MATEMATIKA TEKNIK UNTUK TEKNIK PERMINYAKAN

OLEH :
LISTIANA SATIAWATI
YUSRAIDA KHAIRANI DALIMUNTHE

PRODI TEKNIK PERMINYAKAN
FAKULTAS KEBUMIAN DAN ENERGI
UNIVERSITAS TRISAKTI
2022

PRAKATA

Assalaamu'alaikum wr. wb.

Alhamdulilaah kami panjatkan kehadirat Allah SWT atas rahmat dan hidayahnya maka kami bisa menyelesaikan penulisan buku ajar Matematika Teknik untuk Teknik Perminyakan ini. Sholawat dan salam kami panjatkan kepada junjungan kami nabi Muhammad SAW yang telah membawa petunjuk dan kebenaran serta agama islam sebagai rahmat bagi seluruh alam.
Penulisan buku ini kami maksudkan untuk membantu para mahasiswa dalam memahami materi kuliah Matematika Teknik dan juga diharapkan dapat dipergunakan untuk para dosen yang mengajar mata kuliah yang sama. Buku ini adalah merupakan kumpulan dari perkuliahan selama 1 semester atau 16 kali tatap muka, untuk memenuhi beban 3 SKS dan diberikan kepada mahasiswa semester 4. Tujuan kuliah ini adalah untuk pemodelan dari sistem yang berhubungan dengan masalah pada Teknik Perminyakan yang dijelaskan dengan kaidah ilmu fisika dan dianalisa dan diselesaikan dengan metode matematika.
Selama proses penyuntingan sampai selesai penyusunan buku ini kami mengucapkan banyak terimakasih kepada pimpinan Universitas Trisakti, Lembaga Penelitian Usakti, Dekan FTKE yang telah memberikan fasilitas dan kesempatan kepada kami untuk menyusun buku ajar ini. Juga kepada pimpinan Jurusan Teknik Perminyakan dan semua rekan dosen, tenaga kependidikan dan para mahasiswa yang telah membantu dan memberikan semangat kepada kami selama penulisan buku ajar ini kami juga mengucapkan terima kasih.
Kemudian rasa syukur juga kami ucapkan kepada seluruh keluarga kami yang selalu memberikan dorongan dan suasana yang bahagia didalam kehidupan kami.
Sebelumnya kami memohon maaf apabila dalam penulisan buku ajar ini masih banyak kekurangan - kekurangannya. Untuk hal tersebut kami memohon saran dan kritik untuk perbaikan buku ajar ini.
Akhir kata kami selaku penulis mengharapkan agar buku ajar ini bisa bermanfaat bagi dunia pendidikan di negeri tercinta Indonesia

Wassalaamu'alaikum wr. wb.

Tangerang Selatan,

Penulis

Daftar Isi

Daftar Gambar

Bab 1

Pemodelan (*Modelling*)

Capaian Pembelajaran :

1. Mahasiswa mengerti tentang sistem terutama sistem fisika
2. Mahasiswa dapat mengerti tentang membuat model dari suatu sistem
3. Mahasiswa mengerti cara-cara membuat model suatu sistem
4. Mahasiswa mengerti kegunaan dari pemodelan sistem

Deskripsi :

Pemodelan (*modelling*) dari suatu sistem meliputi pemilihan variabel yang mempengaruhi sistem, penggunaan kaidah-kaidah ilmu fisika, penyusunan model matematika dari sistem, solusi persamaan matematika dengan syarat batas tertentu yang merupakan intepretasi dari sistem tersebut.

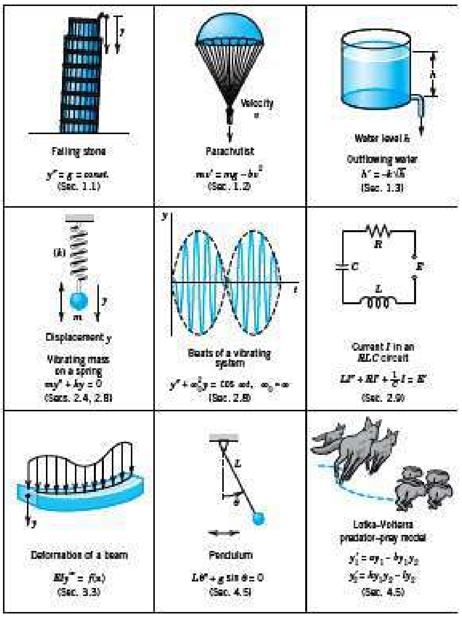
1.1 Konsep dasar pemodelan

Di dalam persoalan teknik seringkali dihadapkan pada masalah sistem yang rumit. Sistem itu bisa berupa suatu peralatan dengan beberapa input variabel yang mempengaruhinya, untuk mengintepretasikan output sebagai akibat dari beberapa input tersebut salah satu cara adalah dengan memodelkan sistem tersebut. Tujuannya adalah untuk mengatasi apabila ada kendala yang merugikan atau menurunkan performa dari peralatan tersebut ataupun untuk meningkatkan kemampuan dari alat dengan cara menganalisa model matematika dari sistem tersebut.

Jadi jika kita ingin menyelesaikan suatu problem-problem teknik / *engineering problems* (bisanya dalam bentuk problem fisika), pertama kita harus memformulasikan problem tersebut sebagai suatu ekspresi matematis dalam bentuk variabel-variabel, fungsi-fungsi, dan persamaan-persamaan. Ekspresi yang demikian dikenal sebagai suatu model matematis dari sistem yang diberikan.

Biasanya model matematis yang diturunkan dari suatu sistem atau suatu problem teknik adalah merupakan suatu persamaan yang berisi penurunan-penurunan (*derivatives*) dari suatu fungsi-fungsi yang tidak diketahui atau biasanya disebut Persamaan Diferensial (PD). Kemudian kita harus mendapatkan suatu solusi (yaitu suatu fungsi yang memenuhi persamaan itu), dari solusi tersebut bisa digunakan menyelidiki sifat-sifatnya, membuat grafik, mendapatkan nilai-nilainya dan mengintrepretasikan dalam bentuk sedemikian hingga kita bisa mengerti sistem fisika (*physical system*) tersebut secara keseluruhan. Secara singkat dapat dituliskan *Modeling - solving - interpreting*.

$$\boxed{\textit{Physical Systems}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\textit{Mathematical Models}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\textit{Mathematical Solutions}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\textit{Intrepretation}}$$



Gambar 1.1: Contoh pemodelan : 1. Benda jatuh, 2. Parasit, 3. Aliran fluida, 4. Pegas, 5. Beat pada vibrasi benda, 6. Rangkaian listrik, 7. Deformasi sinar, 8. Pendulum, 9. Model *Lotka-Volterra predator-prey*; sumber : referensi no. [3] hal. 3

Gambar 1.1 menunjukkan contoh dari beberapa sistem fisika.

RANGKUMAN :

Pembuatan model matematika yang merepresentasikan suatu sistem merupakan cara untuk menganalisa suatu sistem dengan membuat model yang mewakili sistem. Model ini bisa digunakan untuk meningkatkan performa dari sistem tersebut.

UJI CAPAIAN PEMBELAJARAN :

Mahasiswa ditugaskan untuk mencari contoh dari beberapa sistem Teknik Perminyakan, misalkan aliran fluida di tangki penyimpanan dan di pipa saluran fluida.

BAHAN DISKUSI :

Dari sistem Teknik Perminyakan dicoba untuk mencari kaidah-kaidah ilmu fisika yang sesuai dengan sistem yang didiskusikan, kemudian di cari model matematika yang mencerminkan keadaan sistem.

Bab 2

Deret (*Series*)

Capaian Pembelajaran :

1. Mahasiswa mengerti arti dan macam-macam deret
2. Mahasiswa mengerti cara penurunan rumus-rumus deret
3. Mahasiswa mengerti penggunaan rumus-rumus deret
4. Mahasiswa mengerti tentang penjabaran / ekspansi deret dan kegunaannya

Deskripsi :

Pembelajaran mengenai deret ini adalah merupakan pengulangan pembelajaran tentang deret. Akan tetapi lebih diperdalam dengan cara menurunkan rumus-rumus yang dipergunakan. Juga selanjutnya akan dipergunakan penjabaran deret untuk memecahkan persoalan model matematika yang akan didapat dari pemodelan sistem.

2.1 Deret Geometris (*Geometric Series*)

- Jumlah populasi bakteri yang berkembang setiap jam :

$$2, 4, 8, 16, 32, ..., ... \quad \rightarrow \text{ semakin besar (divergen)}$$

- Pantulan bola setiap waktu 2/3 dari tinggi semula :

$$1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, ..., ... \quad \rightarrow \text{ semakin kecil (konvergen)}$$

Total lintasan bola

$$\begin{aligned} &= 1 + 2.\,\frac{2}{3} + 2.\,\frac{4}{9} + 2.\,\frac{8}{27} + 2.\,\frac{16}{81} + ... \\ &= 1 + 2.\,\Bigg(\underbrace{\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + ...}_{\text{deret geometris}}\Bigg) \end{aligned}$$

Deret geometris diatas dapat ditulis

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1} + ...$$

Misalkan untuk n = 5, maka jumlah deret :

$$\begin{aligned} S_n = S_5 &= a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ... \\ r\,S_5 &= \quad ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + ... \end{aligned}$$

dikurangkan

$$\begin{aligned} S_5 - r\,S_5 &= a - ar^5 \\ S_5 &= \frac{a - ar^5}{1-r} = \frac{a(1-r^5)}{1-r} \end{aligned}$$

Maka untuk $r \neq 1$ secara umum dapat ditulis $\boxed{S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}}$

Untuk deret $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, ..., ...$ diatas, maka jumlah nya adalah :

$$S_n = \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, ... + \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{dan} \quad a = \frac{2}{3}, r = \frac{2}{3}, \quad \text{n adalah jumlah suku}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{\frac{1}{3}} = 2\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

Untuk harga n mendekati ∞, maka harga $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ mendekati nol.

Maka jumlah deret geometris menjadi : $\boxed{S_n = \frac{a}{1-r}}$

Soal :

Gunakan persamaan diatas untuk menghitung bilangan desimal yang berulang

1. 0.583333....=
2. 0.185185....=
3. 0.5555.....=
4. 0.818181....=
5. 0.243243....=

2.2 Definisi dan Notasi

Bentuk deret dan sumasi :

1.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} n^2$$

2.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

3.

$$x-x^2+\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{6}+...+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{(n-1)!}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{(n-1)!}$$

4.

$$1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}+...+\frac{(-x)^n}{2^n}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{2^n}$$

5.

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$$

6.

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

7.

$$1+\frac{(x+2)}{\sqrt{2}}+\frac{(x+2)^2}{\sqrt{3}}+...+\frac{(x+2)^n}{\sqrt{n+1}}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{\sqrt{n+1}}$$

Soal :

Tulislah bentuk deret

$$(1).\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}=...$$

$$(2).\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{2n+1}=...$$

$$(3).\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=...$$

$$(4).\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=...$$

$$(5).\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+5}=...$$

2.3 Deret Power

Deret yang bentuk suku-sukunya merupakan perkalian dari fungsi x atau dari fungsi (x-a).

Bentuk umum deret power

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n &= a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...\\ \sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a) &= a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_3(x-a)^3+...\end{aligned}$$

a. $0,58333\ldots = \frac{58}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10.000} + \frac{3}{100\,000} + \frac{3}{1\,000\,000} + \ldots$

$$= \frac{58}{100} + \underbrace{\left(\frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \frac{3}{10^6} + \ldots\right)}_{\text{deret geometris dengan}}$$

$$a = \frac{3}{10^3} \qquad r = \frac{1}{10}$$

Jumlah deret geometris $\boxed{S = \frac{a}{1-r}}$

$$S = \frac{3/10^3}{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{10^3} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{10^3} \cdot \frac{10}{9}$$

$$= \frac{1}{3 . 10^2} = \frac{1}{300}$$

$$0,583333 = \frac{58}{100} + \frac{1}{300} = \frac{58.3+1}{300} = \frac{174+1}{300}$$

$$= \frac{175}{300} = \frac{7}{12}$$

b. $0,185185\ldots = \underbrace{\frac{185}{1000} + \frac{185}{1000\,000}}_{\text{deret geometris dg}}$ $\quad a = \frac{185}{10^3} \quad r = \frac{1}{10^3}$

Jumlah deret geometris $\boxed{S = \frac{a}{1-r}}$

$$S = \frac{\frac{185}{10^3}}{1-\frac{1}{1000}} = \frac{\frac{185}{1000}}{\frac{999}{1000}} = \frac{185}{999} = \frac{5}{27}$$

$$0,5555 = \underbrace{\frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{5}{10\,000}}_{\text{deret geometris dg}} \quad a = \frac{5}{10} \quad r = \frac{1}{10}$$

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{5}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{5}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{5}{9}$$

4. $0{,}818181\ldots = \frac{81}{100} + \frac{81}{10.000} + \frac{81}{1000000} + \ldots$

$$a = \frac{81}{100} \qquad r = \frac{1}{100}$$

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{81}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{81}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{81}{99} = \frac{9}{11}$$

5. $0{,}243243\ldots = \frac{243}{1000} + \frac{243}{1000.000} + \ldots$

$$a = \frac{243}{1000} \qquad r = \frac{1}{1000}$$

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{243/1000}{1-\frac{1}{1000}} = \frac{\frac{243}{1000}}{\frac{999}{1000}} = \frac{243}{999} = \frac{9}{37}$$

6. $0{,}61111\ldots = \frac{6}{10} + \underbrace{\frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10\,000} + \frac{1}{100.000}}$

$$a = \frac{1}{100} \qquad r = \frac{1}{10}$$

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{100}\cdot\frac{10}{9} = \frac{1}{90}.$$

$$0{,}61111\ldots = \frac{6}{10} + \frac{1}{90} = \frac{54+1}{90} = \frac{55}{90} = \frac{11}{18}$$

7. $0{,}7777\ldots = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{7}{10.000}$

$$a = \frac{7}{10} \qquad r = \frac{1}{10}$$

$$S = \frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{7/10}{9/10} = \frac{7}{9}$$

8. $0,2666\ldots = \dfrac{2}{10} + \underbrace{\dfrac{6}{100} + \dfrac{6}{1000} + \dfrac{6}{10000}}$ ✓✓

$a = \dfrac{6}{100} \quad r = \dfrac{1}{10}$

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{6}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{6}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{6}{100} \cdot \frac{10}{9}$$

$$= \frac{6}{90} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

$$\cancel{0,2666\ldots = \frac{2}{10} + \frac{1}{90} = \frac{36+2}{180} = \frac{38}{180}}$$

$$\cancel{= \frac{19}{90}}$$

$$= \frac{2}{10} + \frac{1}{15} = \frac{6+2}{30} = \frac{8}{30}$$

$$= \frac{4}{15}$$

9. $0,69444\ldots = \dfrac{69}{100} + \underbrace{\dfrac{4}{10^3} + \dfrac{4}{10^4} + \dfrac{4}{10^5}}$

$a = \dfrac{4}{10^3} \quad r = \dfrac{1}{10}$

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{4}{1000}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{4}{1000}}{\frac{9}{10}} =$$

$$= \frac{4}{1000} \cdot \frac{10}{9} = \frac{4}{900} = \frac{2}{450} = \frac{1}{225}$$

$$\cancel{0,69444 = \frac{69}{100} + \frac{1}{225} = \frac{45 \cdot 69 + 200}{4500}}$$

$$\cancel{= \frac{3105+200}{4500} = \frac{3305}{4500}}$$

$$= \frac{69}{100} + \frac{1}{225} = \frac{69 \cdot 225 + 100}{22500} = \frac{15625}{22500}$$

Tulis dalam bentuk awal / pertama

1. $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots$

2. $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} = \frac{(-1)^1}{1} + \frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^4}{4} + \cdots$

$= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+5} = \frac{1}{6} + \frac{2}{7} + \frac{3}{8} + \frac{4}{9} + \frac{5}{10} + \cdots$

4. $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{m+1} = \frac{\sqrt{1}}{1+1} + \frac{\sqrt{2}}{2+1} + \frac{\sqrt{3}}{3+1} + \frac{\sqrt{4}}{4+1} + \cdots$

$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{4}}{5} + \cdots$

5. $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2n(2n+1)}{3n+5} = \frac{2.1(2.1+1)}{3.1+5} + \frac{2.2(2.2+1)}{3.2+5} + \frac{2.3(2.3+1)}{3.3+5} + \cdots$

$= \frac{2(3)}{8} + \frac{4(5)}{6+5} + \frac{6(7)}{9+5} + \cdots$

$= \frac{6}{8} + \frac{20}{11} + \frac{42}{14}$

6. $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(1!)^2}{(2.1)!} + \frac{(2!)^2}{(2.2)!} + \frac{(3!)^2}{(2.3)!} + \frac{(4!)^2}{(2.4)!} + \cdots$

$= \frac{1}{2} + \frac{4}{4.3.2.1} + \frac{(3.2.1)^2}{6.5.4.3.2.1} + \frac{(4.3.2.1)^2}{8.7.6.5.4.3.2.1} + \cdots$

$= \frac{1}{2} + \frac{4}{24} + \frac{36}{720} + \frac{576}{40.320} + \cdots$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{20} + \frac{1}{70}$

Tulis deret berikut dalam bentuk sumasi (Σ)

1. $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{4}{7} + \frac{8}{9} + \frac{16}{11} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}$ ✓

$\frac{1}{1+2} + \frac{2}{2+2+1} + \frac{3+1}{3+2+2} + \frac{4+2.4}{4+2+3} + \frac{5+11}{5+2+4} + \cdots$

$\frac{2^0}{2.1+1} + \frac{2}{2.2+1} + \frac{2^2}{2.3+1} + \frac{2^3}{2.4+1} + \frac{2^4}{2.5+1} + \cdots = \sum \frac{2^n}{2n+3}$

$\cancel{\frac{2}{2.0+3} + \frac{}{2.1+3} + \frac{}{2.2+3}}$

$\boxed{= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2n+3}}$

$= \frac{2^0}{2.0+1} + \frac{2^1}{2.2+1} + \frac{2^2}{2.3+1} + \frac{2^3}{2.4+1} + = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{2n+1}}$

$= \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{4}{7} + \frac{8}{9}$

$\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \cdots = \boxed{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}}$

$\cancel{\frac{1}{(n+1)(n+2)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6}.$

$\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \cdots \quad \boxed{= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(m+1)^2}}$ ✓✓

$\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \cdots$

10. $\frac{1}{7} + \frac{2}{9} + \frac{3}{11} + \frac{4}{13} + \cdots = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+5}}$

11. $\frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \cdots = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1}}}$

12. $\frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} - \frac{\ln 5}{5} + \cdots = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln(n+1)}{n+1}}$

a_n dengan $n = 0, 1, 2, 3, ...$ adalah konstanta.

2.4 Mengembangkan fungsi dengan deret

$$\sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n + ... \quad (0)$$

$$\text{untuk} \quad x = 0, \sin 0 = 0, \to a_0 = 0 \quad (1)$$

diturunkan terhadap x

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x = a_1 + 2\ a_2\ x + 3\ a_3\ x^2 + 4\ a_4\ x^3 + ... + n\ a_n\ x^{n-1} + ...$$

$$\text{untuk} \quad x = 0, \cos 0 = 1, \to a_1 = 1 \quad (2)$$

diturunkan terhadap x

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x = 2\ a_2 + 3.2\ a_3\ x + 4.3\ a_4\ x^2 + ... + n(n-1)\ a_n\ x^{n-2} + ...$$

$$\text{untuk} \quad x = 0, -\sin 0 = 0, \to a_2 = 0 \quad (3)$$

diturunkan terhadap x

$$\frac{d}{dx}(-\sin x) = -\cos x = 3.2\ a_3 + 4.3.2\ a_4\ x + ... + n(n-1)(n-2)\ a_n\ x^{n-3} + ...$$

$$\text{untuk} \quad x = 0, -\cos 0 = -1, \to a_3 = \frac{-1}{3.2} = \frac{-1}{3!} \quad (4)$$

diturunkan terhadap x

$$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x = 4.3.2\ a_4 + 5.4.3.2\ a_5\ x + ... + n(n-1)(n-2)(n-3)\ a_n\ x^{n-4} + ...$$

$$\text{untuk} \quad x = 0, \sin 0 = 0, \to a_4 = 0 \quad (5)$$

diturunkan terhadap x

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x = 5.4.3.2\ a_3 + 4.3.2\ a_5 + 6.5.4.3.2\ a_6\ x + ...$$

$$+n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\ a_n\ x^{n-5} + ...$$

$$\text{untuk} \quad x = 0, \cos 0 = 1, \to a_5 = \frac{-1}{5.4.3.2} = \frac{-1}{5!} \quad (6)$$

dst.

Kemudian konstanta pada persamaan (1), (2), (3), (4), (5), dan (6) disubstitusi ke persamaan (0). Maka dihasilkan :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...$$

Cara ini disebut deret Mc Laurin atau deret Taylor pada (0,0) atau a = 0.

2.5 Deret Taylor

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a+0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_3(x-a)^3+a_4(x-a)^4+...+a_n(x-a)^n+... \\
f'(x) &= a_1+2\,a_2\,(x-a)+3\,a_3\,(x-a)^2+4\,a_4\,(x-a)^3+...+n\,a_n\,(x-a)^{n-1}+... \\
f''(x) &= 2\,a_2+3.2\,a_3\,(x-a)+4.3\,a_4\,(x-a)^2+5.4.\,a_5\,(x-a)^3+...+n(n-1)\,a_n\,(x-a)^{n-2}+... \\
f'''(x) &= 3.2\,a_3+4.3.2\,a_4\,(x-a)+5.4.3\,a_5\,(x-a)^2+...+n(n-1)(n-2)\,a_n\,(x-a)^{n-3}+... \\
&= 3!\,a_3+4!\,a_4\,(x-a)+5.4.3\,a_5\,(x-a)^2+...+n(n-1)(n-2)\,a_n\,(x-a)^{n-3}+... \\
& . \\
& . \\
& . \\
f^n(x) &= n(n-1)(n-2)(n-3)\,.....\,1\,a_n+...\text{ bentuk yang berisi }(x-a) \\
f^n(x) &= n!\,a_n+...\text{ bentuk yang berisi }(x-a)
\end{aligned}
$$

Untuk x = a

$$
\begin{aligned}
f(a) &= a_0 \\
f'(a) &= a_1 \\
f''(a) &= 2\,a_2 \\
f'''(a) &= 3!\,a_3 \\
& . \\
& . \\
f^n(a) &= n!\,a_n
\end{aligned}
$$

Maka deret Taylor untuk f(x) disekitar (x-a) adalah

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{1}{2!}\,(x-a)^2\,f''(a)+...+\frac{1}{n!}(x-a)^n\,f^n(a)+...$$

Dengan menggunakan penurunan seperti diatas akan didapatkan penjabaran deret yang disebut :

Ekspansi deret dasar :

$$
\begin{aligned}
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+ \quad\longrightarrow\quad \text{konvergen untuk semua x} \\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...+ \quad\longrightarrow\quad \text{konvergen untuk semua x} \\
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}+...+ \quad\longrightarrow\quad \text{konvergen untuk semua x} \\
\ln(1-x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+ \quad\longrightarrow\quad \text{konvergen untuk}\quad 1<x\le 1
\end{aligned}
$$

Contoh penggunaan ekspansi deret

- Hitunglah

$$\frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{1}{x}\sin x\right)|_{x=0.1} = ...$$

Bisa dihitung dengan 4 kali penurunan kemudian dihitung hasilnya, tetapi bisa juga dengan ekspansi deret $\sin x$, dibagi x , kemudian diturunkan 4 kali, dan dimasukkan harga x = 0.1.

$$\frac{1}{x}\sin x = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ..\right) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ..$$

dideferensialkan 4 kali

$$\frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{1}{x}\sin x\right) = \frac{4.3}{5!} - \frac{6.5.4.3\,x^2}{7!} + \frac{8.7.6.5\,x^4}{9!} + ...$$

dimasukkan harga x = 0.1

$$\frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{1}{x}\sin x\right) = 0.1 - 7.14286 + 0.0000463 - ... = -7.0428137.$$

RANGKUMAN :

Sudah dipelajari tentang :

Deret Geometris, deret Power, deret Taylor, deret Mc Laurin dan penggunaan ekspansi deret pada soal.

