tensor orde 2)
f : gaya (tiap satuan volume) yang bekerja pada fluida
∇ : operator del

f bisa berupa gaya pada badan (gaya tiap satuan volume), misal gaya gravitasi atau gaya centrifugal.

Ketika fluida diasumsikan incompresible, homogen dan Newtonian, μ adalah konstanta kecepatan dinamik (kecepatan dinamik yang konstan). Bentuk *shear stress:*

$$\nabla\ .T = \mu\nabla^2 v,$$

∇^2 adalah vektor laplacian

$$\rho\left(\underbrace{\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{\textit{unsteady acceleration}} + \underbrace{v\ .\nabla v}_{\textit{convective acceleration}}}_{\text{inersia(pervolume)}}\right)$$

$$= \underbrace{\underbrace{-\nabla\rho}_{\textit{pressure gradient}} + \underbrace{v\ .\nabla^2 v}_{\textit{viscosity}} + \underbrace{f}_{\textit{other body forces}}}_{\textit{divergence of stress}}$$

Derivative material didefinisikan sebagai operator (per definisi):

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \,.\nabla$$

$$\rho \frac{D}{Dt} = -\nabla \rho + \mu \nabla^2 v + f$$

Persamaan diatas mencerminkan hukum Newton ke 2.
Untuk aliran stationer, bergerak pelan (*creeping)* dan incompressible

$$\frac{D\left(\mu u_i\right)}{Dt} = 0$$

Maka Persamaan Navier-Stokes disederhanakan menjadi Persaman Stokes

$$-\partial_i P + \mu \nabla^2 u_i + \rho \quad g_i = 0$$

μ	: viscositas
u_i	: kecepatan pada arah i
g_i	: komponen gravitasi pada arah i
P	: tekanan
φ	: porositas
k_{ij}	: tensor permeabilitas orde ke 2

Asumsi gaya hambat viscositas adalah linier dengan kecepatan

$$\mu \nabla^2 u_i = -(k_{ij})^{-1} \mu \varphi u_j$$

Ini akan memberikan kecepatan pada arah n.

$$-(k_{ij})^{-1} \mu \varphi u_j = -\partial_i P + \rho g_i$$

Dikalikan dengan - k_{ni}

$$k_{\text{üüüüi}}(k \quad)^{-1} \mu \varphi u \quad = -k \quad \left(\partial \, P - \rho \, g \quad\right)$$

$$k_{ni}(k_{ij})^{-1}u_j = -\frac{k_{ni}}{\mu\phi}\left(\partial_i P - \rho g_i\right)$$

$k_{ni}(k_{ij})^{-1} = \delta_{nj}$ fungsi delta dirac

$$\underbrace{k_{ni}\ (k_{ij})^{-1}u_j}_{u_n} = -\frac{k_{ni}}{\mu\phi}\left(\partial_i P - \rho g_i\right)$$

$u_n = -\frac{k_{ni}}{\mu\phi}\left(\partial_i P - \rho g_i\right)$ *u* adalah kecepatan pada arah n dikali dengan ϕ

$$u_n\phi = -\frac{k_{ni}}{\mu\phi}\left(\partial_i P - \rho g_i\right)$$

Kecepatan (v) adalah kecepatan efektif u_n dikalikan porositas ϕ

$$v = u_n\phi = -\frac{k_{ni}}{\mu}\left(\partial_i P - \rho g_i\right)$$

Untuk media *porous isotropic* permeabilitas bukan lagi tensor orde 2 tetapi menjadi orde 0 atau saklar, dimana yang bukan diagonal utama pada permeabilitas adalah nol, dan elemen diagonal utama sama.

