



unisba
UNIVERSITAS ISLAM BANDUNG



Program Studi
STATISTIKA
UNIVERSITAS ISLAM BANDUNG



Now Published

STATISTIKA

Forum Teori dan Aplikasi Statistika

Volume 25 No. 1 2025

E-ISSN: 2599-2538 P-ISSN: 1411-5891

published by Department of Statistics,
Faculty of Mathematics and Natural Sciences and
UPT Publikasi Ilmiah Universitas Islam Bandung (UNISBA)

<https://journals.unisba.ac.id/index.php/statistika/index>

Page Header

ADDITION.
MENU

[FOR
READERS](#)

[FOR
AUTHORS](#)

[FOR
LIBRARIANS](#)

[FOCUS
AND SCOPE](#)

[PEER
REVIEWERS](#)

[EDITORIAL
BOARD](#)

[CONTACT
US](#)

[AUTHOR
GUIDELINES](#)

[ABSTRACT
AND
INDEXING](#)

[PUBLICATION
ETHICS](#)

[ONLINE
SUBMISSION](#)

TEMPLATE



[DOWNLOAD HERE](#)

TOOLS



[Flag Counter](#)

HOME	ABOUT	LOGIN	REGISTER
CATEGORIES	SEARCH	CURRENT	
ARCHIVES	ANNOUNCEMENTS		

Home > About the Journal > Editorial Team

Editorial Team

Editor in Chief

[Aceng Komarudin Mutaqin](#), SCOPUS ID: 38961618500; SINTA ID: 5977377; Program Studi Statistika, Fakultas MIPA, Universitas Islam Bandung, Indonesia

Editorial Board

[Abdul Kudus](#), Scopus ID: 57211264113; Sinta ID: SINTA ID: 5973275; Program Studi Statistika, Fakultas MIPA, Universitas Islam Bandung, Indonesia
[Akhmad Fauzy](#), Scopus ID: 57163688600; Sinta ID: 20783; Universitas Islam Indonesia, Indonesia
[Anang Kurnia](#), Scopus ID: 56595012800; Sinta ID: 36595; Institut Pertanian Bogor, Indonesia
[Dwi Agustin Nuriani Sirodj](#), Scopus ID: 57192073169; Sinta ID: 6013945; Program Studi Statistika, Fakultas MIPA, Universitas Islam Bandung, Indonesia
[Hari Wijayanto](#), Scopus ID: 36631233900; Sinta ID: 6038606; Institut Pertanian Bogor, Indonesia
[Nusar Hajarisman](#), SINTA ID: 129049; Program Studi Statistika, Fakultas MIPA, Universitas Islam Bandung, Indonesia
[Sri Astuti Thamrin](#), Scopus ID: 55980609800; Sinta ID: 5975804; Universitas Hasanuddin, Makassar, Indonesia

Copyright Notice

[Creative Commons License](#)
STATISTIKA is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License](#).

USER

Username

Password

☐ Remember me

ACCREDITATION



STATISTIKA
INDEXED BY



INFORMATION

- [For Readers](#)
- [For Authors](#)
- [For Librarians](#)

E-ISSN DAN ISSN





KEYWORDS

: defect first observable, bearing vibration, adaptive Shewhart, ARIMA, Harga Cabai Merah, Time Series, Analisis Regresi, Analisis-jalur, Analisis-regresi, Child marriage, married women aged 15-24 years, logistic regression, Data Konsumsi Energi Listrik, IPKM, Iklim, Curah Hujan, Suhu Udara, Kelembaban, Kecepatan Angin, Kejadian Diare, Regresi Data Panel, Model Fixed Effect, Karakteristik Kota Palembang, Naïve Bayes, Pembudidayaan Ikan, Lele, Support Vector Machine, Time Series, Analisis akses internet, lima tahun, teknologi informasi, susenas, analisis korespondensi, kepala daerah, pemilihan umum, hyperplane, peramalan, rumah tangga, pertanian, intersensal, hybrid ENT, rumah tangga stationary, non autocorrelation, Phillips-Peron Test, Augmented Dickey Fuller Test, Inflation

OPEN JOURNAL SYSTEMS

[Journal Help](#)

NOTIFICATIONS

- [View](#)
- [Subscribe](#)

FONT SIZE



Page Header

ADDITION.
MENU

FOR
READERS

FOR
AUTHORS

FOR
LIBRARIANS

FOCUS
AND SCOPE

PEER
REVIEWERS

EDITORIAL
BOARD

CONTACT
US

AUTHOR
GUIDELINES

ABSTRACT
AND
INDEXING

PUBLICATI
ETHICS

ONLINE
SUBMISSION

TEMPLATE



DOWNLOAD HERE



Flag Counter

HOME	ABOUT	LOGIN	REGISTER
CATEGORIES	SEARCH	CURRENT	
ARCHIVES	ANNOUNCEMENTS		

Home > Archives > Vol 11, No 2 (2011)

Vol 11, No 2 (2011)

Table of Contents

Articles

<u>Uji Akar-Akar Unit dalam Model Runtun Waktu Autoregresif</u> Rusdi Rusdi	<u>PDF (BAHASA INDONESIA)</u>
<u>Efficiency of General Insurance in Malaysia Using Stochastic Frontier Analysis</u> Mohamad Arif Awang Nawi, Wan Muhamad Amir W Ahmad, Nor Azlida Aleng	<u>PDF (BAHASA INDONESIA)</u>
<u>Analisis Kandungan Zat Kimia Anorganik pada Beberapa Proses Filtrasi Air Minum Menggunakan One-Way Manova</u> Heruna Tanty	<u>PDF (BAHASA INDONESIA)</u>
<u>Modifikasi Statistik Uji-T pada Test Inferensia Mean Mereduksi Pengaruh Keasimetrian Populasi Menggunakan Ekspansi Cornish-Fisher</u> Joko Riyono	<u>PDF (BAHASA INDONESIA)</u>
<u>Penerapan Algoritma Tree Augmented Naive Bayesian pada Penentuan Peubah Penting</u> Pingkan Awalia, Aji Hamim Wigena, Anang Kurnia	<u>PDF (BAHASA INDONESIA)</u>
<u>Analisis Risiko Operasional Bank XXX dengan Metode Teori Nilai Ekstrim</u> Anik Djuraidah, Pika Silvianti, Aris Yaman	<u>PDF (BAHASA INDONESIA)</u>