UJI CAPAIAN PEMBELAJARAN :

Hitung bilangan desimal yang berulang berikut ini :

$$
\begin{array}{ll}
1. & 0.61111.... = \\
2. & 0.7777..... = \\
3. & 0.26666.... = \\
4. & 0.3333..... =
\end{array}
$$

Tulislah bentuk deret :

$$
\begin{array}{ll}
1. & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = ... \\
2. & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(2n+1)}{3n+5} = ... \\
3. & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = ... \\
4. & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^2} = ...
\end{array}
$$

BAHAN DISKUSI :

Pada pembelajaran tentang deret ditingkatkan pembelajarannya dengan mempelajari tentang Deret Fourier yang akan dipergunkan untuk penyelesaian persamaan diferensial (PD) hasil pemodelan sistem.

Bab 3

Persamaan Diferensial (PD)

Capaian Pembelajaran :

1. Mahasiswa memahami bentuk Persamaan Diferensial (PD) orde 1, 2 ,dst.
2. Mahasiswa memahami bentuk Persamaan Diferensial (PD) homogen dan non homogen
3. Mahasiswa memahami dan mencari solusi PD Biasa
4. Mahasiswa memahami dan mencari solusi PD Parsial
5. Mahasiswa memahami dan mencari solusi PD Total
6. Aplikasi PD pada penyelesaian persoalan sistem fisika

Deskripsi :

Pada pemodelan suatu sistem, model matematika yang didapatkan biasanya berupa Persamaan Diferensial. Maka pada bab ini mahasiswa diharapkan memahami tentang bermacam-macam PD, dan cara penyelesaiannya secara analitis untuk menganalisa sistem yang sedang dipelajari.

3.1 Persamaan Diferensial Biasa / Sederhana (*Ordinary Differential Equation / ODE*)

Adalah suatu persamaan yang berisi satu atau beberapa penurunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui. Biasanya disebut y(x) atau y(t). Misal y=y(x) atau y=y(t).

1. $y' = \cos x$
2. $y'' + 9y = e^{-2x}$
3. $y''' - 3/2(y')^2 = 0$

$\cos x, e^{-2x}$ adalah fungsi

y′, y″, dan y‴ adalah turunan (*derivatives*)

9, 2 dan 3/2 adalah konstanta.

Beberapa bentuk persamaan diferensial biasa (ODE) adalah :

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{bentuk implicit}$$

$$y' = f(x, y) \quad \text{bentuk explicit}$$

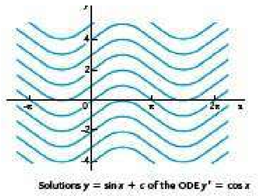
Solusi (penyelesaian) adalah fungsi y=h(x) yang bisa digambarkan dengan grafik (kurva solusi).

1. Verifikasi solusi

   Persamaan $xy' = -y$ untuk semua $x \neq 0$, penyelesaiannya adalah $y = \frac{c}{x}$, c adalah konstanta. Buktikan.

2. Solusi dengan kalkulus. Kurva solusi

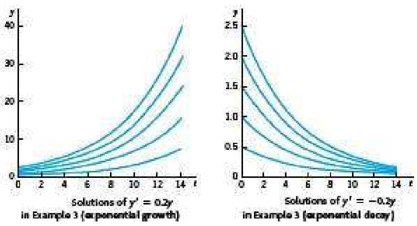
   dapatkan solusi dari persamaan diferensial $y' = \frac{dy}{dx} = \cos x$.



Gambar 3.1: *Family of solution*, sumber referensi no. [3] hal. 5.

3. Pertumbuhan eksponensial (*exponential growth*) dan peluruhan/pengurangan eksponensial (*exponential decay*)

   Persamaan $y = c\ e^{0,2t}$ mempunyai turunan $y' = \frac{dy}{dx} = 0,2\ e^{0,2t} = 0,2\ y$, persamaan diferensial umum adalah $y' = ky$. Konstanta k positip adalah pertumbuhan eksponensial. Konstanta k negatip adalah peluruhan eksponensial lihat gambar 3.2



Gambar 3.2: Pertumbuhan dan peluruhan eksponensial, sumber referensi no. [3] hal. 5.

4. Syarat batas (*initial condition*)

   Hitunglah keadaan awal dari $y' = 3y. \quad y(0) = 5,7$

Jawaban hal 14 :

4

Persamaan diferensial biasa (ODE)

1. Verifikasi solusi
Persamaan $xy' = -y$ untuk semua $x \neq 0$, penyelesaiannya adalah $y = \frac{c}{x}$, c adalah konstanta. Buktikan.

$$y = \frac{c}{x} = c x^{-1}$$

$$Y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(cx^{-1}) = c\frac{d}{dx}x^{-1} = c \cdot -1 x^{-2}$$
$$= -\frac{c}{x^2}$$

disubstitusikan ke persamaan awal :

$$xY' = -Y$$

$$x\left(-\frac{c}{x^2}\right) = -\frac{c}{x} \rightarrow -\frac{c}{x} = -\frac{c}{x} \text{ (terbukti)}$$

2. Solusi dengan kalkulus. Kurva solusi
dapatkan solusi dari persamaan diferensial $y' = \frac{dy}{dx} = \cos x$

$$Y' = \frac{dy}{dx} = \cos x \rightarrow dY = \cos x \, dx$$

$$Y = \int \cos x \, dx = \sin x + c$$

Kurva solusi pada gambar 2 untuk harga²

$$c = \cdots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$$

Koreksi dibuku hal 14.

$$y' = \frac{dy}{dx} = 0{,}2 \, . \, C e^{0{,}2t}$$

3. Pertumbuhan eksponensial dan peluruhan eksponensial.

$Y = c e^{0{,}2t}$

$$Y' = \frac{dY}{dt} = c \, . \, 0{,}2 \, . \, e^{0{,}2t} = 0{,}2 \, . \, \underbrace{Ce^{0{,}2t}}_{Y} = 0{,}2 \, Y$$

Ralat dibuku ada yg salah (kurang c)

$Y' = 0{,}2 \, Y \longrightarrow$ digambar no 3.1

4. Syarat batas (initial condition)

Hitunglah keadaan awal dari $y' = 3y$, $y(0) = 5{,}7$

$y' = \dfrac{dy}{dx} = 3Y \longrightarrow$ Solusinya adalah :

$Y(x) = ce^{3x}$ .. spt no. 3.2

= general solution.

Pemakaian syarat batas

$y(0) = y(x=0) = 5{,}7$

$= ce^{3.0} = c \, . \, e^{0} = C$

Jadi $c = 5{,}7$

$\rightarrow Y(x) = 5{,}7 \, e^{3x}$ partikular solution.

Aplikasi (permodelan)

Soal no 1 : Air garam dalam tangki dan gambar 4.

Jawab :

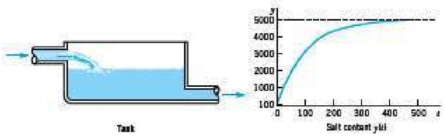
Harus dicari dahulu model matematika dari sistem.

Aplikasi permodelan

Mendesign model yang bagus tidak bisa dilakukan oleh komputer. Oleh karena itu menyiapkan model menjadi hal yang penting dalam matematika terapan modern. Untuk mendapatkan pemodelan yang bagus adalah memeriksa dengan hati-hati proses pemodelan diberbagai bidang dan aplikasi. Dengan demikian permodelan akan berguna bagi semua mahasiswa, sarjana teknik dan sains.

1. Tangki berisi 1000 galon air yang awalnya 100 lb garam dilarutkan.

   Air garam dimasukkan (i adalah input) dengan laju 10 galon/menit, masing-masing galon berisi 5 lb garam yang dilarutkan. Campuran dianggap konstan dengan cara pengadukan. Air garam yang keluar (o adalah output) dengan laju 10 galon/menit. Dapatkan jumlah garam pada tangki setiap saat t. lihat gambar 3.3.



Gambar 3.3: Tangki air garam, sumber referensi no. [3] hal. 14.

Theorema Torricelli

(Referensi [4])

Gambar 3.5 memperlihatkan tangki penyimpanan bensin dengan luas penampang atas A_1, diisi setinggi h. Ruang diatas bensin adalah udara dengan tekanan p_0, dan bensin mengalir keluar melalui lubang kecil dengan luas penampang A_2. Tekanan dititik 2 adalah tekanan atmosfir.

Persamaan Bernoulli untuk titik 1 dan 2, dan y = 0 pada titik 2 (dasar tangki) adalah:

$$\begin{aligned} P_0 + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v_1^2 &= P_a + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \\ v_2^2 &= v_1^2 + 2\left(\frac{P_0 - P_a}{\rho}\right) + 2gh \end{aligned}$$

v adalah kecepatan.

Karena A_2 jauh lebih kecil daripada A_1, maka v_1^2 jauh lebih kecil daripada v_2^2 sehingga diabaikan.

$$v_2^2 = 2\left(\frac{P_0 - P_a}{\rho}\right) + 2gh$$

Misal

$Y(t)$ adalah jumlah garam pada tangki untuk waktu t

$Y'(t)$ adalah perubahan jumlah garam terhadap waktu =

laju aliran garam masuk − laju aliran garam keluar tangki

aliran garam yang masuk tiap menit adalah

$$5 \text{ lb} \times 10 = 50 \text{ lb}$$

aliran air garam yang keluar 10 galon →

$\frac{10}{1000} = 0{,}01$ (1%) dari total air garam dalam tangki

jadi garam yang keluar tangki $0{,}01\,Y$ setiap menit

$$Y' = 50 - 0{,}01\,Y = -0{,}01(Y - 5000)$$

$$\frac{dY}{dt} = -0{,}01\,(Y - 5000)$$

ODE (model matematis sistem)

Karena ODE bersifat bisa dipisahkan variabel²nya (separable)

maka penyelesaiannya

$$\frac{dY}{dt} = -0{,}01\,(Y - 5000)$$

$$\frac{dY}{Y - 5000} = -0{,}01\, dt.$$ diintegralkan

$$\int \frac{dY}{Y-5000} = -0{,}01 \int dt$$

$$\ln(Y - 5000) = -0{,}01\,t + C'$$

$$e^{\ln(Y-5000)} = e^{(-0{,}01t + C')}$$

(D)

$$Y - 5000 = e^{-0{,}01t}\, e^{c'}$$

misal $e^{c'} = C$ (konstanta)

$$Y - 5000 = C\, e^{-0{,}01t}$$

$$Y = C\, e^{-0{,}01t} + 5000$$ ... Penyelesaian model matematis

Untuk menghitung harga C, digunakan keadaan awal (initial condition)

$$Y\,(t=0) = 100 \text{ lb garam.}$$

disubstitusi ke solusi

$$100 = C\, e^{-0{,}01.0} + 5000$$

$$100 = C \,.\, e^{0} + 5000 \rightarrow C = -4900$$

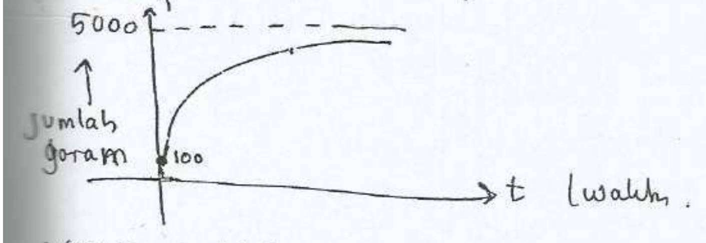
Persamaan menjadi $\underline{Y = 5000 - 4900\, e^{-0{,}01t}}$

(Model matematika hubungan antara jumlah garam Y thd waktu t)

digambarkan spt gambar 4 sebelah kanan

grafik menunjukkan limit 5000 lb.

garam naik dengan bertambahnya waktu.



KUIS: Kerjakan kembali soal no 1. Tangki air garam.

Keadaan awal 100 lb $\longrightarrow$ diubah 200 lb.

masing^2 galon berisi 5 lb garam $\longrightarrow$ diubah 4 lb garam

Jika bagian atas tangki dibiarkan terbuka maka tekanannya adalah sama dengan tekanan atmosfir, sehingga $P_0 - P_a = 0$,

$$\boxed{\mathrm{v}_2 = \sqrt{2gh}}$$

h = h(t), v_2 disebut laju eflux.

Laju eflux dari lubang berjarak h dibawah permukaan cairan adalah sama dengan laju benda yang jatuh bebas dari ketinggian h, ini disebut Theorema Torricelli. Hal ini juga berlaku untuk lubang di dinding pada kedalaman h dibawah permukaan cairan.

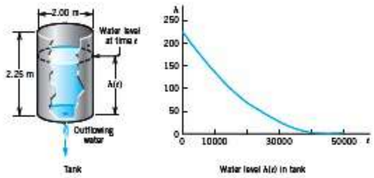
J.C. Borda memperkenalkan faktor kontraksi (*contraction factor*) = 0.6. Sehingga persamaan menjadi:

$$\boxed{\mathrm{v}_2 = 0,6\sqrt{2gh}}$$

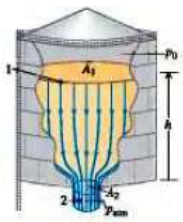
2. *Leaking tank*

   Cairan yang mengalir melalui suatu lubang (*Torricelli's law*)

   Aliran keluar air dari suatu tangki silinder dengan suatu lubang pada dasarnya. Diameter tangki 2 meter, diameter lubang 1 centimeter, tinggi awal 2,25 meter. Kapan tangki menjadi kosong ? Lihat gambar 3.5.



Gambar 3.4: *Leaking tank*, sumber referensi no. [3] hal. 17.



Gambar 3.5: Percobaan Torricelli, sumber referensi no. [4] hal. 471.

3.2 Persamaan diferensial (ODE) homogen dan non homogen orde I

3.2.1 Persamaan diferensial homogen

$$y' + p(x)y = 0$$
$$y = f(x) \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

Solusinya

$$y' + p(x)y = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

diintegralkan

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y} &= -\int p(x)dx \quad \rightarrow \quad \ln y = -\int p(x)dx + c^* \\
e^{\ln y} &= e^{-\int p(x)d(x)+c^*} = e^{-\int p(x)dx}.e^{c^*} \quad e^{c^*} = c \\
y(x) &= c\, e^{-\int p(x)dx}
\end{aligned}$$

Dari teorema Torricelli dan Borda didapat kecepatan aliran air keluar adalah

$$v(t) = 0{,}6\sqrt{2.g.h(t)}$$

$h(t)$ = tinggi air tangki pada waktu t

g = percepatan gravitasi

$= 980 \dfrac{cm}{s^2}$

v = kecepatan

V = Volume

Perubahan volume air yg keluar pada selang waktu t

$$\Delta V = A\, v\, \Delta t \quad \ldots (a)$$

Perubahan volume air pada tangki

$$\Delta V = -B\, \Delta h \quad \ldots (b)$$

tanda (−) artinya air dalam tangki berkurang

A = luas penampang lubang keluar

B = luas penampang tangki.

(a) = (b)

$$A\, v\, \Delta t = -B\Delta h$$

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = -\frac{A}{B}\, v = -\frac{A}{B} \cdot 0{,}6 \cdot \sqrt{2\,g\,h(t)}$$

untuk Δt mendekati nol ($\Delta t \to 0$)

maka $\dfrac{\Delta h}{\Delta t}$ menjadi $\dfrac{dh}{dt}$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A}{B} \cdot 0{,}6 \cdot \sqrt{2\,g\,h(t)}$$

harga A & B dicari dengan:

$d_A = 1\text{ cm} = 10^{-2}\text{ m}$

$r_A = \frac{1}{2}\text{ cm} = 5.10^{-3}\text{ m}$

$A = \pi r_A^2 = \pi.25.10^{-6}\text{ m}^2$

$d_B = 2\text{ m}$

$r_B = 1\text{ m}$

$B = \pi r_B^2$

$= \pi\, 1\text{ m}^2 = \pi\text{ m}^2$

d = diameter

r = jari² $= \dfrac{d}{2}$

$$\frac{A}{B} = \frac{\pi.25.10^{-6}\text{ m}^2}{\pi\text{ m}^2} = 25.10^{-6}$$

10

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A}{B} \cdot 0{,}6 \cdot \sqrt{2 g h(t)}$$

$$= -25 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}6 \sqrt{2 \cdot 980 \cdot h(t)}$$

$$= -0{,}000\,664 \sqrt{h(t)}$$ ... model matematika perubahan tinggi air dalam tangki thd waktu.

Persamaan bisa diselesaikan dengan pemisahan variabel

$$\frac{dh}{dt} = -0{,}000664 \sqrt{h(t)} \rightarrow \frac{dh}{\sqrt{h(t)}} = -0{,}000664\, dt.$$

diintegralkan $\int \frac{dh}{h^{1/2}} = -0{,}000664 \int dt$.

$$\int h^{-\frac{1}{2}} dh = -0{,}000664 \int dt \rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} = -0{,}000664\, t + c'$$

$$h^{\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{2} \times 0{,}000664\, t + \tfrac{1}{2} c' \qquad \tfrac{1}{2} c' = c$$

$$= -0{,}000\,332\, t + c$$

$$h = (c - 0{,}000\,332\, t)^2$$

Syarat batas $h(t=0) = 225$ cm

$$225 = (c - 0{,}000\,332 \cdot 0)^2 \longrightarrow c = 15$$

$$h(t) = (15 - 0{,}000\,332\, t)^2$$ ... Solusi persamaan diferensial.

Tangki kosong pada t berapa?

$h(t) = 0$

$$0 = (15 - 0{,}000332\, t)^2 \longrightarrow t = \frac{15}{0{,}000322} \text{ det}$$

$$t = 46583{,}85 \text{ det} = 12{,}6 \text{ jam}$$

3.2.2 Persamaan diferensial non homogen

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= r(x) \\ y &= f(x) \\ y' &= \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

dikali dengan F

$$Fy' + FPy = Fr \quad \text{untuk} \quad FPy = F'y$$

$$\text{ruas sebelah kiri} = (Fy)'$$

$$(Fy)' = F'y + y'F$$

$$Fpy = F'y \quad \rightarrow \quad Fp = F' \quad \rightarrow \quad FP = \frac{dF}{dx}$$

$$\frac{dF}{F} = pdx \quad \text{diintegralkan}$$

$$\int \frac{dF}{F} = \int pdx$$

$$\ln F = \int pdx = h \quad \rightarrow \quad \ln F = h \quad \rightarrow \quad e^{\ln F} = e^h \quad \rightarrow \quad F = e^h$$

$$h = \int pdx \quad \rightarrow \quad \frac{dh}{dx} = \frac{d}{dx}\int pdx = p \quad \rightarrow \quad h' = p$$

Dimasukkan ke persamaan

$$\begin{aligned} Fy' + FPy &= Fr \\ e^h y' + e^h h' y &= e^h y' + (e^h)' y \\ &= (e^h y)' \\ &= e^h r = r e^h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (e^h y)' &= \frac{d}{dx}(e^h y) = r\, e^h \\ & d(e^h y) = r\, e^h dx \\ & \int d(e^h y) = \int r\, e^h dx \quad \rightarrow \quad e^h y + \int r\, e^h dx + c \\ y &= e^{-h}\left(\int e^h r\, dx + c\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{y(x) = e^{-h}\left(\int e^h r dx + c\right) \text{ dengan } h = \int p(x)dx}$$

adalah penyelesaian ODE non homogen orde I

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-h}\left(\int e^{h} r\,dx + c\right) \\ &= e^{-h}\int e^{h} r\,dx + ce^{-h} \end{aligned}$$

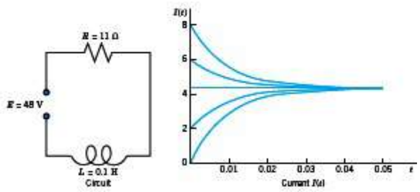
Keterangan : $y(x)$ output total

$e^{-h}\int e^{h} r\,dx$ respon terhadap input r

ce^{-h} respon terhadap data awal

Rangkaian listrik

Model rangkaian listrik RL. Lihat gambar 3.6



Gambar 3.6: Rangkaian listrik, sumber referensi no. [3] hal. 30.

Selesaikan persamaan diferensial biasa (ODE) untuk arus I(t) dengan satuan A (Ampere), dimana t adalah waktu. Dan gambarkan grafik fungsi I(t).

Dimisalkan rangkaian berisi EMF (*electromotive force*) E(t) sebuah baterai E = 48 V (Volt), besarnya konstan, sebuah resistor R = 11 Ω (Ohm) dan induktor L = 0,1 H (Henry), dan arus pada awalnya nol.

Hukum fisika yang digunakan

Arus I pada rangkaian menyebabkan suatu voltage drop RI melewati resistor (Hukum Ohm) dan $LI' = L\frac{dI}{dt}$ melewati induktor. Jumlah kedua voltage drop sama dengan EMF (*Kirchoff Voltage Law, KVL*).

Menurut hukum-hukum diatas model dari rangkaian RL adalah

$$LI' + RI = E(t) \quad \text{atau} \quad I' + \frac{R}{L}I = \frac{E(t)}{L}$$

$$y' + p(x)y = r(x)$$

Persamaan diferensial biasa non homogen solusinya adalah

$$y(x) = e^{-h}\left(\int e^{h} r\,dx + c\right) \quad \text{dengan} \quad h = \int_0^t p(t)dt$$

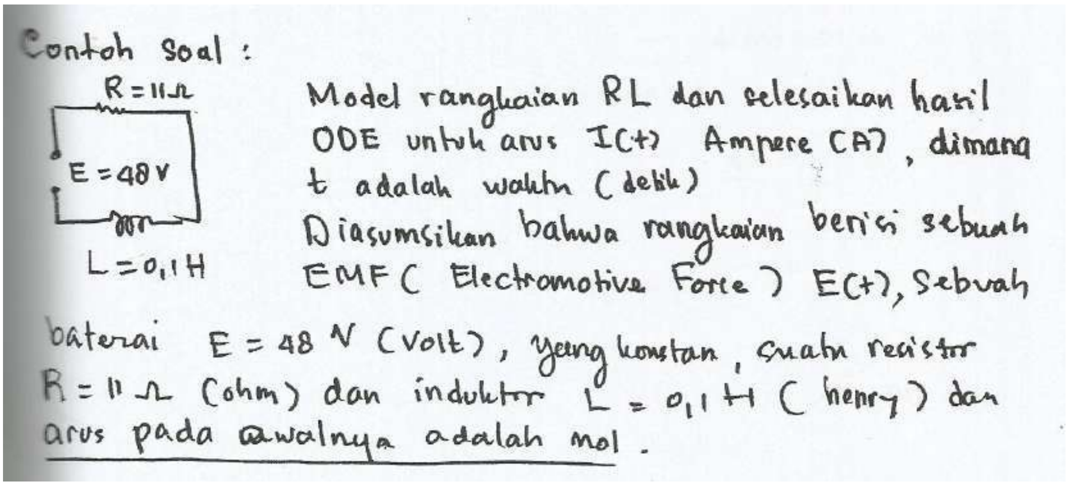
$$x = t \qquad y = I \qquad \frac{R}{L} = p \qquad r = \frac{E(t)}{L}$$

$$h = (\frac{R}{L})t = \int \frac{R}{L}dt = \frac{R}{L}t$$

Solusi umumnya adalah

$$
\begin{aligned}
I(t) &= e^{-\frac{R}{L}t}\left(\int e^{\frac{R}{L}t}\frac{E(t)}{L}dt + c\right) \\
E(t) &= E = konstan \\
I(t) &= e^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{E}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}dt + c\right) \\
&= e^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{E}{L}.\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t} + c\right) \\
&= \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}e^{\frac{R}{L}t} + ce^{-\frac{R}{L}t} \\
&= \frac{E}{R} + ce^{-\frac{R}{L}t}
\end{aligned}
$$

Hitung persamaan diferensial I(t) dan gambarkan grafiknya



Contoh Soal :

Model rangkaian RL dan selesaikan hasil ODE untuk arus I(t) Ampere (A), dimana t adalah waktu (detik)
Diasumsikan bahwa rangkaian berisi sebuah EMF (Electromotive Force) E(t), sebuah baterai E = 48 V (volt), yang konstan, suatu resistor R = 11 Ω (ohm) dan induktor L = 0,1 H (henry) dan arus pada awalnya adalah nol.