$k_{ij} = 0$ untuk *i* ≠ *j*

$$k_{ii} = k_{jj} = k$$

Dimana

$$k_{ij} = \begin{vmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{vmatrix}$$

$v = -\frac{k}{\mu}\left(\nabla P - \rho g\right)$ …… Hukum Darcy

Persamaan Aliran Fluida (Sifat Fluida dalam reservoir)

Hukum Darcy (*Darcy Law)* adalah hukum dasar dari gerakan fluida pada media berpori. Kecepatan dari suatu fluida homogen pada suatu media berpori sebanding dengan gradien tekanan dan berbanding terbalik dengan viscositas fluida.

$$v = \frac{q}{A} = -\frac{k}{\mu}\frac{dP}{dx}$$

v	:	kecepatan (cm/s)
q	:	laju aliran volumetric (cm^3/s)
A	:	luas penampang lintang batuan (cm^2)
μ	:	viscositas fluida (centipoise)
dP / dx	:	gradien tekanan (atmosfir/cm) dalam arah yang sama dengan v dan q
k	:	konstanta bantuan, permeabilitas (Darcy)

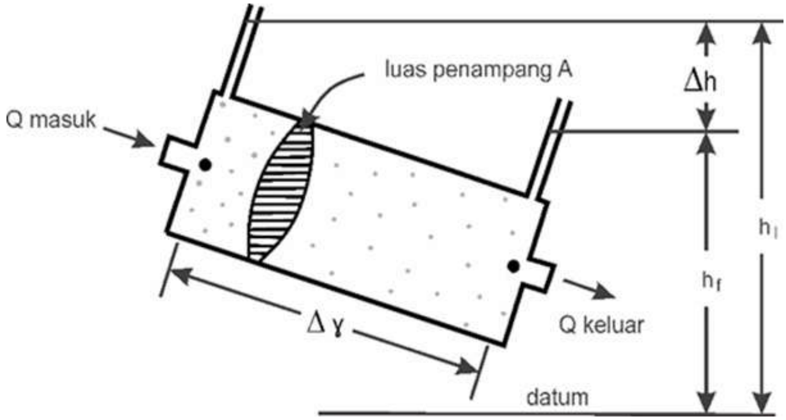
Tanda negatif (-) karena gradien tekanan negatif atau tidak searah dengan aliran.

6.2 Percobaan Darcy

Hukum Darcy adalah persamaan yang diturunkan secara fenomenologis menggam- barkan aliran fluida melalui media berpori. Hukum ini dirumuskan oleh Henry Darcy berdasarkan hasil percobaan pada aliran air melalui media pasir. Hal ini juga membentuk dasar ilmiah permeabilitas cairan yang digunakan dalam ilmu-ilmu kebumian. Meskipun Hukum Darcy (ekspresi dari kekekalan momentum) ditentukan secara eksperimental oleh Darcy, telah diturunkan dari Persamaan Navier Stokes. Hukum Darcy digunakan untuk menggambarkan aliran minyak, air, dan gas melalui reservoir petroleum.Hukum Darcy adalah pernyataan matematika sederhana dan merangkum beberapa sifat :

1. Jika tidak ada gradien tekanan pada suatu jarak tertentu, maka tidak ada aliran yang muncul.
2. Jika ada gradien tekanan, aliran akan muncul dari tekanan tinggi menuju tekanan rendah (arahnya berlawanan dengan naiknya gradien, oleh sebab itu ada tanda negatip pada hukum Darcy).
3. Untuk gradien tekanan yang besar, maka debit juga besar.

Hukum Darcy hanya berlaku untuk aliran lambat dan *viscous*, sebagian besar aliran airtanah termasuk dalam katagori ini.

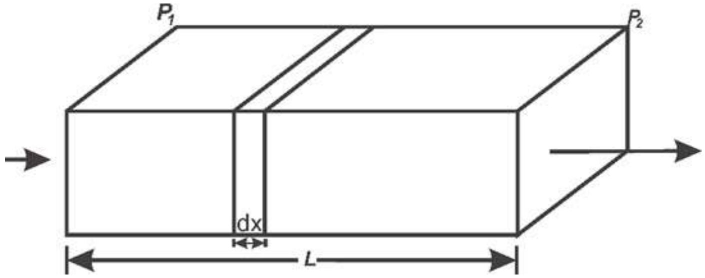


Gambar 6. 1 Percobaan Darcy

Aliran Tunak (*Steady State Flow*)