Copyright Notice

Creative Commons License
STATISTIKA is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

USER

Username

Password

☐ Remember me

Login

ACCREDITATION



STATISTIKA
INDEXED BY



CURRENT ISSUE

ATOM	1.0
RSS	2.0
RSS	1.0

INFORMATION

- For Readers
- For Authors
- For Librarians

E-ISSN DAN ISSN

E-ISSN : 2599 - 2538





KEYWORDS

: defect first observable, bearing vibration, adaptive Shewhart ARIMA. Harga Cabai Merah. Time Series. Analisis Regresi Analisis-jalur Analisis-regresi Child marriage, married women aged 15-24 years, logistic regression Data Konsumsi Energi Listrik IPKM Iklim, Curah Hujan, Suhu Udara, Kelembaban, Kecepatan Angin, Kejadian Diare, Regresi Data Panel, Model Fixed Effect Karakteristik Kota Palembang Naïve Bayes Pembudidaya Ikan Lele Support Vector Machine Time Series Analysis akses internet, lima tahun, teknologi informasi,susenas analisis korespondensi, kepala daerah, pemilihan umum hyperplane peramalan, rumah tangga, pertanian, intersensal, hybrid ENT rumah tangga stationary, non autocorrelation, Phillips-Peron Test, Augmented Dickey Fuller Test, Inflation

OPEN JOURNAL SYSTEMS

[Journal Help](#)

NOTIFICATIONS

- [View](#)
- [Subscribe](#)

FONT SIZE



Modifikasi Statistik Uji-T pada Test Inferensia Mean Mereduksi Pengaruh Keasimetrian Populasi Menggunakan Ekspansi Cornish-Fisher

JOKO RIYONO

Staf.Pengajar Fakultas Teknologi Industri Universitas Trisakti Jakarta
(Kampus A Jl.Kiyai Tapa No.1,Jakarta11440)

ABSTRACT

This article considers a procedure that reduces the effect of population skewness on the distribution of the variabel-t so that tests about the mean can be more correctly computed with a modification of the t variabel.A modification of the t variabel is obtained using the Cornish-Fisher expansion.

Key Words:Skewness,t variable,Cornish-Fisher expansion.

ABSTRAK

Paper ini membahas suatu prosedur yang mengurangi pengaruh kemiringan dari populasi pada distribusi student-t sehingga uji inferensi mean dapat terhitung lebih baik dengan suatu modifikasi variable student-t .Modifikasi dari variabel student-t diperoleh menggunakan ekspansi Cornish-Fisher.

Kata Kunci :Kemiringan ,Variabel student-t,Ekspansi Cornish-Fisher.

1. PENDAHULUAN.

Dalam Statistik inferensia mean satu populasi sering dipakai statistik :

$$T = \frac{\bar{Y} - \mu}{(S^2 / n)^{1/2}}$$

untuk menguji hipotesa:

Ho : $\mu = \mu_0$ versus satu dari tiga kemungkinan alternatif yaitu :

(1) H1 = $\mu \neq \mu_0$

(2) H1 = $\mu > \mu_0$

(3) H1 = $\mu < \mu_0$

Dengan asumsi : (i) Yi berdistribusi indepeden

(ii) Populasi berdistribusi normal

Hasil dalam teori statistik yang cukup baik dibuat oleh student (1908) bahwa $T \sim t(n-1)$ adalah distribusi student t dengan derajat kebebasan (n-1). Dengan asumsi di atas, dipunyai uji pada level α :

untuk Ho : $\mu = \mu_0$ vs H1 : $\mu \neq \mu_0$ tolak Ho jika $|TC| > t_{\alpha/2}$

untuk Ho : $\mu = \mu_0$ vs H1 : $\mu > \mu_0$ tolak Ho jika $TC > t_{\alpha}$

untuk Ho : $\mu = \mu_0$ vs H1 : $\mu < \mu_0$ tolak Ho jika $TC < - t_{\alpha}$

dengan
$$TC = \frac{\bar{Y} - \mu_0}{(S^2 / n)^{1/2}}$$

Tetapi jika asumsi kedua tak terpenuhi yaitu populasi tidak berdistribusi normal, Cicchitelli (1989) dengan studi Monte Carlo mendapatkan bahwa kemiringan populasi mempengaruhi statistik T di atas sehingga kita tidak dapat mendekatinya dengan distribusi student $t(n-1)$ apalagi jika ukuran sampel kecil. Johnson (1978) telah membuat modifikasi dari statistik T di atas untuk mengurangi pengaruh kemiringan populasi terhadap statistik T tersebut. Dalam tulisan ini akan dibahas modifikasi statistik T tersebut menggunakan ekspansi Cornish-Fisher.