3.3 Persamaan diferensial homogen orde 2

(*Second order homogenous ODE*)

Model dari sistem massa - pegas :

Hukum Hooke $F_1 = -ky$ gaya pemulihan (*restoring force*), arah negatif adalah keatas.

Gerakan dari sistem dinyatakan dengan Hukum Newton II

$$\sum \text{ gaya = massa x percepatan}$$

$$\sum F = m.a = my''$$

$$-ky = my''$$

$$my'' + ky = 0 \quad \text{...Persamaan diferensial homogen}$$

Hukum Fisika: arus I pada rangkaian menyebabkan suatu voltage drop IR pada resistor dan LI' pada induktor dan jumlah semuanya sama dg EMF

Solusi: Pers. matematis rangkaian diatas

$$LI' + RI = E(t) \quad \text{atau} \quad I' + \frac{R}{L} I = \frac{E(t)}{L} \ldots$$

... disebut :

ODE non homogen orde I

Bentuk umum $Y' + p(x) Y = r(x)$

Kesamaan dg sistem diatas :

$$x = t, \quad y = I, \quad p = \frac{R}{L}$$

$$h = \int p\,dx = \frac{R}{L} \int dt = \frac{R}{L} t$$

$$\text{Solusi umum} = e^{-h} \left[\int e^{h} r\,dx + C \right] \text{ dg } h = \int p(x)\,dx$$

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \left[\int e^{\frac{R}{L}t} \frac{E(t)}{L} dt + C \right]$$

$$= e^{-\frac{R}{L}t} \left(\frac{E}{L} \cdot \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} + C \right) = \frac{E}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

harga - harga :

$$\frac{R}{L} = \frac{11}{0{,}1} = 110 \qquad \frac{E(t)}{R} = \frac{E}{R} = \frac{48}{0{,}1} = 480 .$$

$$\rightarrow I = \frac{480}{110} + C e^{-110t}$$

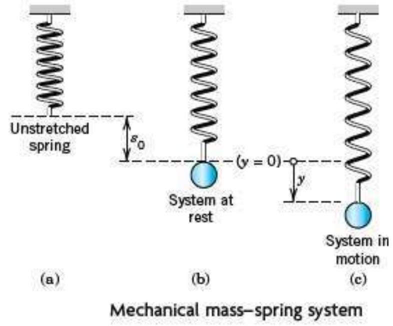
Kondisi awal $t = 0$ $I = 0$ $\rightarrow$ dimasukkan ke pers. diatas untuk mendapatkan harga I

$$I = \frac{48}{11} + C \cdot e^{-110 \cdot 0} = 0 \longrightarrow \frac{48}{11} + C \cdot 1 = 0$$

maka $C = -48/11$

$$I = \frac{48}{11} - \frac{48}{11} \cdot e^{-110t} = \frac{48}{11} (1 - e^{-110t})$$

(Digambar fungsi grafik $I = f(t)$ untuk mendapatkan respon arus thd waktu)



Gambar 3.7: Sistem massa pegas, sumber refrensi no. [3] hal. 62.

Solusi umum (misal untuk kasus under damping)

$$\begin{aligned}
y(t) &= A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \\
\omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}}
\end{aligned}$$

k = konstanta pegas

m = massa benda

$\rightarrow$ disebut osilator harmonik

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f \quad \rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{....frekuensi harmonik}$$

periode $T = \dfrac{1}{f} = 2\pi\sqrt{m}k$

$$\boxed{\begin{aligned}
y(t) &= A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \\
&\quad \text{atau} \\
y(t) &= C\cos(\omega_0 t - \delta) \\
\delta &= \tan^{-1}\tfrac{B}{A} \\
C &= \sqrt{A^2 + B^2}
\end{aligned}}$$

<u>Soal</u> :

Jika suatu sistem massa - pegas dari bola besi berat W = 98 N. Bola menarik pegas ini sepanjang 1,09 meter. Berapa frekuensi sistem ?. Bagaimana geraknya bila bola ditarik sepanjang 16 cm dengan kecepatan awal nol ?.

12

$10y'' + 90y = 0$

Sistem massa-pegas

$W = 98\ N$, $Y = 1{,}09\ m$ } Gaya Hooke $F = kY$ k = Konstanta pegas, Y = simpangan

$$k = \frac{F}{Y} = \frac{98\ N}{1{,}09\ m}$$

$$= 90\ \frac{kg\ m}{det^2} \cdot \frac{1}{m} = 90\ \frac{kg}{det^2}$$

$$= 90\ \frac{N}{m}$$

massa bola besi $W = mg \rightarrow m = \frac{W}{g} = \frac{98\ N}{9{,}8\ m/s^2} = 10\ kg$.

g = percepatan gravitasi $= 9{,}8\ \frac{m}{s^2}$

f = frekuensi $= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{90\ N/m}{10\ kg}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{9\ \frac{kg\ m}{det^2\ m}/kg}$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9}{det^2}} = \frac{1}{2\pi}\ \frac{3}{det} = \frac{3}{2\pi}\ hz = 0{,}48\ hz$$

$10y'' + 90y = 0 \rightarrow y'' + 9y = 0 \longrightarrow det = b^2 - 4ac = 0 - 4 \cdot 9 = -36.$

Solusi persamaan $Y = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

syarat batas } $t = 0 \rightarrow Y = 16\ cm = 0{,}16\ m$, $Y' = 0\ m/det$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot \frac{3}{2\pi} = 3\ rad/det$$

$Y = A\cos 3t + B\sin 3t$

$t = 0$, $Y = 0{,}16\ m \longrightarrow 0{,}16\ m = A\cos 3.0 + B\sin 3.0 = A$

$A = 0{,}16\ m$

$my'' + cy' + ky = 0$

$\boxed{y(t) = e^{-\alpha t}(A\cos\omega t + B\sin \ldots}$

$y'' + 9y = 0$ $a = 1$ $b = 0$ $c = 9$

$\omega = \frac{1}{2 \cdot 1}\sqrt{4 \cdot 1 \cdot 9 - 0}$

$= 3$ rad/det

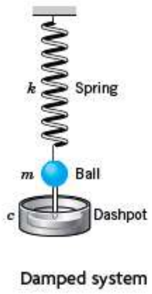
$\alpha = \frac{c}{2m} = \frac{0}{2 \cdot 1} = 0$.

$Y = 0{,}16\cos 3t + B\sin 3t$

$$\frac{dY}{dt} = -0{,}16 \cdot 3\sin 3t + 3B\cos 3t$$

$0 = -0{,}16 \cdot 3\sin 3.0 + 3B\cos 3.0 \rightarrow B = 0$.

0,16 Y



Gambar 3.8: Sistem massa pegas teredam, sumber referensi no. [3] hal. 64.

Sistem teredam (damped sistem)

Hukum Newton II

$$
\begin{aligned}
\sum F &= ma \\
F_1 + F_2 &= ma \\
-ky - cy' &= my'' \\
& my'' + cy' + ky = 0 \\
y' &= \frac{dy}{dt} = v \\
& c = \text{konstanta peredaman}/\textit{damping constant}
\end{aligned}
$$

Penyelesaiannya dengan persamaan karakteristik

$$
\begin{aligned}
m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \\
\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0
\end{aligned}
$$

dengan rumus abc didapat

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\alpha + \beta, \lambda_2 = -\alpha - \beta \\
\text{dimana} \quad \alpha &= \frac{c}{2m} \quad \beta = \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4mk}
\end{aligned}
$$

$$
c^2 - 4mk \quad \text{disebut determinan}
$$

Ada 3 kemungkinan yang muncul

1. determinan positip : $c^2 > 4mk$ $\rightarrow$ akar-akar real λ_1 dan λ_2 (*overdamping*)

   solusi $y(t) = c_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + c_2 e^{-(\alpha+\beta)t} = c_1 e^{\lambda_1} + c_2 e^{\lambda_2}$

2. determinan nol : $c^2 = 4mk$ $\rightarrow$ 2 akar real yang sama λ (*critically damping*)

   solusi $y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\alpha t}$

3. determinan negatip : $c^2 < 4mk$ $\rightarrow$ akar-akar komplek konjugate λ_1 dan λ_2 (*underdamping*)

   $\beta = i\omega^*$

   $\omega^* = \frac{1}{2m}\sqrt{4mk - c^2}$

   $\lambda_1 = -\alpha + i\omega^*$ $\quad \lambda_2 = -\alpha - i\omega^*$ $\quad \alpha = \frac{c}{2m}$

   Solusi :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y(t) & = & e^{-\alpha t}(A\cos\omega^* t + B\sin\omega^* t) \\ & & \text{atau} \\ y(t) & = & Ce^{-\alpha t}\cos(\omega^* t - \delta) \\ \delta & = & \tan^{-1}\frac{B}{A} \\ C & = & \sqrt{A^2 + B^2} \end{array}}$$

3.4 Persamaan diferensial non homogen orde 2

(*Second order non homogenous ODE*)

Bentuk umum $y'' + p(x)y' + Q(x)y = r(x)$

solusi $y = y_h + y_p$

y_h adalah solusi umum (*general solution*)

y_p adalah solusi khusus (*particular solution*)

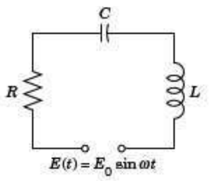
1. Solusi umum adalah solusi ODE non homogen ($r(x) = 0$), kemudian dihitung determinannya sehingga diketahui solusinya (*overdamping, critically damping* atau *under damping*)

2. Sedangkan solusi khusus y_p dapat dilihat pada gambar 3.9 dibawah

Table 2.1 Method of Undetermined Coefficients

Term in $r(x)$	Choice for $y_p(x)$
$ke^{\gamma x}$	$Ce^{\gamma x}$
$kx^n \ (n = 0, 1, \cdots)$	$K_n x^n + K_{n-1}x^{n-1} + \cdots + K_1 x + K_0$
$k\cos\omega x$	$K\cos\omega x + M\sin\omega x$
$k\sin\omega x$	
$ke^{\alpha x}\cos\omega x$	$e^{\alpha x}(K\cos\omega x + M\sin\omega x)$
$ke^{\alpha x}\sin\omega x$	

Gambar 3.9: Tabel solusi khusus, sumber referensi no. [3]



RLC-circuit

Name	Symbol		Notation	Unit	Voltage Drop
Ohm's Resistor	—/\/\/\/—	R	Ohm's Resistance	ohms (Ω)	RI
Inductor	—ᘓᘓᘓ—	L	Inductance	henrys (H)	$L \frac{dI}{dt}$
Capacitor	—||—	C	Capacitance	farads (F)	Q/C

Elements in an *RLC*-circuit

Gambar 3.10: Rangkaian listrik R,L,C; sumber referensi no. [3] hal. 93.

Rangkaian listrik

Lihat gambar 3.10. Persamaan matematikanya seperti persamaan diferensial yang lalu (tanpa kapasitor) $LI' + RI = E(t)$, ditambah dengan voltage drop $\frac{Q}{C}$ yang melewati kapasitor, C dalam F (Farad) adalah kapasitansi kapasitor, Q dalam C (Coulomb) adalah muatan kapasitor. $I(t) = \frac{dQ}{dt}$.

Persamaan matematika rangkaian diatas

$$\begin{aligned}
LI' + RI + \frac{Q}{C} &= E(t) = E_0 \sin \omega t \\
L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} &= E(t) = E_0 \sin \omega t \\
& \quad \text{dideferensialkan terhadap t} \\
L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} &= \frac{dE(t)}{dt} \\
L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I &= E_0\omega \cos \omega t \\
LI'' + RI' + \frac{1}{C}I &= E_0\omega \cos \omega t \text{.....ODE non homogen orde 2}
\end{aligned}$$

<u>Solusi umum</u>

Persamaan homogen $LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = 0$

Persamaan karakteristik $L\alpha^2 + R\alpha + \frac{1}{C} = 0$ atau $\alpha^2 + \frac{R}{L}\alpha + \frac{1}{LC} = 0$

Rumus abc

$$\begin{aligned}
\alpha_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}}{2} \\
\alpha_1 &= \frac{1}{2L}\big(-R + \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}\big) \\
\alpha_2 &= \frac{1}{2L}\big(-R - \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}\big) \\
& \text{jadi} \\
I_h &= c_1 e^{\frac{1}{RL}(-R+\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}})t} + c_2 e^{\frac{1}{RL}(-R-\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}})t}
\end{aligned}$$

adalah solusi umum. Solusi khusus $\rightarrow$ lihat tabel pada gambar 3.9

Persamaan $LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E_0 \cos \omega t$

$$\boxed{r(x) = k \cos \omega x \quad \rightarrow \quad y_p(x) = K \cos \omega x + M \sin \omega x}$$

$$\begin{aligned}
I_p &= a\cos\omega t + b\sin\omega t \\
I'_p &= \frac{dI_p}{dt} = \omega(-a\sin\omega t + b\cos\omega t) \\
I''_p &= \frac{d^2I_p}{dt^2} = \omega^2(-a\cos\omega t - b\sin\omega t) \\
&\text{substitusi ke persamaan} \\
&LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E_0\cos\omega t \\
&L\omega^2(-a\cos\omega t - b\sin\omega t) + R\omega(-a\sin\omega t + b\cos\omega t) + \frac{1}{C}(\cos\omega t + b\sin\omega t) = E_0\omega\cos\omega t \\
&[L\omega^2(-a) + R\omega b + \frac{a}{C}]\cos\omega t + [L\omega^2(-b) + R\omega(-a) + \frac{b}{C}]\sin\omega t = E_0\omega\cos\omega t
\end{aligned}$$

Untuk mencari harga koefisien a dan b

bagian cosinus :

$$\begin{aligned}
L\omega^2(-a) + R\omega b + \frac{a}{C} &= E_0\omega \\
L\omega(-a) + Rb + \frac{a}{\omega C} &= E_0 \\
-a(\omega L - \frac{1}{\omega C}) + Rb &= E_0 \\
-as + Rb &= E_0 ......(1) \\
s &= \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad \text{Reaktansi} \\
X_L &= \omega L \quad \text{Reaktansi induktif} \\
X_C &= \frac{1}{\omega C} \quad \text{Reaktansi kapasitif} \\
R &= \quad \text{Resistansi}
\end{aligned}$$

bagian sinus :

$$\begin{aligned}
L\omega^2(-b) + \omega R(-a) + \frac{b}{C} &= 0 \\
L\omega(-b) + R(-a) + \frac{b}{\omega C} &= 0 \\
-b\big(\omega L - \frac{1}{\omega C}\big) - Ra &= 0 \\
-bs - Ra &= 0.......(2)
\end{aligned}$$

dari

1. $-sa + Rb = E_0$

2. $-Ra - sb = 0$

didapat

$$\begin{aligned} a &= -\frac{E_0 s}{R^2+s^2} \quad \text{dan} \quad b = \frac{E_0 R}{R^2+s^2} \\ Z &= \sqrt{R^2+s^2} \quad \text{disebut impedansi} \\ &= \text{tahanan total arus bolak balik} \end{aligned}$$

Solusi partikular:

$$\begin{aligned} I_p &= a\cos\omega t + b\sin\omega t \\ &= -\frac{E_0 s}{R^2+s^2}\cos\omega t + \frac{E_0 R}{R^2+s^2}\sin\omega t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= I_h + I_p \\ &= \underbrace{c_1 e^{\frac{1}{RL}(-R+\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}})t} + c_2 e^{\frac{1}{RL}(-R-\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}})t}}_{I_h} + \underbrace{-\frac{E_0 s}{R^2+s^2}\cos\omega t + \frac{E_0 R}{R^2+s^2}\sin\omega t}_{I_p} \end{aligned}$$

Soal :

Dapatkan persamaan arus I(t) pada suatu rangkaian RLC.

gambar 3.10 ; R = 11 Ω, L = 0,1 Henry (H), C = 10^{-2} Farad (F),

f = 60 Herz (Hz), E(t) = 110 $\sin\omega$t, ω = 2πf,

Syarat batas ketika t = 0, arus (I) dan muatan (Q) sama dengan nol.

Osilasi paksa (*forced osillations*)

Lihat gambar 3.11

bentuk persamaan menjadi $my'' + cy' + ky = r(t), r(t)$ adalah *driving force* = gaya luar yang mempengaruhi sistem

$r(t) = F_0\cos\omega t$ dan $(F_0 > 0, \omega > 0)$.

Maka persamaan menjadi PD non homogen:

$my'' + cy' + ky = F_0\cos\omega t$.

Dengan solusi $y = y_h + y_p$, y_h adalah *general solution* dan y_p adalah *particular solution*.

$$y_p(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

dideferensialkan (*chain rule*)

$$\begin{aligned} y_p' &= -\omega a\sin\omega t + \omega b\cos\omega t \\ y_p'' &= -\omega^2 a\cos\omega t - \omega^2 b\sin\omega t \end{aligned}$$

disubstitusi ke persamaan $\quad my'' + cy' + ky = F_0\cos\omega t$

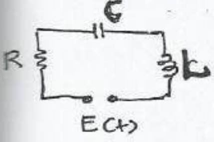
dikumpulkan bentuk sinus dan cosinus didapatkan :

$$[(k-m\omega^2)a + \omega cb]\cos\omega t + [-\omega ca + (k-m\omega^2)b]\sin\omega t = F_0\cos\omega t$$

Kreyszig hal 93.

Persamaan diferensial non homogen orde 2

Dapatkan pers. arus $I(t)$ pada suatu rangkaian RLC



$R = 11\,\Omega$
$L = 0{,}1\,H$
$C = 10^{-2}\,F$

$f = 60\ hz$
$\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 60 = 377$

$E(t) = 110 \sin \omega t$
$= 110 \sin 377\, t$

Syarat batas ketika $t = 0 \rightarrow$ arus (I) dan muatan $(Q) = 0$

Solusi : Persamaan umum $L I'' + R I' + \frac{I}{C} = E'(t)$

$$0{,}1\, I'' + 11\, I' + 10^2\, I = 110 \cdot 377 \cos 377\, t$$

Solusi umum : Pers. homogen $0{,}1\, I'' + 11\, I' + 10^2 I = 0$

Pers. karakteristik $0{,}1\, \lambda^2 + 11\, \lambda + 100 = 0$

diskriminan : $11^2 - 4 \cdot 0{,}1 \cdot 100$
$= 121 - 40$
$= 81\ 70$

$$\lambda^2 + 110\lambda + 1000 = 0$$
$$(\lambda + 100)(\lambda + 10) = 0$$
$$\lambda_1 = -100 \qquad \lambda_2 = -10$$

Jadi solusi umum $I_h = c_1 e^{+\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$
$= c_1 e^{-10t} + c_2 e^{-100t}$

Solusi khusus : $I_p(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$
$= a \cos 377 t + b \sin 377 t$

$$S = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 377 \cdot 0{,}1 - \frac{1}{377 \cdot 10^{-2}} = 37{,}4$$

$$a = -\frac{E_0 S}{R^2 + S^2} = -\frac{110 \cdot 37{,}4}{11^2 + 37{,}4} = -2{,}71$$

$$b = \frac{E_0 R}{R^2 + S^2} = \frac{100 \cdot 11}{11^2 + 37{,}4^2} = 0{,}796$$

$e^0 = 1$

Solusi : $I = I_h + I_p$

$$I = c_1 e^{-10t} + c_2 e^{-100t} - 2{,}71 \cos 377t + 0{,}796 \sin 377t$$

Koefisien c_1 dan c_2 dicari dari syarat batas

$t = 0 \longrightarrow Q$ dan $I = 0$

$$t=0,\ I=0 \longrightarrow I = c_1 e^{-0} + c_2 e^{-0} - 2{,}71 \cos 0 + 0{,}796 \sin 0$$
$$0 = c_1 + c_2 - 2{,}71 \rightarrow c_2 = 2{,}71 - c_1$$

dari pers.

$$\left.\begin{array}{l} LI' + RI + \frac{Q}{C} = E_0 \sin \omega t \\ I = 0 \\ Q = 0 \end{array}\right\} \text{pd } t=0 \qquad \begin{array}{l} LI' + RI + \frac{Q}{C} = E_0 \sin \omega t \\ LI' + R.0 + \frac{0}{C} = E_0 \sin 0 \\ \boxed{I' = 0} \end{array}$$

$$I' = \frac{dI}{dt} = -10\, c_1 e^{-10t} - 100\, c_2 e^{-100t}$$
$$+ 2{,}71 \cdot 377 \sin 377t + 0{,}796 \cdot 377 \cos 377t$$

$t=0,\ I'=0$ $\quad$ **$+10c_1 + 100c_2 = 300$**

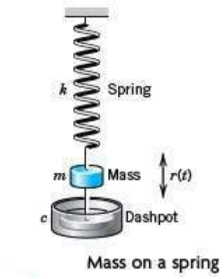
$$0 = -10\, c_1 e^0 - 100\, c_2 e^0 + 2{,}71 \cdot 377 \sin 0 + 0{,}796 \cdot 377 \cos 0$$

$$\left.\begin{array}{l} -10 c_1 - 100 c_2 + 0{,}796 \cdot 377 = 0 \\ c_2 = 2{,}71 - c_1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} c_1 = -0{,}323 \\ c_2 = 3{,}033 \end{array}$$

Solusi $\quad I(t) = -0{,}323\, e^{-10t} + 3{,}033\, e^{-100t}$

$$- 2{,}71 \cos 377t + 0{,}796 \sin 377t$$

$\rightarrow$ gambar : ...



Gambar 3.11: Osilasi paksa, sumber referensi no. [3] hal. 85.

dari dua persamaan

$$\begin{aligned}(k-m\omega^2)a+\omega cb &= F_0\\ -\omega ca+(k-m\omega^2)b &= 0\end{aligned}$$

maka didapatkan harga a dan b adalah

$$\begin{aligned}a &= F_0\frac{k-m\omega^2}{(k-m\omega^2)^2+\omega^2c^2}\\ b &= F_0\frac{\omega c}{(k-m\omega^2)^2+\omega^2c^2}\end{aligned}$$

jika

$$\sqrt{\frac{k}{m}}=\omega_0 \quad k=m\omega_0^2$$

maka harga a dan b menjadi

$$a = F_0\frac{m(\omega_0^2-\omega^2)}{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2c^2} \quad b=F_0\frac{\omega c}{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2c^2}$$

Analogi besaran mekanika dan listrik

1. Persamaan diferensial untuk rangkaian RLC

   $LI'' + RI' + \frac{I}{C} = E_0 \cos \omega t$

2. Persamaan diferensial untuk sistem massa pegas

   $my'' + cy' + ky = F_0 \cos \omega t$

Table 2.2 Analogy of Electrical and Mechanical Quantities

Electrical System	Mechanical System
Inductance L	Mass m
Resistance R	Damping constant c
Reciprocal $1/C$ of capacitance	Spring modulus k
Derivative $E_0\omega \cos \omega t$ of electromotive force	Driving force $F_0 \cos \omega t$
Current $I(t)$	Displacement $y(t)$

Gambar 3.12: Tabel analogi mekanik listrik, sumber referensi no. [3] hal. 97.