1. Aliran linier (*Linear Flow*)

   Penurunan rumus dari hukum Darcy untuk aliran linier



Gambar 6. 2 Aliran linier

$$v = \frac{q}{A} = -\frac{k}{\mu}\frac{dP}{dx}$$

$$\frac{q}{A}dx = -\frac{k}{\mu}dP$$

diintegrasikan

$$\frac{q}{A}\int_0^L dx = -\frac{k}{\mu}\int_{P_1}^{P_2} dP$$

$$\frac{q}{A}(L-0) = -\frac{k}{\mu}\int_{P_1}^{P_2} dP$$

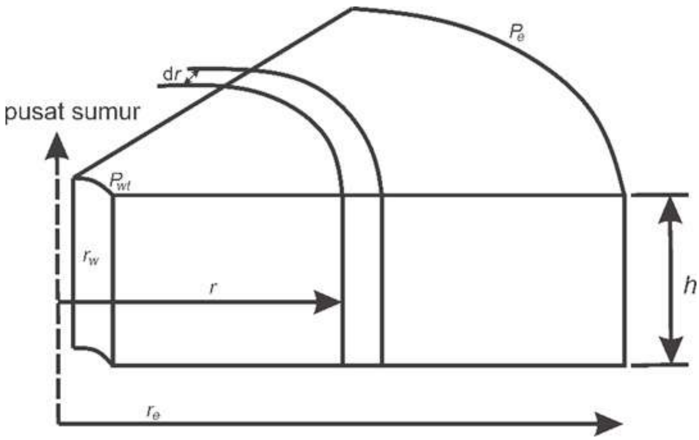
$$\frac{q}{A}L = -\frac{k}{\mu}(P_2 - P_1)$$

$$q = \frac{kA}{\mu L}(P_1 - P_2)$$

Konstranta normalisasi 0,001127 didapatkan dari penyesuaian satuan. Maka persamaan menjadi:

$$q = 0,001127\frac{kA}{\mu L}(P_1 - P_2)$$

2. Aliran Radial (*Radial Flow*)
   Penurunan rumus dari hukum Darcy untuk aliran radial



Gambar 6. 3 Aliran Radial

Hukum Darcy

$$v = \frac{q}{A} = -\frac{k}{\mu}\frac{dP}{dx}$$

A adalah luas selimut silinder adalah keliling lingkaran dikalikan tinggi silinder

$$A = 2\pi rh$$

Persamaan darcy menjadi:

$$\frac{q}{2\pi rh} = \frac{k}{\mu}\frac{dP}{dr}$$

Tanda + karena radius naik dengan kenaikan tekanan

$$\frac{q}{2\pi rh}\int_{r_w}^{r_e}\frac{dr}{r} = \frac{k}{\mu}\int_{P_w}^{P_e} dP$$

$$\frac{q}{2\pi rh}\left(\ln r_e - \ln r_w\right) = \frac{k}{\mu}\left(P_e - P_w\right)$$

$$\frac{q}{2\pi rh}\left(\ln\frac{r_e}{r_h}\right)=\frac{k}{\mu}\left(P_e-P_w\right)$$

$$q=\frac{2\pi kh\left(P_e-P_w\right)}{\mu\, In\dfrac{r_e}{r_w}}$$

Tambahan untuk kedua rumus diatas adalah L untuk panjang reservoir linier, h adalah tinggi reservoir radial. Sedangkan indeks w menyatakan sumur / *well* sedangkan indeks e menyatakan titik yang ditinjau diluar sumur.

Aplikasi hukum Darcy dari aliran linier dan radial dibedakan antara fluida yang kompresibel, sedikit kompresibel dan tidak kompresibel. Diperlukan penurunan rumus-rumus untuk kasus-kasus yang berbeda diatas dan tergantung dari sistem yang sedang dipelajari.

DAFTAR ACUAN

Ahmed, T. (2011). *Reservoir Engineering Handbook* (Second). Texas: Gulf Professional Publishing.

Ahmed, T., & Meehan, D. N. (2012). *Advance Reservoir Management and Engineering*. Oxford: Gulf Professional Publishing.

Ayres, F. J. (1967). *Schaum's Outline of Theory and Problems of Differential Equations*. USA: McGraw-Hill, Inc.