2. EKSPANSI CORNISH-FISHER

Andaikan diberikan $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ adalah sampel random dari suatu distribusi G dengan mean μ , variansi σ^2 dan $\mu_3, \mu_4, \dots$ masing-masing adalah momen central ketiga, keempat, ... dari G. Untuk sebarang variabel random Y dengan distribusi G, bentuk ekspansi Cornish-Fisher diberikan dengan :

$$CF(Y) = \mu + \sigma \xi + \frac{\mu_3}{6\sigma^2} (\xi^2 - 1) + \dots \quad (1.1)$$

dimana ξ adalah variabel normal standar.

Karena $\text{Var}(\bar{Y}) = \frac{\sigma^2}{n}$ dan

$$\begin{aligned} \mu_3(\bar{Y}) &= E(\bar{Y} - \mu)^3 = \frac{1}{n^3} E\left\{\sum_{i=1}^n (Y_i - \mu)\right\}^3 \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n E(Y_i - \mu)^3 = \frac{\mu_3}{n^2} \end{aligned}$$

Sehingga :

$$CF(\bar{Y}) = \mu + \frac{\sigma}{n^{\frac{1}{2}}} \xi + \frac{\mu_3}{6n\sigma^2} (\xi^2 - 1) + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right) \dots \quad (1.2)$$

Dari ekspansi di atas dapat dicatat bahwa kemiringan populasi μ_3 adalah koefisien dari suku $(\xi^2 - 1)$ serta tampak dalam suku-suku lain tetapi dengan order yang lebih kecil. Kunci dalam mendapatkan modifikasi variabel T dalam pendekatan Johnson adalah mengeliminasi suku yang melibatkan μ_3 dalam variabel T pembangun yang diberikan pada bagian bawah berikut:

Diberikan variabel T pembangun

$$TJ = \frac{(\bar{Y} - \mu) + \lambda + \gamma \left\{ (\bar{Y} - \mu)^2 - \frac{\sigma^2}{n} \right\}}{\left\{ \frac{S^2}{n} \right\}^{\frac{1}{2}}} \dots (1.3)$$

λ dalam TJ dipilih sehingga suku konstan dalam ekspansi Cornish-Fisher dari TJ berjumlah nol sehingga bias order yang lebih rendah tereliminasi γ dipilih sehingga koefisien dari suku ξ^2 dalam ekspansi Cornish-Fisher dari TJ adalah nol (dengan demikian mengeliminasi pengaruh

kemiringan order yang lebih rendah). Dapat ditunjukkan bahwa $\gamma = \frac{\mu_3}{3\sigma^4}$ dan $\lambda = \frac{\mu_3}{2n\sigma^2}$ sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \text{Karena : } E(S^2) &= \sigma^2 \text{ dan } \text{var}(S^2) = \frac{\mu_4}{n} + \frac{3-n}{n(n-1)} \sigma^4 \\ \text{var}(S^2) &= \frac{\mu_4}{n} + \frac{\sigma^4}{n} \left(-1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + \dots \right) \approx \frac{\mu_4}{n} - \frac{\sigma^4}{n} \end{aligned}$$

sehingga ekspansi Cornish-Fisher dari $\bar{Y}$ dan S^2 , suku-suku lebih tinggi diabaikan adalah :

$$CF(\bar{Y}) = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \xi + \frac{\mu_3}{6n\sigma^2} (\xi^2 - 1)$$

$$\begin{aligned} CF(S^2) &= \sigma^2 + \left[\frac{\mu_4 - \sigma^4}{n} \right]^{\frac{1}{2}} \eta \\ &= \sigma^2 \left\{ 1 + \left[\frac{\mu_4 - \sigma^4}{n\sigma^4} \right]^{\frac{1}{2}} \eta \right\} \end{aligned}$$

dimana ξ dan η adalah variabel random normal standar. Gantikan nilai $\bar{Y}$ dan S^2 dalam (1.3) dengan ekspansinya, maka dengan pengabaian suku $O(n^{-1})$, ekspansi Cornish-Fisher dari TJ adalah :

$$\begin{aligned} CF(TJ) &= \xi + \left(\frac{\gamma\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\mu_3}{3\sqrt{n}\sigma^3} \right) \xi^2 \\ &\quad + \frac{\lambda\sqrt{n}}{\sigma} - \frac{\gamma\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} - \frac{\mu_4 - \sigma^4}{2\sqrt{n}\sigma^2} \xi\xi^* \end{aligned}$$

dengan ξ dan ξ^* variabel random normal standar yang independen.

Bukti :

$$TJ = \left\{ (\bar{Y} - \mu) + \lambda + \gamma \left[(\bar{Y} - \mu)^2 - \left(\frac{\sigma^2}{n} \right) \right] \right\} \left(\frac{S^2}{n} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \bar{Y} - \mu &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \xi + \frac{\mu_3}{6n\sigma^2} \xi^2 - \frac{\mu_3}{6n\sigma^2} \\ (\bar{Y} - \mu)^2 &= \frac{\sigma^2}{n} \xi^2 + \frac{\mu_3^2}{36n^2\sigma^4} \xi^4 + \frac{\mu_3}{36n^2\sigma^4} \\ &\quad + \frac{\mu_3}{3n\sqrt{n}\sigma} \xi^3 - \frac{\mu_3^2}{18n^2\sigma^4} \xi^2 - \frac{\mu_3}{6n\sqrt{n}\sigma} \xi. \end{aligned}$$

$$\frac{S^2}{n} = \frac{\sigma^2}{n} \left\{ 1 + \left(\frac{\mu_4 - \sigma^4}{n\sigma^4} \right)^{\frac{1}{2}} \eta \right\}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{S^2}{n} \right)^{-\frac{1}{2}} &= \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left\{ 1 + \left(\frac{\mu_4 - \sigma^4}{n\sigma^4} \right)^{\frac{1}{2}} \eta \right\}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_4 - \sigma^4}{n\sigma^4} \right)^{\frac{1}{2}} \eta + \frac{3}{42!} \frac{\mu_4 - \sigma^4}{n\sigma^4} \eta^2 + \dots \right\} \end{aligned}$$