3.5 Persamaan Diferensial Parsial (*Partial Differential Equation / PDE*)

PDE meliputi penurunan sebagian (parsial) dari fungsi dengan variabel-variabel 2 atau lebih

Jika y adalah fungsi dari x → y=f(x), maka turunan y terhadap x adalah $\frac{dy}{dx}$ merupakan laju perubahan y terhadap x.
Jika z adalah fungsi dari x dan y → z=f(x,y), maka turunannya adalah $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}$ disebut diferensial parsial.
Jika diturunkan lagi

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, .. \quad \text{dst.}$$

Notasi yang biasa dipakai $z = f(x, y) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \equiv z_x \equiv f_x \equiv f_1$

Contoh

$$\begin{aligned}
z &= f(x, y) = x^3 y + e^{xy} \\
\frac{\partial f}{\partial x} &\equiv \frac{\partial z}{\partial x} \equiv f_x \equiv z_x \equiv f_1 = 3x^2 y + y e^{xy} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &\equiv \frac{\partial z}{\partial y} \equiv f_y \equiv z_y \equiv f_2 = x^3 + x e^{xy} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &\equiv \frac{\partial z}{\partial x \partial y} \equiv f_{xy} \equiv z_{xy} \equiv f_{12} = 3x^2 + e^{xy} + xy e^{xy} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &\equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv f_{xx} \equiv z_{xx} \equiv f_{11} = 6xy + y^2 e^{xy} \\
\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} &\equiv \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \equiv f_{yyy} \equiv z_{yyy} \equiv f_{222} = x^3 e^{xy} \\
\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} &\equiv \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \equiv f_{xxy} \equiv z_{xxy} \equiv f_{112} = 6x + 2y e^{xy} + xy^2 e^{xy}
\end{aligned}$$

Contoh pada termodinamika T=T(p,v,s,u) artinya temperatur fungsi tekanan, volume, entropy, dan energi dalam.

$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v$ turunan fungsi temperatur terhadap tekanan untuk volume konstan

$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s$ turunan fungsi temperatur terhadap volume untuk entropi konstan

$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_u$ turunan fungsi temperatur terhadap tekanan untuk energi dalam konstan

$\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p$ turunan fungsi temperatur terhadap entropi untuk tekanan konstan

3.5.1 Diferensial Total

diferensial total dari

$$\begin{aligned} z &= f(x,y) \quad \text{adalah} \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \end{aligned}$$

secara umum untuk fungsi

$$\begin{aligned} u &= f(x,y,z,...) \quad \text{maka diferensial totalnya adalah} \\ du &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + ... \end{aligned}$$

Contoh soal :

1. Dapatkan $\frac{dy}{dx}$ jika $y = \ln\ \sin 2x$

   jawab :

$$\begin{aligned} y &= \ln\ \sin 2x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(\ln\ \sin 2x) = \frac{1}{\sin 2x}\frac{d}{dx}\sin 2x \\ &= \frac{1}{\sin 2x}\cos 2x\frac{d2x}{dx} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x}\ 2 = 2\ \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2}{\tan 2x} \end{aligned}$$

   Bisa diselesaikan dengan *chain rule*

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}}$$

$$\begin{aligned} y &= \ln\ \sin 2x \\ y &= \ln u \\ \frac{dy}{du} &= \frac{1}{u} \\ u &= \sin v \\ \frac{du}{dv} &= \cos v \\ v &= 2x \\ \frac{dv}{dx} &= 2 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{u}\ \cos v\ 2 = \frac{1}{\sin 2x}\ \cos 2x\ 2 = \frac{2}{\tan 2x} \end{aligned}$$

2. Dapatkan $\frac{dz}{dt}$ jika $z = 2t^2\ \sin t$

   selesaikan dengan diferensiasi perkalian $(uv)' = u'v + v'u$ dan dengan diferensial total.

3. $z = x^y \quad x = \sin t \quad y = \tan^{-1} t$

   dapatkan $\frac{dz}{dt}$.

4. Diberikan $x + e^x = t$, dapatkan $\frac{dx}{dt}$ dan $\frac{d^2x}{dt^2}$ untuk x = 0 dan t = 1.

3.5.2 Persamaan Difusi / Persamaan Aliran Panas

(The Diffusion or Heat Flow Equation)

Referensi 6 halaman 550

Panas mengalir pada papan / lapisan / dinding (heat fow in bar or slab)

Persamaan aliran panas adalah

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

u adalah temperatur dan α adalah konstanta sifat material / bahan yang dialiri panas tsb, dan t adalah waktu.

$$\begin{aligned}
\nabla &= \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \\
\nabla^2 &= \nabla.\nabla = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
\nabla^2 u &= \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial t} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial t}
\end{aligned}$$

Diasumsikan solusi dari persamaan diatas adalah

$$u = F(x, y, z)T(t)$$

u adalah temperatur

F adalah faktor u yang tergantung posisi (x,y,z)

T adalah faktor u yang tergantung waktu (t)

Substitusi persamaan diatas ke persamaan awal, didapatkan

$$T\,\nabla^2 F = \frac{1}{\alpha^2}\,F\,\frac{dT}{dt}$$

dibagi dengan F T

$$\frac{1}{F}\nabla^2 F = \frac{1}{\alpha^2}\,\frac{1}{T}\,\frac{dT}{dt}$$

1

0,3 Persamaan Diferensial Parsial (PDE)

Contoh soal

2. Dapatkan $\frac{dz}{dt}$ jika $z = 2t^2 \sin t$
   Selesaikan dengan diferensiasi perkalian $(uv)' = u'v + v'u$ dan dengan diferensial total.

⊙ diferensiasi perkalian $(uv)' = u'v + v'u$

$$Z = \underbrace{2t^2}_{u} \underbrace{\sin t}_{v}$$

$$\frac{dz}{dt} = z' = (uv)' = u'v + v'u$$

$$= 4t \sin t + \cos t \cdot 2t^2$$

$$= \underline{4t \sin t + 2t^2 \cos t}$$

38 × 10 = 380
2 × 30 = 60
440

⊙ diferensial total $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dY$.

$$Z = \underbrace{2t^2}_{x} \underbrace{\sin t}_{Y}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad : dt$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$z = xY \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = Y \, , \, \frac{\partial z}{\partial Y} = x$$

11.10
150
11.160
1.40

$$\frac{dz}{dt} = Z' = (xY)' = Y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}.$$

$$= x'Y + Y'x \longrightarrow \text{bentuknya}$$

sama dg $(uv)' = u'v + v'u$

3. $z = x^y \quad x = \sin t \quad y = \tan^{-1} t$

dapatkan $\frac{dz}{dt}$.

Rumus diferensial total

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

$z = x^y \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = y x^{y-1} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \ldots$ (dicari dulu)

$z = x^y$ ln..

$\ln z = \ln x^y$ $e^{..}$

$e^{\ln z} = e^{\ln x^y}$

$\boxed{z = e^{y \ln x}}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{y \ln x} (\ln x)$$

$$= \ln x \; e^{\ln x^y}$$

$$= \ln x \, . \, x^y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$= y x^{y-1} dx + x^y \ln x \, dy$$

$x = \sin t \longrightarrow dx = \cos t \, dt$

$y = \tan^{-1} t \longrightarrow dy = \cancel{\frac{1}{1+x^2} dt} \rightarrow = \frac{1}{1+t^2} dt$

$$dz = y x^{y-1} \cos t \, dt + x^y \ln x \cancel{\frac{1}{1+x^2}} dt$$

$$\frac{dz}{dt} = y x^{y-1} \cos t \, . + x^y \frac{\ln x}{\cancel{1+x^2}}$$

$1+t^2$

dengan $x = \sin t$, $y = \tan^{-1} t$ $\rightarrow 1+t$.

$$\frac{dz}{dt} = \tan^{-1} t \left(\sin t^{(\tan^{-1} t)-1}\right) \cos t + (\sin t)^{\tan^{-1} t} \ln \sin t$$

4. Diberikan $x + e^x = t$ dapatkan $\frac{dx}{dt}$ dan $\frac{d^2x}{dt^2}$ untuk

$x = 0$

$t = 1 \longrightarrow$ Ralat !!

$$x + e^x = t$$

$$e^x \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$\longrightarrow$ diturunkan

$$dx + e^x\, dx = dt$$

: dt

$$\frac{dx}{dt} + e^x \frac{dx}{dt} = 1$$

$$(1 + e^x) \frac{dx}{dt} = 1 \longrightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1 + e^x}}$$

$\hookrightarrow$ diturunkan ke dt

$$\frac{d^2x}{dt^2} + e^x \frac{d^2x}{dt^2} + e^x \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = 0 \qquad \boxed{\underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v}}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + e^x \frac{d^2x}{dt^2} + e^x \left[\frac{dx}{dt}\right]^2 = 0$$

$$(1 + e^x) \frac{d^2x}{dt^2} + e^x \left[\frac{1}{1 + e^x}\right]^2 = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{e^x}{(1 + e^x)^3}$$

$x = 0,\ t = 1$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1 + e^x} = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{e^x}{(1 + e^x)^3} = -\frac{e^0}{(1 + e^0)^3} = -\frac{1}{(1+1)^3} = \frac{-1}{8}$$

Ruas kanan = ruas kiri = $-k^2$

Ruas kiri: $$\frac{1}{F}\nabla^2 F = -k^2$$

atau

$$\nabla^2 F + k^2\, F = 0$$

disebut persamaan Helmholtz

Ruas kanan: $$\frac{1}{\alpha^2}\,\frac{1}{T}\,\frac{dT}{dt} = -k^2$$
$$\frac{dT}{dt} = -k^2\,\alpha^2\,T$$

diintegrasikan

$$T = e^{-k^2\alpha^2 t}$$

<u>contoh :</u>

Aliran panas melalui dinding dengan ketebalan l (misal dinding lemari es). Diasumsikan permukaan sangat lebar sehingga efek adanya tepi diabaikan dan diasumsikan bahwa panas mengalir hanya pada arah x saja.

Dimisalkan lapisan dinding mempunyai distribusi temperatur steady state awal dengan x = 0 adalah 0^o dan pada x = l adalah 100^o.

Pada t = 0, dinding x = l (sama dengan dinding x = 0) ditetapkan pada 0^o. kemudian akan dicari persamaan temperatur pada setiap x (pada dinding) pada setiap waktu selanjutnya. Temperatur steady state awal u_0 memenuhi persamaan Laplace

$$\nabla^2 u_0 = 0$$
$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = 0$$

untuk satu dimensi

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0$$

Solusi untuk persamaan ini adalah u_0 = ax + b, dimana a dan b adalah konstanta yang didapatkan dari kondisi awal. Yaitu pada u_0 = 0 pada x = 0 dan u_0 = 100 pada x = l, maka didapat:

$$u_0 = \frac{100}{l}x$$

Dari t = 0, memenuhi persamaan Helmholtz satu dimensi

$$\frac{d^2F}{dx^2} + k^2 F = 0$$

Solusinya adalah F(x)=$\begin{cases} \sin(kx) \\ \cos(kx) \end{cases}$

Sedangkan u = F(x) T(t), dan $T = e^{-k^2\alpha^2 t}$, maka u = $\begin{cases} e^{-k^2\alpha^2 t} \ \sin(kx) \\ e^{-k^2\alpha^2 t} \ \cos(kx) \end{cases}$

Kita tidak memakai solusi yang cosinus dari permasalahan ini, karena u = 0 pada x = 0. Dan juga diinginkan u = 0 pada x = l, yang memenuhi adalah jika sin kl = 0, dimana kl = nπ, atau k=$\frac{n\pi}{l}$ (nilai2 eigen/ eigen values). Maka solusi-solusi dasarnya (atau eigenfunction) adalah

$$u = e^{-k^2\alpha^2 t} \ \sin(kx) = e^{-(\frac{n\pi\alpha}{l})^2 t} \ \sin\frac{n\pi x}{l}$$

Dan solusinya adalah sebuah deret

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ e^{-(\frac{n\pi\alpha}{l})^2 t} \ \sin\frac{n\pi x}{l}$$

pada t = 0, u = u_0, yaitu

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \sin\frac{n\pi x}{l} = u_0 = \frac{100}{l}x$$

Artinya mencari deret sinus Fourier untuk (100/l)x, pada (0,l); maka koefisiennya adalah:

$$b_n = \frac{100}{l}\frac{2l}{\pi}\frac{1}{n}(-1)^{n-1} = \frac{200}{\pi}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Dengan mensubstitusi ke persamaan di atas, didapat solusi akhir

$$u = \frac{200}{\pi}\left[e^{-(\frac{\pi\alpha}{l})^2 t}\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{1}{2}e^{-(\frac{2\pi\alpha}{l})^2 t}\sin\frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{3}e^{-(\frac{3\pi\alpha}{l})^2 t}\sin\frac{3\pi x}{l} + ...\right]$$

RANGKUMAN :

Sudah dipelajari tentang :

Persamaan Diferensial homogen dan non homogen orde 1 dan 2 dan cara penyelesaian secara pemisahan variabel maupun secara analitis, untuk sistem teredam dengan mengetahui nilai determinan maka dapat digolongkan 3 macam redaman yaitu :

1. *Under damping*
2. *Critically damping*
3. *over damping*

Serta pembelajaran PD parsial dan PD total serta cara penyelesaian serta aplikasi pada beberapa problem.

UJI CAPAIAN PEMBELAJARAN :

1. Dalam suatu tangki penyimpanan Bahan Bakar Minyak, fluida mengalir melalui suatu lubang pada dasarnya. Diameter tangki 5 meter, diameter lubang 2.5 centimeter, tinggi awal fluida 4 meter. Kapan tangki menjadi kosong ?

2. Kerjakan soal sistem massa pegas diatas tetapi ditambah dashpot dengan konstanta damping
   - c = 100 kg/s.
   - c = 60 kg/s.
   - c = 10 kg/s.

BAHAN DISKUSI :

- Bagaimana cara untuk mengetahui ketinggian fluida pada tangki penyimpanan BBM diatas untuk beberapa waktu yang berbeda ?
- Apakah arti fisis dari *under damping*, *critically damping*, *over damping* ?
- Jelaskan maksud resistor, kapasitor, induktor, impendansi, reaktansi kapasitif dan reaktansi induktif ?

Persamaan diferensial homogen orde 2

Kerjakan soal sistem massa pegas diatas tetapi ditambah dashpot dengan konstanta damping

1. $c = 100$ kg/s , $c = 60$ kg/s , dan $c = 10$ kg/s.

Jawab: Penting untuk melihat bagaimana sifat dari sisten berubah karena efek dari damping, yang mengambil energi dari sistem, sedemikian hingga mengurangi amplitudo.

(1) $m = 10$ kg , $k = 90 \frac{N}{m^2}$, $c = 100 \frac{kg}{s}$

$$m Y'' + c Y' + k Y = 10 Y'' + 100 Y' + 90 Y = 0 \quad : 10$$

$$Y'' + 10 Y' + 9 Y = 0$$

Pers. Karakteristik $\lambda^2 + 10\lambda + 9 = 0$
$(\lambda + 9)(\lambda + 1) = 0 \rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -9$

Solusi umum

$$Y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{(over damping)}$$
$$= c_1 e^{-t} + c_2 e^{-9t}$$

Syarat batas untuk $t = 0 \rightarrow Y = 0{,}16$ m $Y' = 0 \frac{m}{s}$

$$Y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-9t}$$
$$0{,}16 = c_1 e^{-0} + c_2 e^{-0} \rightarrow c_1 + c_2 = 0{,}16 \quad \cdots (1)$$

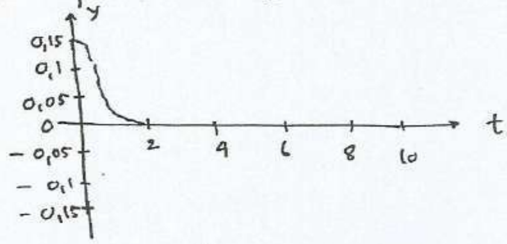
$$Y' = \frac{dY}{dt} = -c_1 e^{-t} - 9 c_2 e^{-9t}$$
$$0 = -c_1 e^{-0} - 9 c_2 e^{0} \rightarrow c_1 + 9c_2 = 0 \quad \cdots (2)$$

$$\begin{aligned} (2)\quad c_1 + 9c_2 &= 0 \\ (1)\quad c_1 + c_2 &= 0{,}16 \\ \hline 8c_2 &= -0{,}16 \end{aligned} \quad -$$

$$c_2 = -\frac{0{,}16}{8} = -0{,}02$$
$$c_1 + c_2 = 0{,}16$$
$$c_1 - 0{,}02 = 0{,}16 \rightarrow c_1 = 0{,}18$$

Solusi $Y = 0{,}18\, e^{-t} - 0{,}02\, e^{-9t}$ (overdamping)

gambar ref. 3 hal 68



(2) $c = 60\ \frac{kg}{s}$, Persamaan menjadi:

determinan $b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 9$
$= 36 - 36 = 0$
– critically damping

$10Y'' + 60Y' + 90Y = 0$
$\overline{\qquad\qquad} : 10$

$Y'' + 6Y' + 9 = 0 \rightarrow$ Pers. karakteristik
$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$

$(\lambda + 3)^2 = 0 \longrightarrow$ akar karakteristik $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$
(critically damping)

Solusi $Y = (c_1 + c_2 t)\, e^{\lambda t}$
$= (c_1 + c_2 t)\, e^{-3t} = c_1 e^{-3t} + c_2\, t e^{-3t}$.

$t = 0 \rightarrow Y = 0{,}16 \qquad 0{,}16 = c_1\, e^{-3.0} + c_2 . 0 . e^{-3.0}$
$c_1 = 0{,}16$.

$Y' = \frac{dY}{dt} = -3c_1 e^{-3t} + c_2 (e^{-3t} - 3te^{-3t})$
$= (-3c_1 + c_2 - 3t\, c_2)\, e^{-3t}$

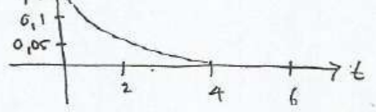
$t = 0 \rightarrow Y' = 0$ $\qquad (UV)' = U'V + V'$

$0 = (-3c_1 + c_2 - 3.0.c_2)\, e^{-3.0}$

$= -3c_1 + c_2 = 0 \quad \big\} \quad -3 . 0{,}16 + c_2 = 0$
$c_1 = 0{,}16 \qquad\qquad c_2 = 0{,}48$

$Y = (0{,}16 + 0{,}48t)\, e^{-3t}$

gambar ref. 3 hal 68



$c = 10 \ \frac{kg}{s}$ 15

(5) $10y'' + 10y' + 90y = 0$

$y'' + y' + 9y = 0 \longrightarrow$ cek determin

$r_{12} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$

$= -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-36} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{-35}{4}}$ $= -\alpha \pm \beta = -\alpha \pm i\omega$

$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{35}{4}}\, i = -0{,}5 \pm 2{,}96 i = -\alpha \pm i\omega^*$

(underdamping) $\alpha = 0{,}5$ $\omega^* = 2{,}96$

Solusi

$y = e^{-\alpha t} (A \cos \omega^* t + B \sin \omega^* t)$

$= e^{-0{,}5t} (A \cos 2{,}96t + B \sin 2{,}96t)$

$t = 0 \rightarrow y = 0{,}16$

$0{,}16 = \underbrace{e^{-0{,}5 \cdot 0}}_{=1} (A \cdot \cos 0 + B \sin 0) \rightarrow A = 0{,}16$

$y' = \dfrac{dy}{dt} = -0{,}5e^{-0{,}5t} (A \cos 2{,}96t + B \sin 2{,}96t)$

$+ e^{-0{,}5t} (-2{,}96 A \sin 2{,}96t + 2{,}96 B \cos 2{,}96t)$

$t = 0 \rightarrow y' = 0$ $\quad 80 \quad 64 - 80 \quad 16$

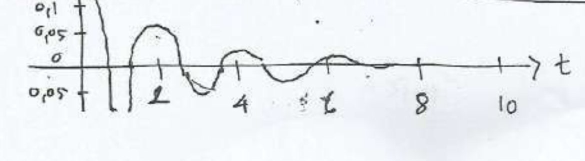
$0 = -0{,}5e^0 (A \cos 0 + B \sin 0)$

$+ e^0 (-2{,}96 A \sin 0 + 2{,}96 B \cos 0)$

$0 = -0{,}5 A + 2{,}96 B$

$0 = -0{,}5 \cdot 0{,}16 + 2{,}96 B \rightarrow B = \dfrac{0{,}5 \cdot 0{,}16}{2{,}96} = 0{,}03$

$\boxed{\text{Solusi} \quad y = e^{-0{,}5t} (0{,}16 \cos 2{,}96t + 0{,}03 \sin 2{,}96t)}$



3. THE DIFFUSION OR HEAT FLOW EQUATION; HEAT FLOW IN A BAR OR SLAB

The heat flow equation is

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{3.1}$$

where u is the temperature and α^2 is a constant characteristic of the material [illegible] which the heat is flowing. It is worth while to do first a partial separation of (3.1) [illegible] a space equation and a time equation; the space equation in more than one dimension then must be further separated into ordinary differential equations in x and y, [illegible] and z, or r, θ, ϕ, etc. We assume a solution of (3.1) of the form

$$u = F(x, y, z)T(t). \tag{3.2}$$

(Note the change in meaning of T; we have previously used it for temperature, [illegible] is temperature and T is the time-dependent factor in u.) Substitute (3.2) into (3.1) [illegible] get

$$T\nabla^2 F = \frac{1}{\alpha^2} F \frac{dT}{dt}. \tag{3.3}$$

THE DIFFUSION OR HEAT FLOW EQUATION 551

[illegible] divide (3.3) by FT to get

$$\frac{1}{F}\nabla^2 F = \frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}.$$

[illegible] side of this identity is a function only of the space variables x, y, z, and the [illegible] side is a function only of time. Therefore both sides are the same constant and we [illegible]

$$\frac{1}{F}\nabla^2 F = -k^2 \quad \text{or} \quad \nabla^2 F + k^2 F = 0 \quad \text{and}$$

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = -k^2 \quad \text{or} \quad \frac{dT}{dt} = -k^2\alpha^2 T.$$

[illegible] equation can be integrated to give

$$T = e^{-k^2\alpha^2 t}.$$

[illegible] see a physical reason here for choosing the separation constant $(-k^2)$ to be [illegible] As t increases, the temperature of a body might decrease to zero as in (3.6), [illegible] could not increase to infinity as it would if we had used $+k^2$ in (3.5) and (3.6). [illegible] equation in (3.5) is the Helmholtz equation (1.5) as promised. You will find [illegible] 10) that the space part of the wave equation is also the Helmholtz equation.

[illegible] now consider the flow of heat through a slab of [illegible] l (for example, the wall of a refrigerator). We shall [illegible] that the faces of the slab are so large that we may [illegible] end effects and assume that heat flows only in the x [illegible] (Figure 3.1). This problem is then identical with the [illegible] of heat flow in a bar of length l with insulated sides, [illegible] in both cases the heat flow is just in the x direction. [illegible] the slab has initially a steady-state temperature dis- [illegible] with the $x = 0$ wall at 0° and the $x = l$ wall at 100°. [illegible] $t = 0$ on, let the $x = l$ wall (as well as the $x = 0$ wall) be [illegible] 0°. We want to find the temperature at any x (in the [illegible]) at any later time.