Boas, L. M. (1983). *Mathematical Methods In The Physical Sciences*. Canada: JOHN WILEY & SONS, INC.

Hugh D. Young, & R. A. F. (2012). *University Physics, 12th edition* (13th ed.). San Francisco: Addison-Wesley, 1301 Sansome Street. Retrieved from https://www.amazon.com/University-Physics-Modern-12th/dp/0321501217

Kreyzic, E. (2011). *Advanced Engineering Mathematics* (10th ed.). JOHN WILEY & SONS, INC. Retrieved from https://www.amazon.com/Advanced-Engineering-Mathematics-Erwin-Kreyszig/dp/0470458364

Ogata, K. (1981). System Dynamics 4 ed. *Journal of Chemical Information and Modeling*, *53*(9), 1689–1699.

Prayudi. (2006). *Matematika Teknik* (1st ed.). Yokyakarta: Graha Ilmu. Retrieved from http://grahailmu.co.id/previewpdf/979-756-140-2-194.pdf

(Kreyzic, 2011)

BIODATA PENULIS

Dr. Ir. Listiana Satiawati, M.Si. Lulus S1 dari Program Studi Teknik Fisika Fakultas Teknologi Industri Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya tahun 1986, lulus S2 dari Program Studi Ilmu Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia (UI) tahun 2011, lulus S3 dari Program Studi Ilmu Bahan-bahan, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia (UI) tahun 2020. Saat ini adalah dosen tetap Program Studi Teknik Perminyakan, Fakultas Teknologi Kebumian dan Energi, Universitas Trisakti. Mengampu mata kuliah Fisika Dasar, Matematika Teknik dan Mekanika Fluida.

Yusraida Khairani Dalimunthe, S.Pd., M.Sc. Lulus S1 dari Program Studi Pendidikan Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan (UNIMED) tahun 2011, lulus S2 dari Program Studi Ilmu Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada (UGM) tahun 2014. Saat ini adalah dosen tetap Program Studi Teknik Perminyakan, Fakultas Teknologi Kebumian dan Energi, Universitas Trisakti. Mengampu mata kuliah Fisika Dasar, Matematika dan Thermodinamika. Aktif menulis di berbagai jurnal ilmiah nasional maupun internasional dan pernah tampil sebagai pembicara di 8 konferensi internasional, 1 kali di Abu Dhabi, 1 kali di China dan 6 kali di Indonesia. Saat ini sedang melanjutkan pendidikan S3 di Institut Teknologi Bandung (ITB).

Inti pembelajaran Matematika Teknik adalah tentang pemodelan (modelling) dari suatu sistem yang sedang diteliti. Sistem yang dimaksud disini adalah sistem keteknikan khususnya yang berhubungan dengan Teknik Perminyakan. Variabel-variabel yang ada kemungkinan mempengaruhi keadaan sistem dipelajari. Kemudian diturunkan model matematika dari sistem tersebut yang berdasarkan pada variabel-variabel dan hubungannya dengan kaidah-kaidah ilmu fisika, model matematika yang didapat kebanyakan berbentuk Persamaan Diferensial (PD), baik PD biasa ataupun parsial (*Ordinary Differetial Equation* / ODE dan *Partial Differential Equation*/PDE), orde 1 atau 2 dan homogen atau non homogen. Setelah model matematika didapatkan maka diselesaikan dengan menggunakan kaidah matematika. Didalam buku ini yang dipergunakan untuk mencari solusi PD adalah dengan cara pemisahan variabel, deret, analitis dan transformasi Laplace. Solusi yang didapatkan digambarkan dengan grafik, sehingga performa dari sistem yang diteliti terlihat pada grafik yang dihasilkan. Sejauh ini cara pemodelan seperti ini dianggap cukup bisa menunjukkan keadaan dari sistem, meskipun dengan cara pendekatan-pendekatan. Kegunaan dari pemodelan adalah untuk meningkatkan performa dari sistem dengan mengintepretasi gambar grafik yang dihasilkan.

ISBN 978-602-0750-46-0
9 786020 750460