sehingga:

$$\begin{aligned}
 CF(TJ) &= \left\{ \frac{\gamma \mu_3^2}{36n^2 \sigma^4} \xi^4 + \frac{\gamma \mu_3}{3n\sqrt{n}\sigma} \xi^3 + \left(\frac{\mu_3}{6n\sigma^2} + \frac{\gamma \sigma^2}{n} - \frac{\gamma \mu_3^2}{18n^2 \sigma^4} \right) \xi^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\gamma \mu_3}{6n\sqrt{n}\sigma} \right) \xi + \frac{\gamma \mu_3^2}{36n^2 \sigma^4} + \lambda - \frac{\mu_3}{6n\sigma^2} - \frac{\gamma \sigma^2}{n} \right\} \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \\
 &\quad \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_4 - \sigma^4}{n\sigma^4} \right)^{\frac{1}{2}} \eta + \frac{3}{4.2!} \frac{\mu_4 - \sigma^4}{\sigma^4} \eta^2 - \dots \right\} \\
 CF(TJ) &= \left\{ \frac{\gamma \mu_3^2}{36n\sqrt{n}\sigma^5} \xi^4 + \frac{\gamma \mu_3}{3n\sigma^2} \xi^3 + \left(\frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} + \frac{\gamma \sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\gamma \mu_3^2}{18n\sqrt{n}\sigma^5} \right) \xi^2 + \right. \\
 &\quad \left. \left(1 - \frac{\gamma \mu_3}{6n\sigma^2} \right) \xi + \frac{\gamma \mu_3^2}{36n\sqrt{n}\sigma^5} + \frac{\lambda \sqrt{n}}{\sigma} - \frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} - \frac{\gamma \sigma}{\sqrt{n}} \right\} \\
 &\quad \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_4 - \sigma^4}{n\sigma^4} \right)^{\frac{1}{2}} \eta + \frac{3}{4.2!} - \frac{\mu_4 - \sigma^4}{n\sigma^4} \eta^2 \dots \right\} \\
 CF(TJ) &= \left(\frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} + \frac{\gamma \sigma}{\sqrt{n}} \right) \xi^2 + \xi + \frac{\lambda \sqrt{n}}{\sigma} - \frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} - \frac{\gamma \sigma}{\sqrt{n}} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_4 - \sigma^4}{n\sigma^4} \right)^{\frac{1}{2}} \xi \eta
 \end{aligned}$$

Tulis $\eta = \rho \xi + \xi^*$ dimana ρ adalah kolerasi antara $\bar{X}$ dan S^2 dan ξ^* adalah variabel random normal independen terhadap ξ . $\rho = \mu_3 \left\{ \sigma^2 (\mu_4 - \sigma^4) \right\}^{-\frac{1}{2}}$ sehingga :

$$\begin{aligned}
 CF(TJ) &= \xi + \left(\frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} + \frac{\gamma \sigma}{\sqrt{n}} \right) \xi^2 + \frac{\lambda \sqrt{n}}{\sigma} - \frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} - \frac{\gamma \sigma}{\sqrt{n}} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_4 - \sigma^4}{n\sigma^4} \right)^{\frac{1}{2}} \xi \left\{ \frac{\mu_3}{\left[\sigma^2 (\mu_4 - \sigma^4) \right]^{\frac{1}{2}}} \xi + \xi^* \right\} \\
 CF(TJ) &= \xi + \left(\frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} + \frac{\gamma \sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\mu_3}{2\sqrt{n}\sigma^3} \right) \xi^2 + \frac{\lambda \sqrt{n}}{\sigma} - \frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} - \frac{\lambda \sigma}{\sqrt{n}} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_4 - \sigma^4}{n\sigma^4} \right)^{\frac{1}{2}} \xi \xi^*
 \end{aligned}$$

Dengan menyeleksi γ dan λ sehingga koefisien dari ξ^2 adalah nol juga suku konstan berjumlah nol, ekspresi hasil akan mengurangi bias, didapat :

$$\frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} + \frac{\gamma\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\mu_3}{2\sqrt{n}\sigma^3} = 0$$

$$- \frac{\mu_3}{3\sqrt{n}\sigma^3} + \frac{\gamma\sigma}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\gamma = \frac{\mu_3}{3\sigma^4}$$

$$\text{dan } \frac{\gamma\sqrt{n}}{\sigma} - \frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} - \frac{\gamma\sigma}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\frac{\lambda\sqrt{n}}{\sigma} - \frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} - \frac{\mu_3}{3\sqrt{n}\sigma^3} = 0$$

$$\frac{\lambda\sqrt{n}}{\sigma} - \frac{\mu_3}{2\sqrt{n}\sigma^3} = 0$$

$$\lambda = \frac{\mu_3}{2n\sigma^2}$$

$$\text{Jadi } CF(TJ) = \xi - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_4 - \sigma^4}{n\sigma^4} \right)^{\frac{1}{2}} \xi \xi^* + o(n^{-1})$$

$$= \xi - \frac{1}{2\sqrt{n}} (K_u - 1)^{\frac{1}{2}} \xi \xi^* + o(n^{-1}) \quad \dots (1.4)$$

$$\text{dan } TJ = \left\{ (\bar{Y} - \mu) + \frac{\mu_3}{6\sigma^2 n} + \frac{\mu_3}{3\sigma^4} (\bar{Y} - \mu)^2 \right\} \left(\frac{S^2}{n} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \blacksquare \dots (1.5)$$