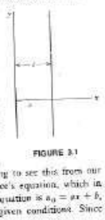


FIGURE 3.1

[illegible] we find the initial steady-state temperature distribution, [illegible] probably already know that this is linear, but it is interesting to see this from our [illegible] The initial steady-state temperature u_0 satisfies Laplace's equation, which in [illegible] one-dimensional case is $d^2u_0/dx^2 = 0$. The solution of this equation is $u_0 = ax + b$, [illegible] a and b are constants which must be found to fit the given conditions. Since [illegible] at $x = 0$ and $u_0 = 100$ at $x = l$, we have

$$u_0 = \frac{100}{l}x.$$

[illegible] $t = 0$ on, u satisfies the heat flow equation (3.1). We have already separated [illegible] solutions are (3.2) where $T(t)$ is given by (3.6) and $F(x)$ satisfies the first of [illegible] (3.5), namely

$$\nabla^2 F + k^2 F = 0 \quad \text{or} \quad \frac{d^2F}{dx^2} + k^2 F = 0.$$

(For this one-dimensional problem, F is a function only of x.) The solutions of (3.8) a

$$F(x) = \begin{cases} \sin kx, \\ \cos kx, \end{cases} \tag{3.9}$$

and the basic solutions (3.2) are

$$u = \begin{cases} e^{-k^2\alpha^2 t} \sin kx, \\ e^{-k^2\alpha^2 t} \cos kx. \end{cases} \tag{3.10}$$

We discard the cos kx solution for this problem because we are given $u = 0$ at x Also we want $u = 0$ at $x = l$; this will be true if $\sin kl = 0$, that is, $kl = n\pi$, or $k =$ (eigenvalues). Our basic solutions (or eigenfunctions) are then

$$u = e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{3.11}$$

and the solution of our problem will be the series

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{3.12}$$

At $t = 0$, we want $u = u_0$ as in (3.7), that is,

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} = u_0 = \frac{100}{l} x. \tag{3.13}$$

This means finding the Fourier sine series for $(100/l)x$ on $(0, l)$; the result Problem 1) for the coefficients is

$$b_n = \frac{100}{l} \frac{2l}{\pi} \frac{1}{n} (-1)^{n-1} = \frac{200}{\pi} \frac{(-1)^{n-1}}{n}. \tag{3.14}$$

Then we get the final solution by substituting (3.14) into (3.12); this gives

$$u = \frac{200}{\pi} \left[e^{-(\pi\alpha/l)^2 t} \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{2} e^{-(2\pi\alpha/l)^2 t} \sin \frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{3} e^{-(3\pi\alpha/l)^2 t} \sin \frac{3\pi x}{l} + \tag{3.15}$$

We can now do some variations of this problem. Suppose the final temper the faces are given as two different constant values different from zero. Then, initial steady state, the final steady state is a linear function of distance. T (3.12) tends to a final steady state of zero; to obtain a solution tending to final steady state, we add to (3.12) the linear function u_f representing the steady state. Thus we write instead of (3.12)

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l} + u_f. \tag{3.16}$$

for $t = 0$, the equation corresponding to (3.13) is

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} + u_f \tag{3.17}$$

$$u_0 - u_f = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{3.18}$$

when $u_f \neq 0$, it is $u_0 - u_f$ rather than u_0 which must be expanded in a Fourier

So far we have had the boundary temperatures given. We could, instead, have the insulated; then no heat flows in or out of the body. This will be true if the derivative $\partial u/\partial n$ (see Problem 2.14) of the temperature is zero at the boundary. the boundary values of u are given, the problem is called a *Dirichlet problem*; the boundary values of the normal derivative $\partial u/\partial n$ are given, the problem is a *Neumann problem*.) For the one-dimensional case we have considered, we the condition $u = 0$ at $x = 0$ and l by the condition $\partial u/\partial x = 0$ at $x = 0$ and l if are insulated. This means that the useful basic solution in (3.10) is now the containing $\cos kx$; note carefully that we must include the constant term corresponding to $k = 0$). See Problem 7.

PROBLEMS, SECTION 3

1. Verify the coefficients in equation (3.14).

2. A bar 10 cm long with insulated sides is initially at 100°. Starting at $t = 0$, the ends are held at 0°. Find the temperature distribution in the bar at time t.

   Answer. $u = \frac{400}{\pi} \sum_{\text{odd } n} \frac{1}{n} e^{-(n\pi\alpha/10)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{10}$.

3. In the initial steady state of an infinite slab of thickness l, the face $x = 0$ is at 0° and the face $x = l$ is at 100°. From $t = 0$ on, the $x = 0$ face is held at 100° and the $x = l$ face at 0°. Find the temperature distribution at time t.

   Answer. $u = 100 - \frac{200x}{l} - \frac{400}{\pi} \sum_{\text{even } n} \frac{1}{n} e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}$

4. At $t = 0$, two flat slabs each 5 cm thick, one at 0° and one at 20°, are stacked together, and the surfaces are kept at 0°. Find the temperature as a function of x and t for $t > 0$.

5. Two slabs, each 1 inch thick, each have one surface at 0° and the other surface at 100°. At $t = 0$, they are stacked with their 100° faces together and then the outside surfaces are held at 0°. Find $u(x, t)$ for $t > 0$.

6. Show that the following problem is easily solved using (3.15): The ends of a bar are initially at 20° and 150°; at $t = 0$ the 150° end is changed to 50°. Find the time-dependent temperature distribution.

7. A bar of length l with insulated sides has its ends also insulated from time $t = 0$ on. Initially the temperature is $u = x$, where x is the distance from one end. Determine the

$\mathcal{L}[3\cos 3t - 4\sin 3t]$

$3\,\mathcal{L}[\cos 3t] - 4\,\mathcal{L}[\sin 3t]$

$3\,\dfrac{s}{s^2+9} - 4\,\dfrac{3}{s^2+9} = \dfrac{3s-12}{s^2+9}$

Contoh 2 → C

untuk $F(s) = \dfrac{3s+2}{s^2+4}$, inversnya diberikan oleh :

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\,\dfrac{3s+2}{s^2+4} = 3\,\mathcal{L}^{-1}\,\dfrac{s}{s^2+4} + 2\,\mathcal{L}^{-1}\,\dfrac{1}{s^2+4}$

$= 3\cos 2t + 2\,\tfrac{1}{2}\sin 2t$

$f(t) = 3\cos 2t + \sin 2t$

6. Hint: Find $u_0 - u_f$ and compare with u_0 in text (3.13).

7. When the ends of the bar are insulated, we want $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ at the ends. We use from text (3.10) the basic solution containing $\cos kx$ since then $\frac{\partial}{\partial x}(\cos kx) = -k\sin kx$ is zero at $x = 0$ and, with $k = n\pi/\ell$, it is also zero at $x = \ell$. When $k = 0$, text (3.8) is $F'' = 0$, so the $k = 0$ solutions are x and const. Since $\partial u/\partial x = 0$ at the ends, we use only the constant which is already contained in $\cos kx$ with $k = 0$. Thus the temperature distribution in the bar is given by

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-(n\pi\alpha/\ell)^2 t}\cos\frac{n\pi x}{\ell}.$$

We are given $u(x,0) = x$ so the a_n's are determined by

$$u(x,0) = x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell}.$$

This says to expand x on $(0,\ell)$ in a Fourier cosine series. We find

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} x\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{\ell}\left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^2\left(\cos\frac{n\pi x}{\ell} + \frac{n\pi x}{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)\Big|_0^{\ell}$$

$$= \frac{2\ell}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0, & \text{even } n \neq 0, \\ -\dfrac{4\ell}{n^2\pi^2}, & \text{odd } n. \end{cases}$$

The constant term is called a_0 in the series above instead of $a_0/2$ as in Chapter 7 of the text; then the integral for a_0 from text Chapter 7 must here be divided by 2 (or else simply derive it using orthogonality as discussed in text Chapter 12). We find

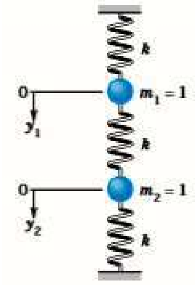
$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} x\,dx = \frac{1}{\ell}\frac{\ell^2}{2} = \frac{\ell}{2}.$$

Thus

$$u(x,t) = \frac{\ell}{2} - \frac{4\ell}{\pi^2}\sum_{\text{odd } n}\frac{1}{n^2}e^{-(\alpha\pi n/\ell)^2 t}\cos\frac{n\pi x}{\ell}.$$

Bab 4

Tambahan



Kreyszic Page 245

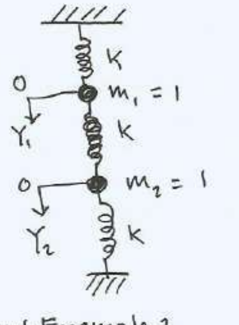


Fig. 146 Example 3

Sistem ODE orde tinggi dapat diselesaikan dengan metode Transformasi Laplace secara sederhana. Sebagai suatu aplikasi yang penting, contoh dari ~~beberapa~~ sistem mechanik . .

~~Example~~ Contoh 3 Model dari 2 masa pada bbp pegas (Gambar 146).

Sistem mekanik pd gambar 146 terdiri dari 2 benda yg sama konstanta pegasnya k & masanya 1 pd 3 pegas yg sama konstanta pegasnya k & masa dari pegas diabaikan. Juga redaman diasumsikan nol. Maka model dari sistem fisis adalah ~~dari sistem~~ ODE

$$Y_1'' = -kY_1 + k(Y_2 - Y_1) \qquad (3)$$
$$Y_2'' = -k(Y_2 - Y_1) - kY_2$$

Disini Y_1 dan Y_2 adalah perpindahan ~~dari~~ benda dari posisinya pd kesetimbangan statis. ODE ini diturunkan dari Hukum kedua Newton, masa × percepatan = gaya, spt pd bag 2.4 untuk satu benda tunggal. Dengan perjanjian ~~arah ketas~~ gaya dg arah kebawah positif dan keatas negatif. Pada benda yg diatas $-kY_1$ adl dari pegas atas dan $k(Y_2 - Y_1)$ dari pegas yg ditengah, $Y_2 - Y_1$ adalah selisih panjang ~~gaya~~ pegas. Pada benda yg bawah, $-k(Y_2 - Y_1)$ adalah gaya ~~pada~~ karena pegas ditengah dan $-kY_2$ adalah karena pegas bawah

Kondisi awal $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 1$

$$y_1'(0) = \sqrt{3k} \quad y_2'(0) = -\sqrt{3k}$$

misalkan $Y_1 = \mathcal{L}(y_1)$, dan $Y_2 = \mathcal{L}(y_2)$.

Transformasi Laplace dari model matematis.

$$\begin{cases} s^2 Y_1(s) - s\overset{=1}{Y_1(0)} - \overset{=\sqrt{3k}}{Y_1'(0)} = -k Y_1(s) + k\left(Y_2(s) - Y_1(s)\right) \\ s^2 Y_2(s) - s\overset{=1}{Y_2(0)} - \overset{=-\sqrt{3k}}{Y_2'(0)} = -k\left(Y_2(s) - Y_1(s)\right) - kY_2(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^2 Y_1(s) - s - \sqrt{3k} = -k Y_1(s) + k\left(Y_2(s) - Y_1(s)\right) \\ s^2 Y_2(s) - s + \sqrt{3k} = -k\left(Y_2(s) - Y_1(s)\right) - k Y_2(s) \end{cases}$$

Sistem pers. aljabar linier ke $Y_1(s)$ dan $Y_2(s)$ yg didapat dilihat bisa ditulis:

$$(s^2 + 2k) Y_1(s) - k Y_2(s) = s + \sqrt{3k}$$

$$-k Y_1(s) + (s^2 + 2k) Y_2(s) = s - \sqrt{3k}.$$

Eliminasi (atau aturan Cramer pd sec. 7.7).

$$Y_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} s + \sqrt{3k} & -k \\ s - \sqrt{3k} & s^2 + 2k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2 + 2k & -k \\ -k & s^2 + 2k \end{vmatrix}} = \frac{(s+\sqrt{3k})(s^2+2k) + k(s-\sqrt{3k})}{(s^2+2k)^2 - k^2}.$$

~~penye~~ pembilang

$(s + \sqrt{3k})(s^2 + 2k) + k(s - \sqrt{3k})$.

$s^3 + 2ks + \sqrt{3k}\, s^2 + 2k\sqrt{3k} + ks - \sqrt{3k}\, k$.

$s^3 + (\sqrt{3k}\, s^2 + 3k\, s + k\sqrt{3k}$

$s^3 + s^2\sqrt{3k} + 3k\, s + \sqrt{3}\, k^{3/2}$

Penyebut.

$$(s^2+2k)^2-k^2$$

$$(s^2+2k)(s^2+2k)-k^2$$

$$s^4+2ks^2+2ks^2+4k^2-k^2$$

$$s^4+4ks^2+3k^2$$

$$(s^2+k)(s^2+3k).$$

$$\frac{s^3+s^2\sqrt{3k}+3ks+\sqrt{3}\,k^{3/2}}{(s^2+k)(s^2+3k)} = \frac{As+B}{s^2+k}+\frac{Cs+D}{s^2+3k},$$

$$=\frac{(As+B)(s^2+3k)+(Cs+D)(s^2+k)}{(s^2+k)(s^2+3k)}.$$

$$=\frac{(As^3+\cancel{3AKs}\;Bs^2+3AKs+3BK)+(Cs^3+Ds^2+CKs+DK)}{(s^2+k)(s^2+3k)}$$

$$s^3 \to 1 = A+C$$

$$s^2 \to \sqrt{3K} = B+D.$$

$$s \to 3K = 3Ak+CK \;\to\; 3 = 3A+C.$$

$$s^0 \to \sqrt{3}\,k^{3/2} = 3BK+DK.$$

$$A+C=1$$
$$3A+C=3 \quad -$$
$$-2A=-2$$
$$A=1$$

$$3=3A+C$$
$$3=3.1+C \to C=0.$$

$$B+D=\sqrt{3K}.$$
$$3B+D=\sqrt{3K}. \quad -$$
$$-2B = 0 \to B=0$$
$$D=\sqrt{3K}.$$

$$A = 1 \qquad C = 0$$
$$B = 0 \qquad D = \sqrt{3k}.$$

$$Y_1(s) = \frac{As+B}{s^2+k} + \frac{cs+D}{s^2+3k} = \frac{s}{s^2+k} + \frac{\sqrt{3k}}{s^2+3k}.$$

$$y_1(t) = \mathcal{L}\, Y_1(s) = \mathcal{L}\left[\frac{s}{s^2+k} + \frac{\sqrt{3k}}{s^2+3k}\right]$$

$$= \cos\sqrt{k}\,t + \sin\sqrt{3k}\,t .$$

$$Y_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} s^2+2k & s+\sqrt{3k} \\ -k & s-\sqrt{3k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+2k & -k \\ -k & s^2+2k \end{vmatrix}} = \frac{(s^2+2k)(s-\sqrt{3k}) - (-k)(s+\sqrt{3k})}{(s^2+2k)^2 - k^2}$$

Pembilang

$(s^2+2k)(s-\sqrt{3k}) - (-k)(s+\sqrt{3k})$

$s^3 - \sqrt{3k}\, s^2 + 2ks - 2k\sqrt{3k} + ks + k\sqrt{3k}$

$s^3 - \sqrt{3k}\, s^2 + 3ks - k\sqrt{3k}$

$(Es+F)(s^2+3k) + (Gs+H)(s^2+k)$

$Es^3 + Fs^2 + 3Eks + 3Fk + Gs^3 + Hs^2 + Gks + Hk$

$s^3 \rightarrow 1 = E + G$

$s^2 \rightarrow -\sqrt{3k} = F + H$

$s \rightarrow 3k = 3Ek + Gk \rightarrow 3 = 3E + G$

$s^0 \rightarrow -k\sqrt{3k} = 3Fk + Hk \; . \; -\sqrt{3k} = 3F + H$

$1 = E + G$

$1 = 1 + G \rightarrow G = 0$

$1 = E + G$

$3 = 3E + G$ −

$-2 = -2E \rightarrow E = 1$

$-\sqrt{3k} = 3F + H$

$H = -\sqrt{3k}$

$-\sqrt{3k} = F + H$

$-\sqrt{3k} = 3F + H$ −

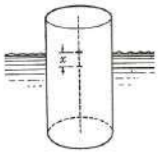
$0 = -2F \rightarrow F = 0$

$$Y_1(s) = \frac{Es+F}{(s^2+k)} + \frac{Gs+H}{(s^2+3k)} = \frac{s}{s^2+k} + \frac{-\sqrt{3k}}{s^2+3k}$$

$$y_1(s) = \mathcal{L}\left[Y_1(s)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{s}{s^2+k} - \frac{\sqrt{3k}}{s^2+3k}\right]$$

$$= \cos\sqrt{k}t - \sin\sqrt{3k}t$$

3. A cylindrical buoy 2 ft in diameter stands in water (density 62.4 lb/ft^3) with its axis vertical. When depressed slightly and released, it is found that the period of vibration is 2 seconds. Find the weight of the cylinder.



Take the origin at the intersection of the axis of the cylinder and the surface of the water when the buoy is in equilibrium, and take the downward direction as positive.

Let x (ft) denote the change in the position of the buoy at time t. By Archimedes' Principle, a body partly or totally submerged in a fluid is buoyed up by a force equal to the weight of the fluid it displaces. Thus, the corresponding change in the buoying force is $62.4\pi(1)^2 x$ and

$$\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = -62.4\pi x \qquad \text{or} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2009}{W}\pi x = 0,$$

where W (lb) is the weight of the buoy and $g = 32.2$ ft/sec^2.

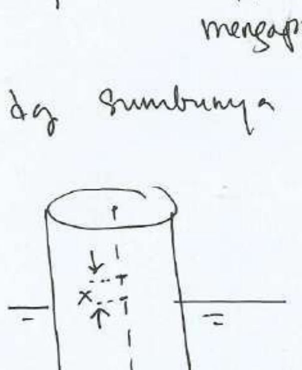
Integrating, $\quad x = C_1 \sin\sqrt{2009\pi/W}\, t + C_2 \cos\sqrt{2009\pi/W}\, t$.

Since the period is $\dfrac{2\pi}{\sqrt{2009\pi/W}} = 2\sqrt{\pi W/2009} = 2, \quad W = \dfrac{2009}{\pi} = 640$ lb.

25 Juli 2019

Schaum's outline Series
Theory and Problems of Differential Equations (a)
Frank Ayres, JR. Page 143

13. Suatu pelampung berbentuk silinder diameter 2 ft berada mengapung di air (densiti 62,4 lb/ft^3) dg sumbunya mengarah vertikal (spt gambar)



Ketika ditekan dan dilepaskan, ditemukan bahwa periode getaran adalah 2 detik.
Dapatkan berat dari silinder.

Ambil perpotongan antara sumbu silinder dan permukaan air sebagai origin ketika pelampung dalam keadaan kesetimbangan, dan ambil arah kebawah sebagai arah positip.

Ambil x (ft) menyatakan ~~perubahan positip dari~~ posisi dari pelampung pada waktu t.
Dengan Prinsip Archimedes, suatu benda yg sebagian atau seluruhnya ditenggelamkan apungkan kedalam suatu fluida adalah diangkat ditopang / didukung oleh suatu gaya yg sama dg berat dari fluida yg dipindahkan.

Jadi, Perubahan yg sesuai dalam gaya apung (b)
adalah $62{,}4\pi(1)^2 x$. dan

$$\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = -62{,}4\,\pi x \quad \text{atau}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2009}{W}\pi x = 0 .$$

$\boxed{\Sigma F = 0}$.

keterangan.

$\Sigma ma = -\Sigma F$ = - berat zat cair yg dpis

$$\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = -\rho V = \rho . \pi r^2 x = -62{,}4 . \pi . (1)^2 . x .$$

$$\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = -62{,}4\ \pi x .$$

$$W\frac{d^2x}{dt^2} = -62{,}4 . 32{,}2\ \pi x \qquad g = 32{,}2\ \frac{ft}{s^2}$$

$$= -2009\ \pi x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2009}{W}\pi x = 0 .$$

dimana W (lb) adalah berat dari pelampung dan $g = 32{,}2\ ft/s^2$.

ket.

$r'' + a r = 0$. $\cancel{\alpha^2 - a}$ - $\int \frac{d^2x}{dt^2}dt + \int a x\, dt$.

$\alpha^2 + a = 0$

$\cancel{(\alpha + \sqrt{a})(\alpha - \sqrt{a})} =$

$Y'' + aY = 0$ $\quad$ det $= 0 - 4.1.a$

~~##~~ Pers Karakteristik $\quad = -4a$

$\lambda^2 + a = 0$ $\quad$ under dap.

$\lambda = -a = a i^2$

$\lambda = 0 \pm \sqrt{a}\, i$ $\quad$ Koef ~~konst~~ konstanta

Solusi under damp

$Y_h = e^{0t}\,[C_1 \cos\sqrt{a}\,t + C_2 \sin\sqrt{a}\,t$

$$X = C_1 \sin\sqrt{\frac{2009\pi}{w}}\,t + C_2 \cos\sqrt{\frac{2009\pi}{w}}\,t$$

Periode $= 2 \rightarrow f = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{\frac{2009\pi}{w}} = \omega = 2\pi f \rightarrow \sqrt{\frac{2009 \cdot 3{,}14}{w}} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{1}{2}$$

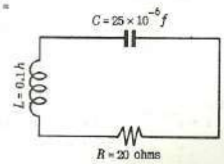
$$\frac{2009 \cdot 3{,}14}{3{,}14^2} = W = \frac{2009}{3{,}14} = 640 \text{ lb}$$

Bab 5

Tambahan1

ECTRIC CIRCUITS.

An electric circuit consists of an inductance of 0.1 henry, a resistance of 20 ohms and a condenser of capacitance 25 microfarads (1 microfarad = 10^{-6} farad). Find the charge q and the current i at time t, given the initial conditions (a) $q = 0.05$ coulomb, $i = dq/dt = 0$ when $t = 0$, (b) $q = 0.05$ coulomb, $i = -0.2$ ampere when $t = 0$.



Since $L = 0.1$, $R = 20$, $C = 25 \cdot 10^{-6}$, $E(t) = 0$,

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t)$$

reduces to $$\frac{d^2q}{dt^2} + 200\frac{dq}{dt} + 400{,}000q = 0.$$

Integrating, $q = e^{-100t}(A \cos 100\sqrt{39}\,t + B \sin 100\sqrt{39}\,t)$.

Differentiating once with respect to t,

$$i = \frac{dq}{dt} = 100e^{-100t}\left[(\sqrt{39}\,B - A)\cos 100\sqrt{39}\,t - (\sqrt{39}\,A + B)\sin 100\sqrt{39}\,t\right].$$

a) Using the initial conditions $q = 0.05$, $i = 0$ when $t = 0$, $A = 0.05$ and $B = \frac{0.05}{\sqrt{39}} = 0.008$.

Hence, $$q = e^{-100t}(0.05 \cos 624.5t + 0.008 \sin 624.5t)$$

and $$i = -0.32e^{-100t} \sin 624.5t.$$

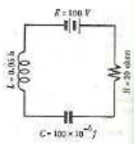
b) Using the initial conditions $q = 0.05$, $i = -0.2$ when $t = 0$, $A = 0.05$ and $B = 0.0077$.

Hence, $$q = e^{-100t}(0.05 \cos 624.5t + 0.0077 \sin 624.5t)$$

and $$i = e^{-100t}(-0.2 \cos 624.5t - 32.0 \sin 624.5t)$$

Note that q and i are transients, each becoming negligible very quickly.

23. A circuit consists of an inductance of 0.05 henry, a resistance of 20 ohms, a condenser of capacitance 100 microfarads, and an emf of $E = 100$ volts. Find i and q, given the initial conditions $q = 0$, $i = 0$ when $t = 0$.



Here $$0.05\frac{d^2q}{dt^2} + 20\frac{dq}{dt} + \frac{q}{100 \cdot 10^{-6}} = 100$$

or $$\frac{d^2q}{dt^2} + 400\frac{dq}{dt} + 200{,}000q = 2000.$$

Integrating, $q = e^{-200t}(A \cos 400t + B \sin 400t) + 0.01$.

Differentiating once with respect to t,

$$i = \frac{dq}{dt} = 200e^{-200t}\left[(-A + 2B)\cos 400t + (-B - 2A)\sin 400t\right].$$

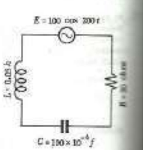
Using the initial conditions: $A = -0.01$, $-A + 2B = 0$, and $B = -0.005$.

Then $$q = e^{-200t}(-0.01 \cos 400t - 0.005 \sin 400t) + 0.01$$

and $$i = 5e^{-200t} \sin 400t.$$

Here i becomes negligible very soon while q, for all purposes, becomes $q = 0.01$.

24. Solve Problem 23 assuming that there is a variable emf of $E(t) = 100 \cos 200t$.



The differential equation is now

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 400\frac{dq}{dt} + 200{,}000q = 2000 \cos 200t. \quad \text{Then}$$

$$q = e^{-200t}(A \cos 400t + B \sin 400t) + 0.01 \cos 200t + 0.005 \sin 200t \quad \text{and}$$

$$i = e^{-200t}\left[(-200A + 400B)\cos 400t + (-200B - 400A)\sin 400t\right] - 2 \sin 200t + \cos 200t.$$

Using the initial conditions: $A = -0.01$, $-200A + 400B + 1 = 0$ and $B = -0.0075$. Then

$$q = e^{-200t}(-0.01\cos 400t - 0.0075\sin 400t) + 0.01\cos 200t + 0.005\sin 200t$$

$$i = e^{-200t}(-\cos 400t + 5.5\sin 400t) - 2\sin 200t + \cos 200t.$$

Here the transient parts of q and i very quickly become negligible. For this reason, when transients may be neglected, one needs find only the steady-state solutions

$$q = 0.01\cos 200t + 0.005\sin 200t \quad \text{and} \quad i = \cos 200t - 2\sin 200t.$$

The frequency $200/2\pi$ cycles/sec of the steady-state solutions is equal to the frequency of applied emf. (See also Problem 25.)

Advanced Engineering Mathematics
Erwin Kreyszig, Tenth Edition
Hal 130 s/d 132 dan 242

4.1. Systems of ODE's as Models in Engineering Applications

Contoh 1. Problem pencampuran fluida pd 2 tanghi

Masalah pencampuran fluida yang terdiri dari tanghi tunggal sudah dimodelkan denga satu ODE orde 1

Tanghi T_1 dan T_2 pada gambar dibawah berisi masing² 100 galon air. Pada T_1 air murni, sedangkan 150 lb pupuk dilarutkan pada T_2. Dengan mensirkulasikan cairan dengan laju 2 galon/menit, dan diaduk supaya campuran homogen.
Jumlah pupuk $Y_1(t)$ dalam T_1 dan $Y_2(t)$ dalam T_2 berubah terhadap waktu. Berapa lama kita harus membiarkan cairan bersirkulasi shg T_1 akan mengandung setidaknya ½ dari jumlah pupuk yg tersisa di T_2.

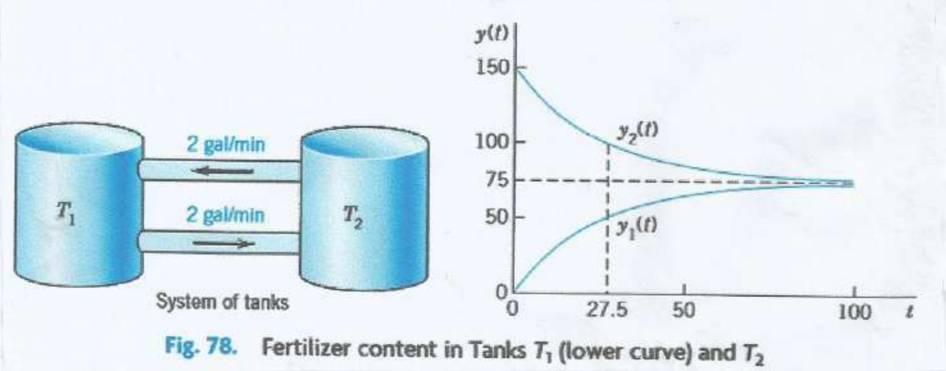


Fig. 78. Fertilizer content in Tanks T_1 (lower curve) and T_2

Solusi

Membuat model matematis

Sebagai tangki tunggal T_1, laju perubahan terhadap waktu $Y_1'(t)$ dari $Y_1(t)$ sama dengan aliran masuk − aliran keluar. Demikian juga untuk T_2.

Y_1' = aliran masuk tiap menit − aliran keluar tiap menit

$= \frac{2}{100} Y_2 - \frac{2}{100} Y_1$

Y_2' = aliran masuk tiap menit − aliran keluar tiap menit

$= \frac{2}{100} Y_1 - \frac{2}{100} Y_2$

Model Matematis

$$\begin{cases} Y_1' = -0{,}02\, Y_1 + 0{,}02\, Y_2 \\ Y_2' = 0{,}02\, Y_1 - 0{,}02\, Y_2 \end{cases} \quad \text{atau}$$

$$\begin{cases} Y_1' + 0{,}02\, Y_1 - 0{,}02\, Y_2 = 0 \\ Y_2' - 0{,}02\, Y_1 + 0{,}02\, Y_2 = 0 \end{cases}$$

Keadaan awal $Y_1(0) = 0$ $Y_2(0) = 150$ lb

Solusi

$$Y_1 = 75 - 75\, e^{-0{,}04t}$$
$$Y_2 = 75 + 75\, e^{-0{,}04t}$$

T_1 berisi ½ dr jumlah pupuk T_2 jika berisi ⅓ dari jumlah total = 50 lb

$$Y_1 = 75 - 75\, e^{-0{,}04t} = 50$$
$$-75\, e^{-0{,}04t} = 50 - 75 = -25$$
$$e^{-0{,}04t} = \frac{1}{3} \rightarrow t = \frac{\ln \frac{1}{3}}{-0{,}04}$$
$$\ln e^{-0{,}04t} = \ln \frac{1}{3}$$
$$= 27{,}5 \text{ min}$$
$$-0{,}04t = \ln \frac{1}{3}$$

Hal 242 Kreyszig

Tangki T_1 awalnya berisi 100 galon air murni. Tangki T_2 awalnya berisi 100 galon air dimana terlarut 150 lb garam. Aliran masuk ke T_1 adalah 2 gal/min dari T_2 dan 6 gal/min berisi 6 lb garam dari luar.

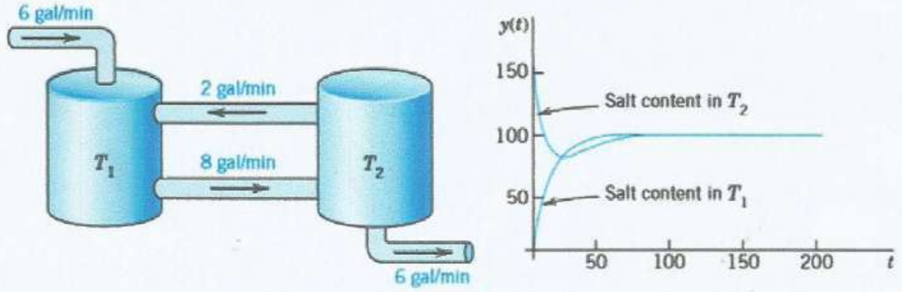


Fig. 144. Mixing problem in Example 1

Aliran masuk T_2 adalah 8 gal /min dari T_1. Aliran keluar T_2 adalah $2+6=8$ gal /min, terlihat spt gambar. Cairan diaduk sampai homogen, Hitung dan gambarkan grafik jumlah garam $Y_1(t)$ dan $Y_2(t)$ pada T_1 dan T_2

Model Matematis :

Perubahan aliran thd waktu = aliran masuk tiap menit − aliran keluar tiap menit.

$$\begin{cases} Y_1' = -\frac{8}{100}Y_1 + \frac{2}{100}Y_2 + 6 \\ Y_2' = \frac{8}{100}Y_1 - \frac{8}{100}Y_2 \end{cases}$$

atau

$$\boxed{\begin{cases} Y_1' + 0{,}08\,Y_1 - 0{,}02\,Y_2 = 6 \\ Y_2' - 0{,}08\,Y_1 + 0{,}08\,Y_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Kondisi awal} \\ Y_1(0) = 0 \\ Y_2(0) = 150 \text{ lb.} \end{array}}$$

Solusi (buktikan)

$$Y_1 = 100 - 62{,}5\, e^{-0{,}12t} - 37{,}5\, e^{-0{,}04t}$$

$$Y_2 = 100 - 125\, e^{-0{,}12t} - 75\, e^{-0{,}04t}$$

Matematika Teknik Kreyzsic page 243

Model matematis dari model adalah

Laju perubahan garam = aliran masuk/min − aliran keluar/min

Untuk 2 tangki :

$$\begin{cases} Y_1' = -\frac{8}{100} Y_1 + \frac{2}{100} Y_2 + 6 \\ Y_2' = \frac{8}{100} Y_1 - \frac{8}{100} Y_2 \end{cases}$$

atau

$$\begin{cases} Y_1' + 0{,}08\, Y_1 - 0{,}02\, Y_2 = 6 \\ Y_2' - 0{,}08\, Y_1 + 0{,}08\, Y_2 = 0 \end{cases}$$

ditransformasi Laplace menjadi :

$$\begin{cases} s\, Y_1(s) - \underbrace{Y_1(0)}_{=0} + 0{,}08\, Y_1(s) - 0{,}02\, Y_2(s) = \frac{6}{s} \\ s\, Y_2(s) - \underbrace{Y_2(0)}_{=150} - 0{,}08\, Y_1(s) + 0{,}08\, Y_2(s) = 0 \end{cases}$$

$Y_1(0) = 0$

$Y_2(0) = 150$

$$\begin{cases} s\, Y_1(s) + 0{,}08\, Y_1(s) - 0{,}02\, Y_2(s) = \frac{6}{s} \\ s\, Y_2(s) - 150 - 0{,}08\, Y_1(s) + 0{,}08\, Y_2(s) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s + 0{,}08)\, Y_1(s) - 0{,}02\, Y_2(s) = \frac{6}{s} \\ -0{,}08\, Y_1(s) + (s + 0{,}08)\, Y_2(s) = 150 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-0{,}08 - s)\, Y_1(s) + 0{,}02\, Y_2(s) = -\frac{6}{s} \\ 0{,}08\, Y_1(s) + (-0{,}08 - s)\, Y_2(s) = -150 \end{cases}$$

$$Y_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{6}{s} & 0{,}02 \\ -150 & -0{,}08 - s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -0{,}08 - s & 0{,}02 \\ 0{,}08 & -0{,}08 - s \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{6}{s}(-0{,}08 - s) - (0{,}02)(-150)}{(-0{,}08 - s)(-0{,}08 - s) - 0{,}08 \cdot 0{,}02}$$

$$\left(\frac{0,48}{s} + 9\right) \quad 2$$

$$Y_1(s) = \frac{+\frac{0,48}{s} + 6 + 3}{\cancel{0,0064 + 0,4 + 0,4} \quad (0,0064 + 0,08s + 0,08s + s^2) - 0,0016} \qquad \frac{1}{s}(0,48 + 9s)$$

$$= \frac{0,48 + 9s}{s\left((0,0064 + 0,16s + s^2) - 0,0016\right)} = \frac{9s + 0,48}{0,0064s + 0,16s^2 + s^3 - 0,0016s}$$

$$= \frac{9s + 0,48}{s^3 + 0,16s^2 + 0,0064s - 0,0016s} = \frac{9s + 0,48}{s^3 + 0,16s^2 + 0,0048s}$$

$$= \frac{9s + 0,48}{s(s^2 + 0,16s + 0,0048)} = \frac{9s + 0,48}{s(s + 0,12)(s + 0,04)}$$

Caranya $\quad s^2 + 0,16s + 0,0048$

$$s_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-0,16 \pm \sqrt{0,16^2 - 4.1.0,0048}}{2}$$

$$= -0,08 \pm 0,5 \,.\, 0,08 = -0,08 \pm 0,04$$

$$s_1 = -0,04$$

$$s_2 = -0,12$$

$$Y_1(s) = \frac{9s + 0,48}{s(s+0,12)(s+0,04)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+0,12} + \frac{C}{s+0,04}$$

$$A = s\,\frac{9s + 0,48}{s(s+0,12)(s+0,04)}\Bigg|_{s=0} = \frac{9.0 + 0,48}{(0+0,12)(0+0,04)} = \frac{0,48}{0,0048} = 100$$

$$B = (s+0,12)\,\frac{9s + 0,48}{s(s+0,12)(s+0,04)}\Bigg|_{s=-0,12} = \frac{9(-0,12) + 0,48}{-0,12\,.\,(-0,12 + 0,04)} = \frac{\cancel{-1,032}\ -0,6}{0,0096}$$

$$= \frac{-0,6}{0,0096} = -62,5$$

$$C = (s+0,04)\,\frac{9s + 0,48}{s(s+0,12)(0,04)}\Bigg|_{s=-0,04} = \frac{9(-0,04) + 0,48}{-0,04\,(-0,04 + 0,12)} = \frac{-0,36 + 0,48}{-0,0032}$$

$$= -37,5$$

$$Y_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} -0{,}08-s & -\frac{6}{s} \\ 0{,}08 & -150 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -0{,}08-s & 0{,}02 \\ 0{,}08 & -0{,}08-s \end{vmatrix}} = \frac{(-0{,}08-s)(-150) + \frac{6}{s}\cdot 0{,}08}{(-0{,}08-s)(0{,}08-s) - 0{,}02 \cdot 0{,}08}$$

$$= \frac{+12 + 150s + \frac{0{,}48}{s}}{(0{,}0064 + 0{,}16s + s^2) - 0{,}0016} = \frac{12s + 150s^2 + 0{,}48}{s^3 + 0{,}16s^2 + 0{,}0048s}$$

$$= \frac{150s^2 + 12s + 0{,}48}{s(s+0{,}12)(s+0{,}04)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+0{,}12} + \frac{C}{s+0{,}04}$$

$$A = s\left.\frac{150s^2 + 12s + 0{,}48}{s(s+0{,}12)(s+0{,}04)}\right|_{s=0} = \frac{150.0 + 12.0 + 0{,}48}{0{,}12 \cdot 0{,}04} = \frac{0{,}48}{0{,}0048} = 100$$

$$B = (s+0{,}12)\left.\frac{150s^2 + 12s + 0{,}48}{s(s+0{,}12)(s+0{,}04)}\right|_{s=-0{,}12} = \frac{150\cdot(-0{,}12)^2 + 12\cdot(-0{,}12) + 0{,}48}{-0{,}12\,(-0{,}12 + 0{,}04)}$$

$$\frac{\overset{2{,}16}{+\cancel{18}} - 1{,}44 + 0{,}48}{0{,}0144 + (-0{,}0048)} = \frac{\cancel{-18{,}96}}{\cancel{0{,}0096}} = \frac{1{,}2}{0{,}0096} = 125$$

$$C = (s+0{,}04)\left.\frac{150s^2 + 12s + 0{,}48}{s(s+0{,}12)(s+0{,}04)}\right|_{s=-0{,}04} = \frac{150(-0{,}04)^2 + 12\cdot(-0{,}04) + 0{,}48}{-0{,}04\,(-0{,}04 + 0{,}12)}$$

$$= \frac{0{,}24 - 0{,}48 + 0{,}48}{-0{,}0032} = -75$$

Jadi

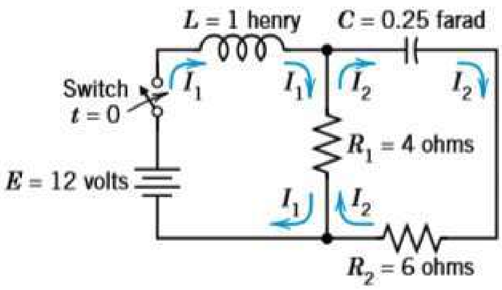
$$Y_1(s) = \frac{100}{s} - \frac{62{,}5}{s+0{,}12} - \frac{37{,}5}{s+0{,}04} \qquad Y_2(s) = \frac{100}{s} + \frac{125}{s+0{,}12} - \frac{75}{s+0{,}04}$$

Invers Transformasi Laplace

$$Y_1(t) = 100 - 62{,}5e^{-0{,}12t} - 37{,}5e^{-0{,}04t} \qquad Y_2(s) = 100 + 125e^{-0{,}12t} - 75e^{-0{,}04t}$$

Bab 6

Tambahan2



no 2

7 a

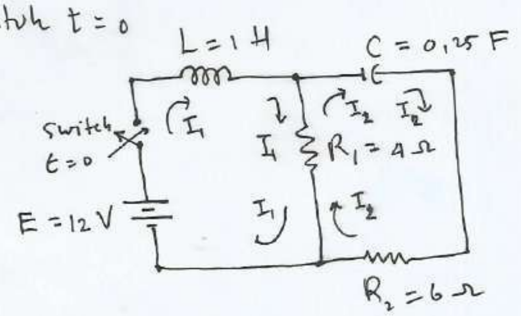
Hal 133 Kreyszig

Example 2 Electrical Network.

Dapatkan arus $I_1(t)$ dan $I_2(t)$ pd gambar dibawah

Misalkan semua arus dan muatan adalah nol

untuk $t = 0$



$V_c = \frac{1}{C}\int I_2\,dt$.

$6 I_2 + 4 I_2 - 4 I_1 + 4\int I_2 dt = 0$

$10 I_2 - 4 I_1 + 4\int I_2\,dt$.

dideferensiasi

$$I_1' + 4 I_1 - 4 I_2 - 12 = 0 \quad \cdots (1) \qquad 10\frac{dI_2}{dt} - 4\frac{dI_1}{dt} + 4 I_2 = 0 \quad \cdots (2)$$

$$I_1' = -4 I_1 + 4 I_2 + 12 \qquad I_2' - 0{,}4\, I_1' + 0{,}4\, I_2 = 0.$$

$$I_2' - 0{,}4\,(-4 I_1 + 4 I_2 + 12) + 0{,}4\, I_2 = 0$$

$$I_2' + 1{,}6\, I_1 - 1{,}6\, I_2 - 4{,}8 + 0{,}4\, I_2 = 0$$

$$I_2' + 1{,}6\, I_1 - 1{,}2\, I_2 - 4{,}8 = 0$$

$$\begin{cases} I_1' + 4 I_1 - 4 I_2 = 12 \\ I_2' + 1{,}6\, I_2 - 1{,}2\, I_2 = 4{,}8. \end{cases}$$

$I_1, I_2,$ dan $q = 0$ untuk $t = 0$.

Solusi

$$I_1 = -8e^{-2t} + 5e^{-0{,}8t} + 3$$

$$I_2 = -4e^{-2t} + 4e^{-0{,}8t}$$

$$\boxed{\begin{aligned} V_c &= \frac{1}{C}\int I_2\,dt \\ V_L &= L\frac{dI}{dt}. \end{aligned}}$$

atau dari (1) & (2)

$$\begin{cases} I_1' + 4 I_1 - 4 I_2 = 12 \\ 10 I_2' - 4 I_1' + 4 I_2 = 0 \end{cases}$$

1

Matematika Teknik بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Tentukan arus $I_1(t)$ & $I_2(t)$ dari sistem PD :

$$\begin{cases} \frac{dI_1}{dt} + 4I_1 - 4I_2 = 12 & I_1(0) = 0 \\ 10\frac{dI_2}{dt} - 4\frac{dI_1}{dt} + 4I_2 = 0 & I_2(0) = 0 \end{cases}$$

ditransfomasi Laplace

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left[\frac{dI_1}{dt}\right] + 4\mathcal{L}[I_1] - 4\mathcal{L}[I_2] = 12\,\mathcal{L}[1] \\ 10\mathcal{L}\left[\frac{dI_2}{dt}\right] - 4\mathcal{L}\left[\frac{dI_1}{dt}\right] + 4\mathcal{L}[I_2] = \mathcal{L}[0] \end{cases}$$

$$\begin{cases} s I_1(s) - \underbrace{I_1(0)}_{=0} + 4I_1(s) - 4I_2(s) = \frac{12}{s} \\ 10\left(s I_2(s) - \underbrace{I_2(0)}_{=0}\right) - 4\left(s I_1(s) - \underbrace{I_1(0)}_{=0}\right) + 4I_2(s) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1(s)(s+4) - 4I_2(s) = \frac{12}{s} \\ (-4s)I_1(s) + (10s+4)I_2(s) = 0 \end{cases}$$

Dengan aturan Cramer :

$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{12}{s} & -4 \\ 0 & 10s+4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+4 & -4 \\ -4s & 10s+4 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{12}{s}(10s+4)}{(s+4)(10s+4)-16s} = \frac{120s+48}{s[(s+4)(10s+4)-16s]}$$

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} s+4 & \frac{12}{s} \\ -4s & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+4 & -4 \\ -4s & 10s+4 \end{vmatrix}} = \frac{4s\cdot\frac{12}{s}}{(s+4)(10s+4)-16s} = \frac{48}{\cancel{s}\,[(s+4)(10s+4)-16s}$$

2

$$I_1(s) = \frac{120s+48}{s\,(\,(s+4)(10s+4) - 16s\,)} = \frac{120s+48}{s\,(s+2)(10s+8)}$$

$$= \frac{120s+48}{10s\,(s+2)(s+\frac{8}{10})} = \frac{A}{10s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+\frac{8}{10}}$$

Teorema Reduksi

$$A = 10s \left. \frac{120s+48}{10s\,(s+2)(s+\frac{8}{10})} \right|_{s=0} = \frac{120.0+48}{(0+2)(0+\frac{8}{10})} = 30$$

$$B = (s+2) \left. \frac{120s+48}{10s\,(s+2)(s+\frac{8}{10})} \right|_{s=-2} = \frac{120.-2+48}{10.-2\,(-2+\frac{8}{10})} = \frac{-192}{24} = -8$$

$$C = (s+\tfrac{8}{10}) \left. \frac{120s+48}{10s\,(s+2)(s+\frac{8}{10})} \right|_{s=-\frac{8}{10}} = \frac{120.-\frac{8}{10}+48}{10.-\frac{8}{10}\;(-\frac{8}{10}+2)} = \frac{-48}{-9{,}6} = 5$$

$$I_1(s) = \frac{120s+48}{10s\,(s+2)(s+\frac{8}{10})} = \frac{30}{10s} + \frac{-8}{s+2} + \frac{5}{s+\frac{8}{10}} = \frac{3}{s} + \frac{-8}{s+2} + \frac{5}{s+\frac{4}{5}}$$

$$I_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\, I_1(s) \,\right]$$ invers Transformasi Laplace

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s} + \frac{-8}{s+2} + \frac{5}{s+4/5} \right]$$

$$= 3 - 8e^{-2t} + 5e^{-\frac{4}{5}t}$$

3

$$I_2(s) = \frac{48}{(s+4)(10s+4)-16s} = \frac{48}{(s+2)(10s+8)} = \frac{48/10}{(s+2)(s+4/5)}$$

$$= \frac{4{,}8}{(s+2)(s+4/5)} = \frac{A}{(s+2)} + \frac{B}{(s+4/5)}$$

Teorema Reduksi

$$I_2(s) = \frac{4{,}8}{(s+2)(s+4/5)} = \frac{A}{(s+2)} + \frac{B}{(s+4/5)}$$

$$A = (s+2)\left.\frac{4{,}8}{(s+2)(s+4/5)}\right|_{s=-2} = \left.\frac{4{,}8}{s+4/5}\right|_{s=-2} = \frac{4{,}8}{-2+0{,}8} = -4$$

$$B = (s+4/5)\left.\frac{4{,}8}{(s+2)(s+4/5)}\right|_{s=-\frac{4}{5}} = \frac{4{,}8}{-\frac{4}{5}+2} = 4$$

$$I_2(s) = \frac{4{,}8}{(s+2)(s+4/5)} = \frac{-4}{s+2} + \frac{4}{s+4/5}$$

$I_2(t)$ dicari dg invers Transformasi Laplace

$$I_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[I_2(t) \right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-4}{s+2} + \frac{4}{s+4/5} \right]$$

$$= -4e^{-2t} + 4e^{-4/5\,t}$$

$$= -4e^{-2t} + 4e^{-0{,}8t}$$

Bab 7

Transformasi Laplace

Capaian Pembelajaran :

1. Mahasiswa mengulang materi tentang bilangan dan aljabar komplek
2. Mahasiswa mengerti tentang Prinsip Transformasi Laplace (TL), integral Laplace, theorem-theorema Laplace.
3. Mahasiswa memahami cara pembuatan dan penggunaan Tabel TL
4. Mahasiswa mampu untuk menyelesaikan solusi PD dengan mempergunakan Tabel TL.