Terlihat bahwa TJ yang diberikan oleh (1.5) tidak dapat dihitung dengan $H : \mu = \mu_0$, karena μ_3 dan σ^2 biasanya tidak diketahui. Johnson menyarankan mengganti μ_3 dan σ^2 dengan estimasi

sampel $\hat{\mu}_3 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^3}{n}$ dan variansi sampel S^2 . Ekspansi Cornish-Fisher masih (1.4)

Untuk contoh penggunaannya uji hipotesis $H_0 : \mu = \mu_0$ melawan satu dari tiga alternatif kemungkinan, maka dipunyai uji level α sebagai berikut :

TT : untuk $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$,

$$\text{tolak } H_0 \text{ jika } |TJH| > t_{\alpha/2} \quad \dots (1.6)$$

TU : untuk $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$,

$$\text{tolak } H_0 \text{ jika } TJH > t_{\alpha} \quad \dots (1.7)$$

TI : untuk $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu < \mu_0$,

$$\text{tolak } H_0 \text{ jika } TJH < -t_{\alpha} \quad \dots (1.8)$$

$$\text{dimana } TJH = \frac{(\bar{Y} - \mu_0) + \hat{\mu}_3 / (6S^2 n) + (\hat{\mu}_3 / (3S^4))(\bar{Y} - \mu)^2}{\left(\frac{S^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.9)$$

dan t_{α} notasi bagian atas 100α titik persentil dari distribusi t dengan derajat bebas $(n-1)$.

3. KESIMPULAN

Dari uraian di atas terlihat bahwa statistik:

$$TJ = \left\{ (\bar{Y} - \mu) + \frac{\mu_3}{6\sigma^2 n} + \frac{\mu_3}{3\sigma^4} (\bar{Y} - \mu)^2 \right\} \left(\frac{S^2}{n} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{yang diperoleh melalui statistik T}$$

pembangun:
$$TJ = \frac{(\bar{Y} - \mu) + \lambda + \gamma \left\{ (\bar{Y} - \mu)^2 - \frac{\sigma^2}{n} \right\}}{\left\{ \frac{S^2}{n} \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad \text{Dengan menyeleksi } \gamma \text{ dan } \lambda$$

sehingga koefesien dari ξ^2 & suku konstan pada ekspansi Cornish-Fisher nya berjumlah nol, ekspresi hasil akan mengurangi bias.

DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Benjamini, Y (1983), "Is T-Test Really Conservative whe the Parent Distribution is Long-Tailed", J. Am. Statist. Assoc., 78, 645-654.
- [2]. Dudewicz, E. J. & Mishra, S. N. (1988), Modern Mathematical Statistics, John Wiley & Sons.
- [3]. Hall, P. (1992), The Bootstrap and Edgeworth Expansion, Springer-Verlag Inc. New York.
- [4]. Lehmann, E. L. (1983), Theory of Point Estimation, John Wiley & Sons.
- [5]. Johnson, Norman J. (1978), "Modified t Test and Confidence Intervals for Asymmetrical Populations", J. Am. Statist. Assoc., 73, 536-544.
- [6]. Wallace, David L. (1958), "Asymptotic Approximations to Distributions," Annals of Mathematical Statistics, 29, 165-170.

Joko Riyono FTI

Modifikasi Statistik Uji-T pada Test Inferensia Mean Mereduksi Pengaruh Keasimetrian Populasi Menggunakan Ekspansi Cor...

 TEKNIK INDUSTRI

Document Details

Submission ID

trn:oid::3618:138739765

Submission Date

May 13, 2026, 9:44 AM GMT+7

Download Date

May 13, 2026, 10:45 AM GMT+7

File Name

STATISTIKA jurnal .pdf

File Size

167.3 KB

6 Pages

1,477 Words

6,747 Characters

0% Overall Similarity

The combined total of all matches, including overlapping sources, for each database.

Filtered from the Report

- Bibliography
- Quoted Text
- Small Matches (less than 10 words)

Exclusions

- 18 Excluded Sources
- 2 Excluded Matches

Top Sources

- 0%  Internet sources
- 0%  Publications
- 0%  Submitted works (Student Papers)

Integrity Flags

0 Integrity Flags for Review

Our system's algorithms look deeply at a document for any inconsistencies that would set it apart from a normal submission. If we notice something strange, we flag it for you to review.

A Flag is not necessarily an indicator of a problem. However, we'd recommend you focus your attention there for further review.

Top Sources

- 0%  Internet sources
 - 0%  Publications
 - 0%  Submitted works (Student Papers)
-

Statistika, Vol. 11 No. 2, 97 – 102
Nopember 2011

Modifikasi Statistik Uji-T pada Test Inferensia Mean Mereduksi Pengaruh Keasimetrian Populasi Menggunakan Ekspansi Cornish-Fisher

JOKO RIYONO

Staf.Pengajar Fakultas Teknologi Industri Universitas Trisakti Jakarta
(Kampus A Jl.Kiyai Tapa No.1,Jakarta11440)

ABSTRACT

This article considers a procedure that reduces the effect of population skewness on the distribution of the variabel-t so that tests about the mean can be more correctly computed with a modification of the t variabel.A modification of the t variabel is obtained using the Cornish-Fisher expansion.

Key Words:Skewness,t variable,Cornish-Fisher expansion.

ABSTRAK

Paper ini membahas suatu prosedur yang mengurangi pengaruh kemiringan dari populasi pada distribusi student-t sehingga uji inferensi mean dapat terhitung lebih baik dengan suatu modifikasi variable student-t .Modifikasi dari variabel student-t diperoleh menggunakan ekspansi Cornish-Fisher.
Kata Kunci :Kemiringan ,Variabel student-t,Ekspansi Cornish-Fisher.