Deskripsi :

Persamaan Diferensial yang didapatkan pada pemodelan bisa dicari solusinya dengan beberapa macam cara a.l. secara analitis, deret selain itu bisa dicari dengan cara menggunakan TL. Dengan beberapa macam cara hasilnya seharusnya sama.

7.1 Bilangan komplek (*Review)*

Suatu persamaan kuadrat $az^2 + bz + c = 0$, solusinya dicari dengan rumus kuadrat (rumus abc)

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

diskriminan $\quad d = b^2 - 4ac$

$d = 0$ akar-akar riel sama z

$d > 0$ akar-akar riel tidak sama $z_1 \& z_2$

$d < 0$ akar-akar komplek $z_{1,2} = x \pm iy$

$z_{1,2} = x \pm iy$ disebut bilangan komplek

x adalah bilangan real $\rightarrow Re(z) = x$

y adalah bilangan imaginer $\rightarrow Im(z) = y$

bisa juga ditulis z=(x,y)

digunakan simbol $i = \sqrt{-1}$ dengan $i^2 = -1$

contoh :

1. $\sqrt{-16} = \sqrt{16}\sqrt{-1} = 4i$

2. $z^2 - 2z + 2 = 0$
   $z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4.2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i$

Bidang komplek (*complex plane*)

$(x, y) = x + iy \quad \text{atau} \quad (r, \theta)$

$x = r \cos\theta \quad \text{dan} \quad y = r \sin\theta$

sehingga $\quad x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

magnitude dari $\quad z = r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

sudut dari $\quad z = \theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

jadi $\quad x = |z|\cos\theta \quad \text{dan} \quad y = |z|\sin\theta$

$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ ...Theorema Euler

$x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$

Jadi bentuk rectangular = bentuk persegi panjang :

$z = x + iy$

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

bentuk polar :

$z = |z| < \theta = r < \theta$

$z = |z|e^{i\theta} = re^{i\theta}$

complex conjugate dari $z = x + iy$ adalah $\bar{z} = x - iy$

sehingga

$$z = x + iy = |z| < \theta = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

$$\begin{aligned}
\bar{z} = x - iy &= |z| < -\theta \\
&= |z|(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \\
&= |z|(\cos\theta - i\sin\theta) \\
&= re^{-i\theta}
\end{aligned}$$

Aljabar komplek

Dua bilangan komplek z dan w dikatakan sama jika dan hanya jika bagian riel sama dan bagian imaginer sama

$$z = x = iy \quad \text{dan} \quad w = u + iv$$

$$z = w \quad \text{jika dan hanya jika} \quad x = u \quad \text{dan} \quad y = v$$

Penambahan

$$\begin{aligned} z + w &= (x + iy) + (u + iv) \\ &= (x + u) + i(y + v) \end{aligned}$$

Pengurangan

$$\begin{aligned} z - w &= z + (-w) = (x + iy) - (u + iv) \\ &= (x - u) + i(y - v) \end{aligned}$$

Perkalian

- Bilangan komplek dikalikan bilangan riel $az = a(x + iy) = ax + iay$
- 2 bilangan komplek dikalikan

$$\begin{aligned} zw &= (x + iy)(u + iv) \\ &= xu + iyu + ixv + i^2yv \\ &= xu + i(yu + xv) - yv \\ &= (xu - yv) + i(yu + xv) \end{aligned}$$

- Perkalian bentuk polar

$$\begin{aligned} z &= |z| < \theta \\ w &= |w| < \phi \\ zw &= |z||w| < (\theta + \phi) \end{aligned}$$

- Perkalian dengan i

$$\begin{aligned} z &= x + iy = z < \theta \\ i &= 0 + i = 1 < 90^o \\ iz &= (1 < 90^o)(z < \theta) = |z| < (\theta + 90^o) \end{aligned}$$

Perkalian dengan i adalah rotasi sebesar 90^o dengan arah berlawanan dengan jarum jam

Pembagian

- Pembagian bentuk persegi panjang

$$\begin{aligned}\frac{z}{w} &= \frac{x+iy}{u+iv} = \frac{x+iy}{u+iv}.\frac{u-iv}{u-iv} \\ &\frac{(xu+yv)+i(yu-xv)}{u^2+v^2} \\ &\frac{xu+yv}{u^2+v^2} + i\frac{yu-xv}{u^2+v^2}\end{aligned}$$

- Pembagian bentuk polar

$$\frac{z}{w} = \frac{|z| < \theta}{|w| < \phi} = \frac{|z|}{|w|} < (\theta - \phi)$$

- Pembagian dengan i

$$\begin{aligned}\frac{z}{i} &= \frac{x+iy}{i} = \frac{x+iy}{i}.\frac{i}{i} = \frac{xi-y}{-1} = y - ix \\ &\text{atau} \\ \frac{z}{i} &= \frac{|z| < \theta}{1 < 90^o} = |z| < (\theta - 90^o)\end{aligned}$$

Pembagian dengan i merupakan rotasi sebesar 90^o dengan arah sama dengan arah jarum jam

pangkat dan akar

$$\begin{aligned}z^n &= (|z| < \theta)^n = |z|^n < (n\theta) \\ z^{\frac{1}{n}} &= (|z| < \theta)^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} < \left(\frac{\theta}{n}\right)\end{aligned}$$

Catatan :

$|zw| = |z||w|$

$|z + w| \neq |z| + |w|$

komplek konjugate dari $z_1 + z_2$ adalah $\bar{z_1} \bar{+} \bar{z_2}$

$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

Soal bilangan komplek

Jadikanlah bentuk polar ($z = r < \theta$)

1. $z = \frac{2+i}{3+4i}$
2. $z = (8,66 - i5)^3$
3. $z = (2,12 - i2,12)^{\frac{1}{2}}$

4. $z = -1 - i$

5. $z = (1+i)^2$

6. $z = \frac{2+i}{3-i}$

7. $z = \frac{\sqrt{5}+3i}{1-i}$

8. $z = 1 - \frac{i}{\sqrt{3}}$

9. $z = -4i$

10. $z = 3$

Jadikan bentuk persegi panjang (z = x + iy)

1. $z = 7(\cos 110^o - i\sin 110^o)$

2. $z = \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}i}$

3. $z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

4. $z = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}$

5. $z = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$

6. $z = 5(\cos 0 + i\sin 0)$

7. $z = 5(\cos 20^o + i\sin 20^o)$

8. $z = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

9. $z = 4(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3})$

10. $z = \cos\pi - i\sin\pi$

7.2 Transformasi Laplace (*Laplace transformation*)

Salah satu metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial adalah dengan transformasi Laplace.

Step-step dalam metode transformasi Laplace :

problem (t) di ruang t $\longrightarrow$ transformasi Laplace $\longrightarrow$ persamaan (s) di ruang s

$\downarrow$ $\downarrow$

...angan komplek

$$\frac{2+i}{3+4i} = \frac{2+i}{3+4i}\,\frac{3-4i}{3-4i} = \frac{(2+i)(3-4i)}{(9-16i^2)} = \frac{6-8i+3i-4i^2}{9+16}$$

$$= \frac{6-5i+4}{25} = \frac{10-5i}{25} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(\tfrac{2}{5})^2+(-\tfrac{1}{5})^2} = \sqrt{\tfrac{4}{25}+\tfrac{1}{25}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\theta = \text{arc tg}\,\frac{y}{x} = \text{arc tg}\,\frac{-\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \text{arc tg}\left(-\tfrac{1}{2}\right) =$$

$$= -26{,}565$$

$$z = \frac{2+i}{3+4i} = \frac{1}{\sqrt{5}} \angle -26{,}565$$

2. $Z = (8{,}66 - i5)^3$

$$r = \sqrt{(8{,}66)^2+(-5)^2} = \sqrt{74{,}9956+25} = 10$$

$$\theta = \text{arc tg}\,\frac{-5}{8{,}66} = -30^\circ$$

$$8{,}66 - i5 = 10 \angle -30^\circ$$

$$Z = (8{,}66 - i5)^3 = (10 \angle -30^\circ)^3 = 1000 \angle -90^\circ$$

3. $Z = (2{,}12 - i\,2{,}12)^{1/2}$

$$r = \sqrt{(2{,}12)^2+(-2{,}12)^2} = 3 \qquad Z = (3 \angle -45)^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta = \text{arc tg}\left(\frac{-2{,}12}{2{,}12}\right) = -45 \qquad = \sqrt{3} \angle -22{,}5^\circ$$

4. $Z = -1 - i$

$$r = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \qquad Z = \sqrt{2} \angle 45^\circ$$

$$\theta = \text{arc tg}\left(\frac{-1}{-1}\right) = 45$$

19

$(1+i)^2$

$$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \text{arc tg}\left(\tfrac{1}{1}\right) = 45^\circ$$

$$z = (1+i)^2 = (\sqrt{2}\angle 45^\circ)^2 = 2\angle 90^\circ$$

$$z = \frac{2+i}{3-i} = \frac{2+i}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i} = \frac{(2+i)(3+i)}{3^2+1} = \frac{6+2i+3i-1}{10}$$

$$= \frac{5+5i}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$r = \sqrt{(\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{1}{2})^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = \text{arc tg}\left(\tfrac{1/2}{1/2}\right) = 45^\circ$$

$$z = \frac{2+i}{3-i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ$$

7. $$z = \frac{\sqrt{5}+3i}{1-i} = \frac{\sqrt{5}+3i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = \frac{\sqrt{5}+i\sqrt{5}+3i-3}{1+1}$$

$$= \frac{-3+\sqrt{5}+(3+\sqrt{5})i}{2} = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} + i\,\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(-3+\sqrt{5})^2+(3+\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\cancel{28}\;28} = \cancel{\frac{\sqrt{28}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{28}$$

$\frac{1}{4}\sqrt{2}$

$$\theta = \text{arc tg}\left(\frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}}\right) = \text{arc tg}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{-3+\sqrt{5}}\right)$$

$0{,}50\angle -81{,}69$

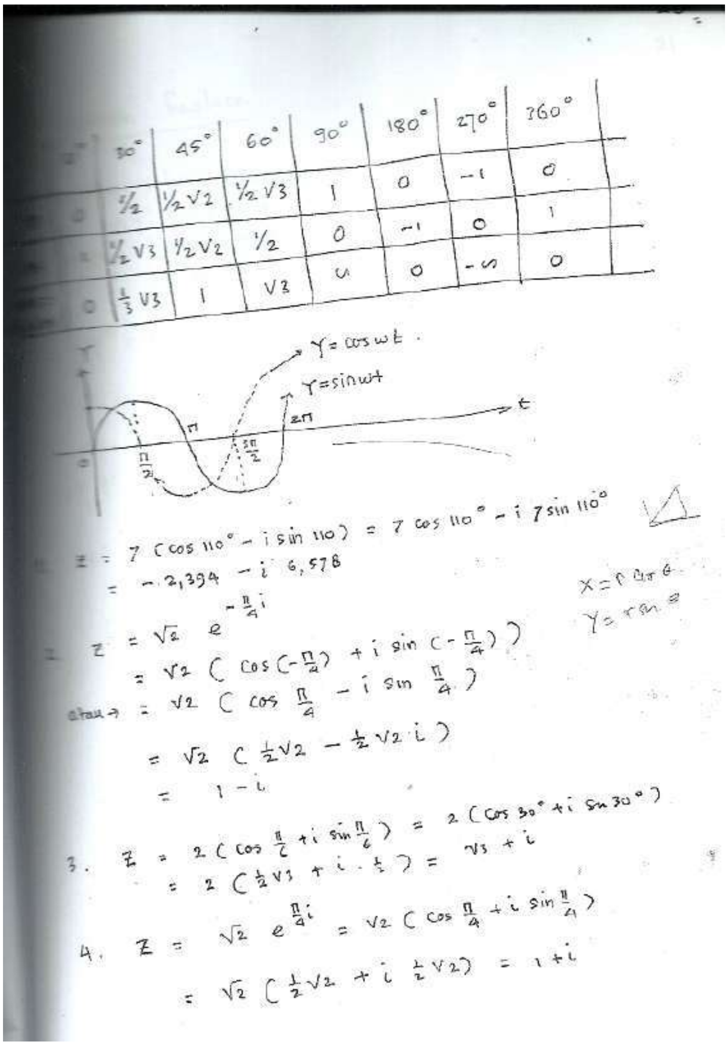
$0{,}50\, e^{-i\,81{,}69}$

$$= \text{arc tg}\left(\frac{5{,}236}{-0{,}764}\right) = -81{,}69$$

$$z = \frac{\sqrt{5}+3i}{1-i} = \frac{1}{2}\sqrt{28}\angle -81{,}69^\circ$$

$(-3+\sqrt{5})(-3+\sqrt{5}) = 9-3\sqrt{5}-3\sqrt{5}+5 = 4-6\sqrt{5}+8$

$(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5}) = 9+3\sqrt{5}+3\sqrt{5}+5 = 4+6\sqrt{5}+4$



	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
0	½	½√2	½√3	1	0	−1	0
	½√3	½√2	½	0	−1	0	1
0	⅓√3	1	√3	∞	0	−∞	0

1. $z = 7(\cos 110° - i \sin 110) = 7 \cos 110° - i\, 7 \sin 110°$

$= -2{,}394 - i\ 6{,}578$

$x = r \cos\theta$
$y = r \sin\theta$

2. $z = \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4} i}$

$= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

atau → $= \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\, i\right)$

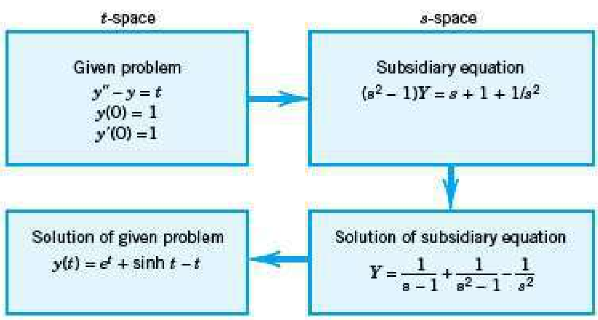
$= 1 - i$

3. $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) = 2(\cos 30° + i \sin 30°)$

$= 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

4. $z = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4} i} = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 1 + i$



Gambar 7.1: Transformasi Laplace, sumber referensi no. [3] hal. 215.

solusi (t) di ruang t ← invers transformasi Laplace ← pers. diselesaikan (s) di ruang s

Transformasi Laplace :

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt}$$

f(t)	:	problem, suatu persamaan fungsi waktu, sedemikian hingga f(t) = 0, untuk t $<$ 0
s	:	variabel komplek
$\mathcal{L}$	:	operator transformasi Laplace
$\int_0^\infty e^{-st} dt$	:	integral Laplace

Invers transformasi Laplace :

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

f(t) adalah solusi dalam ruang t.

Theorema diferensiasi :

$$\begin{aligned} \text{turunan I} \quad \mathcal{L}\big[\frac{d}{dt} f(t)\big] &= \mathcal{L}\big[f'(t)\big] = s\, F(s) - f(0) \\ \text{turunan II} \quad \mathcal{L}\big[\frac{d^2}{dt^2} f(t)\big] &= \mathcal{L}\big[f''(t)\big] = s^2\, F(s) - s\, f(0) - f'(0) \end{aligned}$$

$f(0)$ adalah nilai awal dari $f(t)$, yaitu pada t = 0,

$f'(0)$ adalah nilai awal dari $f'(t)$, yaitu pada t = 0.

Theorema integrasi :

$$\mathcal{L}\Big[\int f(t) dt\Big] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}$$

$$\text{dimana} \qquad F(s) = \mathcal{L}\big[f(t)\big] \quad \text{dan}$$

$$f^{-1}(0) = \int f(t) dt \quad \text{pada t} = 0$$

Theorema residu :

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + ... + \frac{a_n}{s+p_n} \\ a_k &= \Big[(s+p_k)\frac{B(s)}{A(s)}\Big]_{s=p_k} \\ k &= 1, 2, ...n \end{aligned}$$

Theorema pergeseran s (s shifting) :

Untuk

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

dan untuk

$$F(s-a)=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}\,f(t)dt=\int_0^\infty e^{-st}(e^{at}f(t))dt=\mathcal{L}[e^{at}f(t)]$$

sehingga

$$\text{kalau}\qquad \mathcal{L}[\cos\omega t]=\frac{s}{s^2+\omega^2}\quad\text{maka}\quad \mathcal{L}[e^{at}\cos\omega t]=\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$$

$$\text{kalau}\qquad \mathcal{L}[\sin\omega t]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\quad\text{maka}\quad \mathcal{L}[e^{at}\sin\omega t]=\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$$

<u>Sifat kelinearan</u>

Bila f(t) dan g(t) mempunyai transformasi Laplace yaitu $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$ dan $\mathcal{L}[g(t)]=G(s)$. Untuk sembarang konstanta c_1 dan c_2, berlaku :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[c_1f(t)+c_2g(t)] &= c_1\mathcal{L}[f(t)]+c_2\mathcal{L}[g(t)]\\ &= c_1F(s)+c_2G(s)\end{aligned}$$

maka berlaku juga untuk invers

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[c_1F(s)+c_2G(s)] &= c_1\mathcal{L}^{-1}[F(s)]+c_2\mathcal{L}^{-1}[G(s)]\\ &= c_1f(t)+c_2g(t)\end{aligned}$$

Contoh 1 :

Fungsi step (*step function*)

Diketahui fungsi f(t) = 1, ketika t ≥ 0

fungsi ditransformasi Laplace

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= F(s)\\ &= \mathcal{L}[1]=\int_0^\infty e^{-st}.1.dt=-\frac{1}{s}e^{-st}|_0^\infty\\ &= -\frac{1}{s}\big(e^{-\infty}-e^{-0}\big)=-\frac{1}{s}\big(\frac{1}{e^{-\infty}}-\frac{1}{e^{-0}}\big)\\ &= -\frac{1}{s}(0-1)=\frac{1}{s}\end{aligned}$$

Contoh 2 :

Fungsi eksponensial (*exponential function*)

Diketahui fungsi $f(t)=e^{at}$ ketika $t\geq 0$ dan a adalah konstanta.

fungsi ditransformasi Laplace

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= F(s) = \mathcal{L}[e^{at}] \\ &= \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{t(a-s)}dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t(s-a)}dt = -\frac{1}{s-a}e^{t(s-a)}|_0^\infty \\ &= -\frac{1}{s-a}(e^{-\infty} - e^{-0}) = \frac{1}{s-a}\end{aligned}$$

Contoh 3 :

Fungsi hiperbolik (*hyperbolicus function*)

Diketahui

$\cosh at = \frac{1}{2}(e^{at} + e^{-at}) = \frac{1}{2}e^{at} + \frac{1}{2}e^{-at}$

$\sinh at = \frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at}) = \frac{1}{2}e^{at} - \frac{1}{2}e^{-at}$

Dapatkan transformasi Laplace, jika diketahui sifat-sifat kelinearan

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]$$

jawab : ...