1. PENDAHULUAN.

Dalam Statistik inferensia mean satu populasi sering dipakai statistik :

$$T = \frac{\bar{Y} - \mu}{(S^2 / n)^{1/2}}$$

untuk menguji hipotesa:

Ho : $\mu = \mu_0$ versus satu dari tiga kemungkinan alternatif yaitu :

(1) $H1 = \mu \neq \mu_0$

(2) $H1 = \mu > \mu_0$

(3) $H1 = \mu < \mu_0$

Dengan asumsi : (i) Yi berdistribusi indepeden

(ii) Populasi berdistribusi normal

Hasil dalam teori statistik yang cukup baik dibuat oleh student (1908) bahwa $T \sim t(n-1)$ adalah distribusi student t dengan derajat kebebasan (n-1). Dengan asumsi di atas, dipunyai uji pada level α :

untuk Ho : $\mu = \mu_0$ vs $H1 : \mu \neq \mu_0$ tolak Ho jika $|TC| > t_{\alpha/2}$

untuk Ho : $\mu = \mu_0$ vs $H1 : \mu > \mu_0$ tolak Ho jika $TC > t_{\alpha}$

untuk Ho : $\mu = \mu_0$ vs $H1 : \mu < \mu_0$ tolak Ho jika $TC < -t_{\alpha}$

dengan $TC = \frac{\bar{Y} - \mu_0}{(S^2 / n)^{1/2}}$

98 Joko Riyono

Tetapi jika asumsi kedua tak terpenuhi yaitu populasi tidak berdistribusi normal, Cicchitelli (1989) dengan studi Monte Carlo mendapatkan bahwa kemiringan populasi mempengaruhi statistik T di atas sehingga kita tidak dapat mendekatinya dengan distribusi student $t(n-1)$ apalagi jika ukuran sampel kecil. Johnson (1978) telah membuat modifikasi dari statistik T di atas untuk mengurangi pengaruh kemiringan populasi terhadap statistik T tersebut. Dalam tulisan ini akan dibahas modifikasi statistik T tersebut menggunakan ekspansi Cornish-Fisher.

2. EKSPANSI CORNISH-FISHER

Andaikan diberikan $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ adalah sampel random dari suatu distribusi G dengan mean μ , variansi σ^2 dan $\mu_3, \mu_4, \dots$ masing-masing adalah momen central ketiga, keempat, ... dari G . Untuk sebarang variabel random Y dengan distribusi G , bentuk ekspansi Cornish-Fisher diberikan dengan :

$$CF(Y) = \mu + \sigma \xi + \frac{\mu_3}{6\sigma^2} (\xi^2 - 1) + \dots \quad (1.1)$$

dimana ξ adalah variabel normal standar.

Karena $\text{Var}(\bar{Y}) = \frac{\sigma^2}{n}$ dan

$$\begin{aligned} \mu_3(\bar{Y}) &= E(\bar{Y} - \mu)^3 = \frac{1}{n^3} E\left\{\sum_{i=1}^n (Y_i - \mu)\right\}^3 \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n E(Y_i - \mu)^3 = \frac{\mu_3}{n^2} \end{aligned}$$

Sehingga :

$$CF(\bar{Y}) = \mu + \frac{\sigma}{n^{\frac{1}{2}}} \xi + \frac{\mu_3}{6n\sigma^2} (\xi^2 - 1) + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right) \dots \quad (1.2)$$

Dari ekspansi di atas dapat dicatat bahwa kemiringan populasi μ_3 adalah koefisien dari suku $(\xi^2 - 1)$ serta tampak dalam suku-suku lain tetapi dengan order yang lebih kecil. Kunci dalam mendapatkan modifikasi variabel T dalam pendekatan Johnson adalah mengeliminasi suku yang melibatkan μ_3 dalam variabel T pembangun yang diberikan pada bagian bawah berikut:

Diberikan variabel T pembangun

$$TJ = \frac{(\bar{Y} - \mu) + \lambda + \gamma \left\{ (\bar{Y} - \mu)^2 - \frac{\sigma^2}{n} \right\}}{\left\{ \frac{S^2}{n} \right\}^{\frac{1}{2}}} \dots (1.3)$$

λ dalam TJ dipilih sehingga suku konstan dalam ekspansi Cornish-Fisher dari TJ berjumlah nol sehingga bias order yang lebih rendah tereliminasi γ dipilih sehingga koefisien dari suku ξ^2 dalam ekspansi Cornish-Fisher dari TJ adalah nol (dengan demikian mengeliminasi pengaruh

kemiringan order yang lebih rendah). Dapat ditunjukkan bahwa $\gamma = \frac{\mu_3}{3\sigma^4}$ dan $\lambda = \frac{\mu_3}{2n\sigma^2}$ sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \text{Karena : } E(S^2) &= \sigma^2 \text{ dan } \text{var}(S^2) = \frac{\mu_4}{n} + \frac{3-n}{n(n-1)} \sigma^4 \\ \text{var}(S^2) &= \frac{\mu_4}{n} + \frac{\sigma^4}{n} \left(-1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + \dots \right) \approx \frac{\mu_4}{n} - \frac{\sigma^4}{n} \end{aligned}$$

sehingga ekspansi Cornish-Fisher dari $\bar{Y}$ dan S^2 , suku-suku lebih tinggi diabaikan adalah :

$$CF(\bar{Y}) = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \xi + \frac{\mu_3}{6n\sigma^2} (\xi^2 - 1)$$

$$\begin{aligned} CF(S^2) &= \sigma^2 + \left[\frac{\mu_4 - \sigma^4}{n} \right]^{\frac{1}{2}} \eta \\ &= \sigma^2 \left\{ 1 + \left[\frac{\mu_4 - \sigma^4}{n\sigma^4} \right]^{\frac{1}{2}} \eta \right\} \end{aligned}$$

dimana ξ dan η adalah variabel random normal standar. Gantikan nilai $\bar{Y}$ dan S^2 dalam (1.3) dengan ekspansinya, maka dengan pengabaian suku $O(n^{-1})$, ekspansi Cornish-Fisher dari TJ adalah :

$$\begin{aligned} CF(TJ) &= \xi + \left(\frac{\gamma\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\mu_3}{3\sqrt{n}\sigma^3} \right) \xi^2 \\ &\quad + \frac{\lambda\sqrt{n}}{\sigma} - \frac{\gamma\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} - \frac{\mu_4 - \sigma^4}{2\sqrt{n}\sigma^2} \xi \xi^* \end{aligned}$$

dengan ξ dan ξ^* variabel random normal standar yang independen.

Bukti :

$$TJ = \left\{ (\bar{Y} - \mu) + \lambda + \gamma \left[(\bar{Y} - \mu)^2 - \left(\frac{\sigma^2}{n} \right) \right] \right\} \left(\frac{S^2}{n} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \bar{Y} - \mu &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \xi + \frac{\mu_3}{6n\sigma^2} \xi^2 - \frac{\mu_3}{6n\sigma^2} \\ (\bar{Y} - \mu)^2 &= \frac{\sigma^2}{n} \xi^2 + \frac{\mu_3^2}{36n^2\sigma^4} \xi^4 + \frac{\mu_3}{36n^2\sigma^4} \\ &\quad + \frac{\mu_3}{3n\sqrt{n}\sigma} \xi^3 - \frac{\mu_3^2}{18n^2\sigma^4} \xi^2 - \frac{\mu_3}{6n\sqrt{n}\sigma} \xi. \end{aligned}$$

$$\frac{S^2}{n} = \frac{\sigma^2}{n} \left\{ 1 + \left(\frac{\mu_4 - \sigma^4}{n\sigma^4} \right)^{\frac{1}{2}} \eta \right\}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{S^2}{n} \right)^{-\frac{1}{2}} &= \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left\{ 1 + \left(\frac{\mu_4 - \sigma^4}{n\sigma^4} \right)^{\frac{1}{2}} \eta \right\}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_4 - \sigma^4}{n\sigma^4} \right)^{\frac{1}{2}} \eta + \frac{3}{42!} \frac{\mu_4 - \sigma^4}{n\sigma^4} \eta^2 + \dots \right\} \end{aligned}$$

100 Joko Riyono

sehingga:

$$\begin{aligned}
 CF(TJ) &= \left\{ \frac{\gamma \mu_3^2}{36n^2 \sigma^4} \xi^4 + \frac{\gamma \mu_3}{3n\sqrt{n}\sigma} \xi^3 + \left(\frac{\mu_3}{6n\sigma^2} + \frac{\gamma \sigma^2}{n} - \frac{\gamma \mu_3^2}{18n^2 \sigma^4} \right) \xi^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\gamma \mu_3}{6n\sqrt{n}\sigma} \right) \xi + \frac{\gamma \mu_3^2}{36n^2 \sigma^4} + \lambda - \frac{\mu_3}{6n\sigma^2} - \frac{\gamma \sigma^2}{n} \right\} \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \\
 &\quad \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_4 - \sigma^4}{n\sigma^4} \right)^{\frac{1}{2}} \eta + \frac{3}{4.2!} \frac{\mu_4 - \sigma^4}{\sigma^4} \eta^2 - \dots \right\} \\
 CF(TJ) &= \left\{ \frac{\gamma \mu_3^2}{36n\sqrt{n}\sigma^5} \xi^4 + \frac{\gamma \mu_3}{3n\sigma^2} \xi^3 + \left(\frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} + \frac{\gamma \sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\gamma \mu_3^2}{18n\sqrt{n}\sigma^5} \right) \xi^2 + \right. \\
 &\quad \left. \left(1 - \frac{\gamma \mu_3}{6n\sigma^2} \right) \xi + \frac{\gamma \mu_3^2}{36n\sqrt{n}\sigma^5} + \frac{\lambda \sqrt{n}}{\sigma} - \frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} - \frac{\gamma \sigma}{\sqrt{n}} \right\} \\
 &\quad \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_4 - \sigma^4}{n\sigma^4} \right)^{\frac{1}{2}} \eta + \frac{3}{4.2!} - \frac{\mu_4 - \sigma^4}{n\sigma^4} \eta^2 \dots \right\} \\
 CF(TJ) &= \left(\frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} + \frac{\gamma \sigma}{\sqrt{n}} \right) \xi^2 + \xi + \frac{\lambda \sqrt{n}}{\sigma} - \frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} - \frac{\gamma \sigma}{\sqrt{n}} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_4 - \sigma^4}{n\sigma^4} \right)^{\frac{1}{2}} \xi \eta
 \end{aligned}$$

Tulis $\eta = \rho \xi + \xi^*$ dimana ρ adalah kolerasi antara $\bar{X}$ dan S^2 dan ξ^* adalah variabel random normal independen terhadap ξ . $\rho = \mu_3 \{ \sigma^2 (\mu_4 - \sigma^4) \}^{-\frac{1}{2}}$ sehingga :

$$\begin{aligned}
 CF(TJ) &= \xi + \left(\frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} + \frac{\gamma \sigma}{\sqrt{n}} \right) \xi^2 + \frac{\lambda \sqrt{n}}{\sigma} - \frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} - \frac{\gamma \sigma}{\sqrt{n}} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_4 - \sigma^4}{n\sigma^4} \right)^{\frac{1}{2}} \xi \left\{ \frac{\mu_3}{[\sigma^2 (\mu_4 - \sigma^4)]^{\frac{1}{2}}} \xi + \xi^* \right\} \\
 CF(TJ) &= \xi + \left(\frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} + \frac{\gamma \sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\mu_3}{2\sqrt{n}\sigma^3} \right) \xi^2 + \frac{\lambda \sqrt{n}}{\sigma} - \frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} - \frac{\lambda \sigma}{\sqrt{n}} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_4 - \sigma^4}{n\sigma^4} \right)^{\frac{1}{2}} \xi \xi^*
 \end{aligned}$$