Contoh 4 :

Carilah invers dari transformasi berikut ini :

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{3s-137}{s^2+2s+401}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3(s+1)-140}{(s+1)^2+400}\right\} = 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)}{(s+1)^2+20^2}\right\} - 7\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{20}{(s+1)^2+20^2}\right\}$$

$$f(t) = e^{-t}[3\cos(20t) - 7\sin(20t)]$$

Tabel Transformasi Laplace

Dari data-data diatas akhirnya akan didapatkan tabel transformasi Laplace

Kerjakan soal dibawah dengan menggunakan tabel Transformasi Laplace

1. Dapatkan Transformasi Laplace dari fungsi berikut

   - $f(t) = 2t^3 + 3\cos 2t$
   - $f(t) = 4t^2 - 3\sin 2t$

     Jawab

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[2t^2 + 3\cos 2t] = \mathcal{L}[2t^2] + 3\mathcal{L}[\cos 2t] \\
&= 2\frac{3!}{s^4} + 3\frac{s}{s^2+4} = \frac{12}{s^4} + \frac{3s}{s^2+4} \\
&= \frac{3s^5 + 12s^2 + 48}{s^4(s^2+4)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[4t^2 - 3\sin 2t] = 4\mathcal{L}[t^2] - 3\mathcal{L}[\sin 2t] \\
&= 4\frac{2}{s^3} - 3\frac{2}{s^2+4} = \frac{32 + 8s^2 - 6s^3}{s^3(s^2+4)}
\end{aligned}$$

- f(t) = $\sin 3t + 3\; e^{3t}$
- f(t) = $3\cos 3t - 4\sin 3t$

2. Dapatkan Invers Transformasi Laplace

   - $F(s) = \frac{3}{s-2} - \frac{4}{s+3}$
   - $F(s) = \frac{4s}{s^2+9} + \frac{3}{s-2}$

     jawab

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= \mathcal{L}^{-1}[\frac{3}{s-2} - \frac{4}{s+3}] \\
&= 3\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s-2}] - 4\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s+3}] \\
&= 3\; e^{2t} - 4\; e^{-3t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= \mathcal{L}^{-1}[\frac{4s}{s^2+9} + \frac{3}{s-2}] \\
&= 4\mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s^2+9}] + 3\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s-2}] \\
&= 4\cos 3t + 3\; e^{2t}
\end{aligned}$$

   - $F(s) = \frac{3s+2}{s^2+4}$

3. Dapatkan solusi Y(t) dari persamaan diferensial

   $y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}$ dimana $y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$ dan $y' = \frac{dy}{dt}$

   dengan keadaan awal

   $y(0) = 0, y'(0) = 0.$

4. Dapatkan solusi X(t) dari persamaan diferensial

   $x'' + 4x' + 40x = 0$ dimana $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$ dan $x' = \frac{dx}{dt}$

   dengan keadaan awal

   $x(0) = 3, x'(0) = 0.$

5. Dapatkan solusi X(t) dari persamaan diferensial

   $x'' + 3x' + 2x = 0$ dimana $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$ dan $x' = \frac{dx}{dt}$

   dengan keadaan awal

   $x(0) = a,\ x'(0) = b$; a dan b konstan

... menggunakan sifat-sifat linearitas dan tabel. Tentukan transformasi Laplace dari fungsi-fungsi berikut ini

a. $f(t) = 2t^3 + 3\cos 2t$

b. $f(t) = 4t^2 - 3\sin 2t$

c. $f(t) = \sin 3t + 3e^{3t}$ $+2e^{3t}$

d. $f(t) = 3\cos 3t - 4\sin 3t$

a. $f(t) = 2t^3 + 3\cos 2t$

$$\mathcal{L}\{2t^3 + 3\cos 2t\} = 2\,\mathcal{L}\{t^3\} + 3\,\mathcal{L}\{\cos 2t\} = 2\frac{3!}{s^4} + 3\frac{s}{s^2+4}$$

$$= \frac{12}{s^4} + \frac{3s}{s^2+4} = \frac{3s^5 + 12s^2 + 48}{s^4(s^2+4)}$$

b. $f(t) = 4t^2 - 3\sin 2t$

$$\mathcal{L}\{4t^2 - 3\sin 2t\} = 4\,\mathcal{L}\{t^2\} - 3\,\mathcal{L}\{\sin 2t\}$$

$$= 4\frac{2}{s^3} - 3\frac{2}{s^2+9} = \frac{32 + 8s^2 - 6s^3}{s^3(s^2+4)}$$

c. $f(t) = \sin 3t + 2e^{3t}$

$$\mathcal{L}\{\sin 3t + 2e^{3t}\} = \mathcal{L}\{\sin 3t\} + 2\,\mathcal{L}\{e^{3t}\}$$

$$= \frac{3}{s^2+9} + 2\frac{1}{s-3} = \frac{2s^2 + 3s + 9}{(s^2+9)(s-3)}$$

d. $f(t) = 3\cos 3t - 4\sin 3t$

$$\mathcal{L}\{3\cos 3t - 4\sin 3t\} = 3\,\mathcal{L}\{\cos 3t\} - 4\,\mathcal{L}\{\sin 3t\}$$

$$= 3\frac{s}{s^2+9} - 4\frac{3}{s^2+9} = \frac{3s-12}{s^2+9}$$

27

$\mathcal{L}\,[3\cos 3t - 4\sin 3t]$

$3\,\mathcal{L}\,[\cos 3t] - 4\,\mathcal{L}\,[\sin 3t]$

$$3\,\frac{s}{s^2+9} - 4\,\frac{3}{s^2+9} = \frac{3s-12}{s^2+9}$$

Contoh 2 $\rightarrow$ C

untuk $F(s) = \dfrac{3s+2}{s^2+4}$, inversnya diberikan oleh :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\,\frac{3s+2}{s^2+4} = 3\,\mathcal{L}^{-1}\,\frac{s}{s^2+4} + 2\,\mathcal{L}^{-1}\,\frac{1}{s^2+4}$$

$$= 3\cos 2t + 2\,\tfrac{1}{2}\,\sin 2t$$

$$\underline{f(t) = 3\cos 2t + \sin 2t}$$

<u>Sifat² Kelinearan</u>

Bila $f(t)$ dan $g(t)$ mempunyai transformasi Laplace yaitu
$\mathcal{L}\{f\} = F(s)$ dan $\mathcal{L}\{g\} = G(s)$ untuk sembarang konstanta c_1 dan c_2
berlaku :

$$\mathcal{L}\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1\,\mathcal{L}\{f(t)\} + c_2\,\mathcal{L}\{g(t)\}$$
$$= c_1 F(s) + c_2 G(s)$$

akibatnya :

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1 F(s) + c_2 G(s)\} = c_1\,\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + c_2\,\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$
$$= c_1 f(t) + c_2 g(t)$$

$\mathcal{L}^{-1}$ = invers transformasi Laplace

Transformasi Laplace 21

5) Dapatkan solusi $Y(t)$ dari persamaan diferensial

$y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}$ dimana $y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$ dan $y' = \frac{dy}{dt}$.

dengan keadaan awal

$y(0) = 0, \; y'(0) = 4. \rightarrow$ Ralat.

Jawab:

$\mathcal{L}[Y'' + 4Y' + 4Y] = \mathcal{L}[e^{-2t}] \rightarrow$ Transformasi Laplace

$$s^2 Y - s\underbrace{Y_0}_{=0} - \underbrace{Y_0'}_{=4} + 4(sY - \underbrace{Y_0}_{=0}) + 4Y = \frac{1}{s+2}$$

$$s^2 Y + 4sY + 4Y = \frac{1}{s+2} + 4$$

$$(s^2 + 4s + 4)Y = \frac{1}{s+2} + 4$$

$$(s+2)^2 Y = \frac{1}{s+2} + 4$$

$$Y = \frac{1}{(s+2)^3} + \frac{4}{(s+2)^2}$$

Invers Transformasi Laplace $\mathcal{L}^{-1}[Y] = Y =$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^3} + \frac{4}{(s+2)^2}\right] =$$

$t^k e^{-at}$ $\quad k > -1$	$\frac{k!}{(s+a)^{k+1}}$

$$Y = \frac{1}{2} t^2 e^{-2t} + 4t\,e^{-2t}$$

$\rightarrow 2$ 22

7. Dapatkan solusi $x(t)$ dari persamaan diferensial

$x'' + 4x' + 40x = 0$ dimana $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$ dan $x' = \frac{dx}{dt}$

dengan keadaan awal

$x(0) = 3$, $x'(0) = 0$

Transformasi Laplace

$x(0) = 3$ $\quad \dot{x}(0) = 0$

$\mathcal{L}[\ddot{x} + 4\dot{x} + 40] = 0$

$s^2 X(s) - s\overset{=3}{x(0)} - \overset{=0}{\dot{x}(0)} + 4[sX(s) - \overset{=3}{x(0)}] +$

$40\,X(s) = 0$

$s^2 X(s) - 3s + 4s\,X(s) - 4\cdot 3 + 40\,X(s) = 0$

$(s^2 + 4s + 40)X(s) = 3s + 12 \;(= 3(s+4))$

$$X(s) = \boxed{\frac{3(s+4)}{s^2+4s+40}} = \frac{6 + 3(s+2)}{(s+2)^2+6^2}$$

tip trik

$$= \frac{6}{(s+2)^2+6^2} + \frac{3(s+2)}{(s+2)^2+6^2}$$

$$= \frac{6}{(s+2)^2+6^2} + 3\,\frac{(s+2)}{(s+2)^2+6^2}$$

$\frac{a}{s^2+a^2} = \sin at$

$\frac{s}{s^2+a^2}$

Invers Transformasi Laplace

$x(t) = e^{-2t}\sin 6t + 3e^{-2t}\cos 6t$

$= e^{-2t}(\sin 6t + 3\cos 6t)$

23

...patkan solusi $X(t)$ dari persamaan diferensial

$x'' + 3x' + 2x = 0$ dimana $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$ dan $x' = \frac{dx}{dt}$

...ngan keadaan awal $x(0) = a$, $x'(0) = b$

a dan b konstan

$x'' = \ddot{x}$

$x' = \dot{x}$

...ansformasi Laplace (Review)

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$$
$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sX(s) - x(0)$$
$$\mathcal{L}[\ddot{x}(t)] = s^2 X(s) - s\,x(0) - \dot{x}(0)$$

...ansformasi Laplace

$$\mathcal{L}[\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x] = 0$$

$$s^2 X(s) - s\underbrace{x(0)}_{a} - \underbrace{\dot{x}(0)}_{b} + 3\left[sX(s) - \underbrace{x(0)}_{a}\right] + 2X(s) = 0$$

$$\left[s^2 + 3s + 2\right] X(s) - (as + b + 3a) = 0$$

$$X(s) = \frac{as + b + 3a}{s^2 + 3s + 2} = \frac{as + b + 3a}{(s+1)(s+2)}$$

$$= \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2} \longrightarrow \text{theorema Residu.}$$

Theorema Residu (Review)

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s+p_n}$$

$$a_k = \left[(s+p_k)\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-p_k}$$

$$k = 1, 2, \ldots n$$

2

$$k_1 = \left[(s+1) \frac{as+b+3a}{(s+1)(s+2)} \right]_{s=-1} = \left[\frac{as+b+3a}{s+2} \right]_{s=-1}$$

$$= \frac{-a+b+3a}{-1+2} = 2a+b$$

$$k_2 = \left[(s+2) \frac{as+b+3a}{(s+1)(s+2)} \right]_{s=-2} = \left[\frac{as+b+3a}{s+1} \right]_{s=-2}$$

$$= \frac{-2a+b+3a}{-2+1} = -(a+b)$$

$$X(s) = \frac{as+b+3a}{(s+1)(s+2)} = \frac{2a+b}{s+1} - \frac{a+b}{s+2}$$

dari tabel

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)]$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

invers T.L.:

$$\mathcal{L}^{-1}[X(s)] = x(t) =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2a+b}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a+b}{s+2}\right]$$

$$= (2a+b)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - (a+b)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]$$

$$x(t) = (2a+b)\,e^{-t} - (a+b)\,e^{-2t}$$

Table of Laplace Transforms

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$	Sec.
1	$1/s$	1	6.1
2	$1/s^2$	t	
3	$1/s^n \quad (n = 1, 2, \cdots)$	$t^{n-1}/(n-1)!$	
4	$1/\sqrt{s}$	$1/\sqrt{\pi t}$	
5	$1/s^{3/2}$	$2\sqrt{t/\pi}$	
6	$1/s^a \quad (a > 0)$	$t^{a-1}/\Gamma(a)$	
7	$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}	6.1
8	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}	
9	$\dfrac{1}{(s-a)^n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$	$\dfrac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}$	
10	$\dfrac{1}{(s-a)^k} \quad (k > 0)$	$\dfrac{1}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{at}$	
11	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)} \quad (a \neq b)$	$\dfrac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$	
12	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)} \quad (a \neq b)$	$\dfrac{1}{a-b}(ae^{at} - be^{bt})$	
13	$\dfrac{1}{s^2+\omega^2}$	$\dfrac{1}{\omega} \sin \omega t$	6.1
14	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$	
15	$\dfrac{1}{s^2-a^2}$	$\dfrac{1}{a} \sinh at$	
16	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$	
17	$\dfrac{1}{(s-a)^2+\omega^2}$	$\dfrac{1}{\omega} e^{at} \sinh \omega t$	
18	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$e^{at} \cos \omega t$	
19	$\dfrac{1}{s(s^2+\omega^2)}$	$\dfrac{1}{\omega^2}(1 - \cos \omega t)$	6.2
20	$\dfrac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$	$\dfrac{1}{\omega^3}(\omega t - \sin \omega t)$	

(continued)

Gambar 7.2: Tabel Transformasi Laplace, sumber referensi no. [3] hal. 249.

Table of Laplace Transforms (*continued*)

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$	Sec.
21	$\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3}(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$	6.6
22	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{t}{2\omega}\sin \omega t$	6.6
23	$\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega}(\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$	6.6
24	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)} \quad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{1}{b^2-a^2}(\cos at - \cos bt)$	
25	$\frac{1}{s^4+4k^4}$	$\frac{1}{4k^3}(\sin kt \cosh kt - \cos kt \sinh kt)$	
26	$\frac{s}{s^4+4k^4}$	$\frac{1}{2k^2}\sin kt \sinh kt$	
27	$\frac{1}{s^4-k^4}$	$\frac{1}{2k^3}(\sinh kt - \sin kt)$	
28	$\frac{s}{s^4-k^4}$	$\frac{1}{2k^2}(\cosh kt - \cos kt)$	
29	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt} - e^{at})$	
30	$\frac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{-(a+b)t/2} I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$	I 5.5
31	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$	J 5.4
32	$\frac{s}{(s-a)^{3/2}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1+2at)$	
33	$\frac{1}{(s^2-a^2)^k} \quad (k>0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\frac{t}{2a}\right)^{k-1/2} I_{k-1/2}(at)$	I 5.5
34	e^{-as}/s	$u(t-a)$	6.3
35	e^{-as}	$\delta(t-a)$	6.4
36	$\frac{1}{s}e^{-k/s}$	$J_0(2\sqrt{kt})$	J 5.4
37	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-k/s}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{kt}$	
38	$\frac{1}{s^{3/2}}e^{k/s}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi k}}\sinh 2\sqrt{kt}$	
39	$e^{-k\sqrt{s}} \quad (k>0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-k^2/4t}$	

(*continued*)

Gambar 7.3: Tabel Transformasi Laplace, sumber referensi no. [3] hal. 250.

Table of Laplace Transforms (*continued*)

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$	Sec.
40	$\frac{1}{s}\ln s$	$-\ln t - \gamma \quad (\gamma \approx 0.5772)$	γ 5.5
41	$\ln\frac{s-a}{s-b}$	$\frac{1}{t}(e^{bt} - e^{at})$	
42	$\ln\frac{s^2+\omega^2}{s^2}$	$\frac{2}{t}(1 - \cos \omega t)$	6.6
43	$\ln\frac{s^2-a^2}{s^2}$	$\frac{2}{t}(1 - \cosh at)$	
44	$\arctan\frac{\omega}{s}$	$\frac{1}{t}\sin \omega t$	
45	$\frac{1}{s}\operatorname{arccot} s$	$\operatorname{Si}(t)$	App. A3.1

Gambar 7.4: Tabel Transformasi Laplace, sumber referensi no. [3] hal. 251.

RANGKUMAN :

Beberapa theorema Transformasi Laplace :

1. Theorema Diferensiasi
2. Theorema Residu
3. Theorema Pergeseran s
4. sifat kelinearan

Aplikasi Tabel Transformasi Laplace untuk penyelesaiaan sitem Rangkaian Listrik R,L, dan C

UJI CAPAIAN PEMBELAJARAN :

Kerjakan soal dibawah dengan menggunakan tabel Transformasi Laplace

1. Dapatkan Transformasi Laplace dari fungsi berikut
   - f(t) = $3t + 12$
   - f(t) = $\cos(\pi t)$
   - f(t) = $\sin(\omega t + \theta)$
   - f(t) = $t^2 e^{-3t}$
   - f(t) = $0.5e^{-4.5t}\sin(2\pi t)$
2. Dapatkan Invers Transformasi Laplace
   - $F(s) = \frac{0.2s+1.8}{s^2+3.24}$
   - $F(s) = \frac{12}{s^4} - \frac{228}{s^6}$
   - $F(s) = \frac{s+10}{s^2-s-2}$
   - $F(s) = \frac{2s-1}{s^2-6s+18}$
   - $F(s) = \frac{k_0(s+a)+k_1}{(s+2)^2}$

BAHAN DISKUSI :

Kerjakan soal sistem massa, pegas teredam yang sudah dikerjakan secara analitis sebelumnya dengan cara Transformasi Laplace. Apakah hasilnya sama ?

Bab 8

Analisa Testing Sumur (*Well Testing Analisis*)

Capaian Pembelajaran :
1. Mahasiswa mengetahui bermacam-macam fluida reservoir
2. Mahasiswa mengetahui bermacam-macam aliran fluida reservoir
3. Mahasiswa mengetahui bermacam-macam geometri reservoir
4. Mahasiswa mengetahui jumlah fluida yang mengalir dalam reservoir
5. Mahasiswa memahami tentang satuan

Deskripsi :

Pada bab ini dimulai pembelajaran ke arah aplikasi Teknik Perminyakan, dengan mempelajari tentang fluida, aliran, geometri dan jumlah aliran dalam reservoir. Dan mempelajari satuan yang berhubungan dengan bab ini.

8.1 Sifat Reservoir Primer (*Primary Reservoir Characteristic*)

- Macam fluida reservoir
- Macam aliran fluida reservoir
- Geometri reservoir
- Jumlah fluida yang mengalir dalam reservoir

8.1.1 Macam Fluida Reservoir

1. Fluida Incompressible : adalah fluida dimana volume dan density tidak berubah karena perubahan tekanan (contoh : tidak ada).
2. Fluida Slightly Compressible : adalah fluida dimana volume dan densitas berubah sedikit karena perubahan tekanan (contoh : minyak mentah (*crude oil*), air (water)).

3. Fluida Compressible: adalah fluida yang volume dan density banyak berubah karena tekanan (contoh : gas)

Fluida Incompressible

$$\frac{\partial V}{\partial P} = 0 \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial P} = 0$$

V adalah volume, P adalah tekanan, dan ρ adalah densitas.

Fluida Slightly Compressible

didefinisikan

$$\begin{aligned} c &= -\frac{\partial V}{V \partial P} \\ -c\, dP &= \frac{dV}{V} \end{aligned}$$

diintegrasikan

$$\begin{aligned} \int_{P_{ref}}^{P} -c\, dP &= \int_{v_{ref}}^{V} \frac{dV}{V} \\ -c \int_{P_{ref}}^{P} dP &= \int_{V_{ref}}^{V} \frac{dV}{V} \\ -c(P - P_{ref}) &= \ln V|_{V_{ref}}^{V} \end{aligned}$$

$$c(P_{ref} - P) = \ln V - \ln V_{ref} = \ln \frac{V}{V_{ref}}$$

diekponensialkan

$$e^{c(P_{ref}-P)} = e^{\ln \frac{V}{V_{ref}}} = \frac{V}{V_{ref}}$$

Jadi

$$V = V_{ref} \exp c(P_{ref} - P)$$

Ekspansi deret

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

jadi

$$e^{c(P_{ref}-P)} = 1 + c(P_{ref} - P) + \underbrace{\frac{c^2(P_{ref} - P)^2}{2!} + ...}_{\text{kecil, jadi diabaikan}}$$

Sehingga

$$e^{c(P_{ref}-P)} = 1 - c(P_{ref} - P)$$

atau

$$\begin{aligned} V &= V_{ref} \exp c(P_{ref} - P) \\ &= V_{ref}(1 + c(P_{ref} - P)) \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama untuk densitas

$$\begin{aligned} c &= \frac{\partial \rho}{\rho \partial P} \\ \rho &= \rho_{ref}[1 - c(P_{ref} - P)] \end{aligned}$$

P	:	Tekanan (psia)
V	:	Volume pada tekanan P(ft^3)
P$_{ref}$	:	Tekanan awal(psia)
V$_{ref}$	:	Volume fluida pada tekanan awal (ft^3)
c	:	Koefisien kompresibility isothermal
ρ	:	Densiti pada tekanan P (lb/ft^3)
ρ_{ref}	:	Densiti pada tekanan awal (lb/ft^3)

Fluida Compressible

$$c_g = \frac{1}{P} - \frac{1}{Z}(\partial Z/\partial P)_T$$

g adalah gas

8.1.2 Macam Aliran Fluida Reservoir

1. Aliran *steady state* : tekanan konstan pada setiap lokasi reservoir.

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_i = 0, \quad \text{i adalah lokasi}$$

2. Aliran *unsteady state : transient flow* : kondisi fluida yang mengalir dimana gradien tekanan pada setiap posisi pada reservoir konstan (tidak nol).

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_i = C, \quad \text{C adalah konstanta}$$

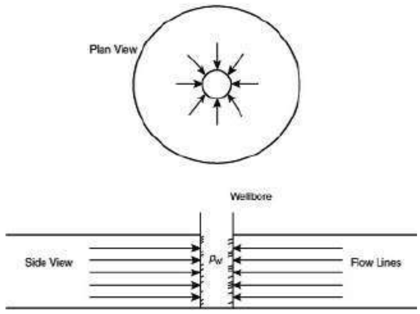
3. Aliran semi *steady state / pseudo steady state* : tekanan pada lokasi yang berbeda dari reservoir merupakan fungsi linier dari waktu.

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right) = f(i,t), \quad \text{t adalah waktu}$$

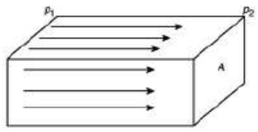
8.1.3 Geometri Reservoir

Bentuk reservoir mempengaruhi sifat aliran.

Sifat aliran

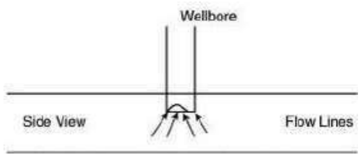


Gambar 8.1: Aliran Radial, sumber referensi no. [2] hal. 5



Gambar 8.2: Aliran Linier, sumber referensi no. [2] hal. 5

1. Aliran radial
2. Aliran linier
3. Aliran bola (*spherical*) atau setengan bola (*hemospherical*)



Gambar 8.3: Aliran setengan bola (*hemispherical flow*), sumber referensi no. [2] hal. 6

8.1.4 Jumlah Fluida yang Mengalir dalam Reservoir

1. Aliran single fase (minyak, air atau gas)
2. Aliran 2 fase (minyak-air, minyak-gas, atau gas-air)
3. Aliran 3 fase (minyak, air dan gas)

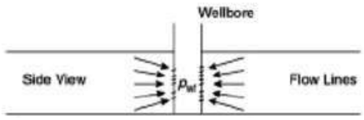
Satuan

- massa :

  1 kilogram = 1000 gram

- panjang :

  1 meter = 3,28 ft



Gambar 8.4: Aliran bola (*spherical flow*), sumber referensi no. [2] hal. 5

- waktu :

  1 jam = 60 menit = 3600 detik

- volume :

  1 barrel = 1 bbl = 158.987 liter = 9702 in^3 = 5.615 ft^3 = 0.159 m^3 = 42 US gallon = 34.972 Imperial gallon.

- permeabilitas (satuan luas) :

  1 darcy = 1 d = 10^{-12}m^2

- tekanan :

  1 psi = 6.894x10^3 Pa = 6.894x10^3 N/m^2

- viscositas :

  1 poise = 1 p = 10^{-1} = 10^{-1} Ns/m^2

- densitas :

  1 gram/cm^3 = 1000 kg/m^3

- temperatur :

  $T_R = T_F + 460$, $T_K = T_C + 273$

  R (Rankine), F (Fahrenheit), K (Kelvin), dan C (Celcius).

- Dll.

<u>RANGKUMAN</u> : Sifat Reservoir Primer (*Primary Reservoir Characteristic*)

- Macam fluida reservoir : incompressible, slightly compressible, dan compressible
- Macam aliran fluida reservoir : keadaan steady, unsteady, dan semi steady
- Geometri reservoir : aliran linier, radial, bola dan setengah bola
- Jumlah fluida yang mengalir dalam reservoir : satu, dua dan tiga fase

<u>UJI CAPAIAN PEMBELAJARAN</u> :

1. Apakah arti fluida incompressible, slightly compressible dan compressible serta berikan contoh-contohnya ?

2. Apakah arti keadaan aliran steady, unsteady dan semi steady ?

3. Apakah arti aliran linier, radial, bola, dan setengah bola ?

4. Apakah arti fluida satu, dua dan tiga fase, berikan contoh-contohnya ?

<u>BAHAN DISKUSI</u> :

1. Mengapa tidak ada fluida incompressible ? 2. Termasuk fluida apakah crude oil ? 3. Termasuk fluida apakah gas alam ?

Daftar Acuan

[1] Tarek Ahmed, Reservoir Engineering Handbook, Second edition, Gulf Professional Publishing USA.

[2] Tarek Ahmed and D. Nathan Meehan, Advanced Reservoir Management and Engineering, Second edition, Gulf Professional Publishing USA.

[3] Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 10th edition, John Wiley & sons, inc.

[4] Hugh D. Young & Roger A. Freedman, University Physics, 12th edition, Pearson Addison Wesley.

[5] Prayudi (2006), Matematika teknik, Penerbit Graha Ilmu, Yokyakarta.

[6] Mary L. Boas, Mathematical Methods in the Physical Science, John Wiley & Sons.

[7] www.env.gov.bc.ca