Dengan menyeleksi γ dan λ sehingga koefisien dari ξ^2 adalah nol juga suku konstan berjumlah nol, ekspresi hasil akan mengurangi bias, didapat :

Statistika, Vol. 11, No. 2, Nopember 2011

$$\frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} + \frac{\gamma\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\mu_3}{2\sqrt{n}\sigma^3} = 0$$

$$- \frac{\mu_3}{3\sqrt{n}\sigma^3} + \frac{\gamma\sigma}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\gamma = \frac{\mu_3}{3\sigma^4}$$

$$\text{dan } \frac{\gamma\sqrt{n}}{\sigma} - \frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} - \frac{\gamma\sigma}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\frac{\lambda\sqrt{n}}{\sigma} - \frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} - \frac{\mu_3}{3\sqrt{n}\sigma^3} = 0$$

$$\frac{\lambda\sqrt{n}}{\sigma} - \frac{\mu_3}{2\sqrt{n}\sigma^3} = 0$$

$$\lambda = \frac{\mu_3}{2n\sigma^2}$$

$$\text{Jadi } CF(TJ) = \xi - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_4 - \sigma^4}{n\sigma^4} \right)^{\frac{1}{2}} \xi \xi^* + o(n^{-1})$$

$$= \xi - \frac{1}{2\sqrt{n}} (K_u - 1)^{\frac{1}{2}} \xi \xi^* + o(n^{-1}) \quad \dots (1.4)$$

$$\text{dan } TJ = \left\{ (\bar{Y} - \mu) + \frac{\mu_3}{6\sigma^2 n} + \frac{\mu_3}{3\sigma^4} (\bar{Y} - \mu)^2 \right\} \left(\frac{S^2}{n} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \dots (1.5)$$

Terlihat bahwa TJ yang diberikan oleh (1.5) tidak dapat dihitung dengan $H : \mu = \mu_0$, karena μ_3 dan σ^2 biasanya tidak diketahui. Johnson menyarankan mengganti μ_3 dan σ^2 dengan estimasi

sampel $\hat{\mu}_3 = \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \bar{Y})^3}{n}$ dan variansi sampel S^2 . Ekspansi Cornish-Fisher masih (1.4)

Untuk contoh penggunaannya uji hipotesis $H_0 : \mu = \mu_0$ melawan satu dari tiga alternatif kemungkinan, maka dipunyai uji level α sebagai berikut :

TT : untuk $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$,

$$\text{tolak } H_0 \text{ jika } |TJH| > t_{\alpha/2} \quad \dots (1.6)$$

TU : untuk $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$,

$$\text{tolak } H_0 \text{ jika } TJH > t_{\alpha} \quad \dots (1.7)$$

TL : untuk $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu < \mu_0$,

$$\text{tolak } H_0 \text{ jika } TJH < -t_{\alpha} \quad \dots (1.8)$$

$$\text{dimana } TJH = \frac{(\bar{Y} - \mu_0) + \hat{\mu}_3 / (6S^2 n) + (\hat{\mu}_3 / (3S^4))(\bar{Y} - \mu)^2}{\left(\frac{S^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.9)$$

dan t_{α} notasi bagian atas 100α titik persentil dari distribusi t dengan derajat bebas $(n-1)$.

102 Joko Riyono

3. KESIMPULAN

Dari uraian di atas terlihat bahwa statistik:

$$TJ = \left\{ (\bar{Y} - \mu) + \frac{\mu_3}{6\sigma^2 n} + \frac{\mu_3}{3\sigma^4} (\bar{Y} - \mu)^2 \right\} \left(\frac{S^2}{n} \right)^{-\frac{1}{2}} \text{ yang diperoleh melalui statistik T}$$

pembangun: $TJ = \frac{(\bar{Y} - \mu) + \lambda + \gamma \left\{ (\bar{Y} - \mu)^2 - \frac{\sigma^2}{n} \right\}}{\left\{ \frac{S^2}{n} \right\}^{\frac{1}{2}}}$ Dengan menyeleksi γ dan λ

sehingga koefesien dari ξ^2 & suku konstan pada ekspansi Cornish-Fisher nya berjumlah nol, ekspresi hasil akan mengurangi bias.

DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Benjamini, Y. (1983), "Is T-Test Really Conservative when the Parent Distribution is Long-Tailed", *J. Am. Statist. Assoc.*, 78, 645-654.
- [2]. Dudewicz, E. J. & Mishra, S. N. (1988), *Modern Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons.
- [3]. Hall, P. (1992), *The Bootstrap and Edgeworth Expansion*, Springer-Verlag Inc. New York.
- [4]. Lehmann, E. L. (1983), *Theory of Point Estimation*, John Wiley & Sons.
- [5]. Johnson, Norman J. (1978), "Modified t Test and Confidence Intervals for Asymmetrical Populations", *J. Am. Statist. Assoc.*, 73, 536-544.
- [6]. Wallace, David L. (1958), "Asymptotic Approximations to Distributions," *Annals of Mathematical Statistics*, 29, 165-170.